МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

СПРАВОЧНИ МАТЕРИАЛИ

Вектори и координати

$\vec{a}(x_a;y_a)$ $\quad$ $\vec{b}(x_b;y_b)$ $\quad$ $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}.\vec{a}}$ $\quad$ $|\vec{a}|=\sqrt{x_a{}^2+y_a{}^2}$

$\vec{a}\vec{b}=x_ax_b+y_ay_b$ $\quad$ $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

Аналитична геометрия в равнината

$ax+by+c=0$ общо уравнение на права $\quad$ $y=kx+b$ декартово уравнение на права

$g:\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$, където $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ уравнение на права през две точки

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ нормално уравнение на окръжност с център $O(a;b)$ и радиус r

Криви от втора степен	Канонично уравнение	Фокуси
Елипса	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, където $c=\sqrt{\lvert a^2-b^2\rvert}$
Хипербола	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, където $c=\sqrt{a^2+b^2}$
Парабола	$y^2=2px$	$F\left(\dfrac{p}{2};0\right)$

Ъгъл φ между две прави $g_1:a_1x+b_1y+c_1=0$ и $g_2:a_2x+b_2y+c_2=0$

$$\cos\varphi=\left|\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\right|$$

Зависимости в триъгълник и успоредник при стандартни означения

Правоъгълен триъгълник: $c^2=a^2+b^2$ $\quad$ $S=\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}ch_c$ $\quad$ $a^2=a_1c$ $\quad$ $b^2=b_1c$

$h_c{}^2=a_1b_1$ $\quad$ $r=\dfrac{a+b-c}{2}$ $\quad$ $\sin\alpha=\dfrac{a}{c}$ $\quad$ $\cos\alpha=\dfrac{b}{c}$ $\quad$ $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{a}{b}$ $\quad$ $\operatorname{cotg}\alpha=\dfrac{b}{a}$

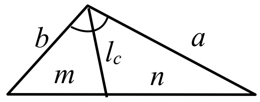
Произволен триъгълник: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ $\quad$ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$ $\quad$ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$

Формула за медиана: $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$ $\qquad m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$

$m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$



$l_c^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $\qquad S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $\qquad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $\qquad S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $\qquad S = ab\sin\alpha$ $\qquad$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$, φ – ъгъл между диагоналите

Описан многоъгълник: $S = pr$

Ръбести и валчести тела

Права призма: $S = Ph$ $\qquad S_1 = S + 2B$ $\qquad V = Bh$

Правилна пирамида: $S = \frac{Pa}{2}$ $\qquad S_1 = S + B$ $\qquad V = \frac{1}{3}Bh$

Пресечена пирамида: $S_1 = S + B + B_1$ $\qquad V = \frac{h}{3}\left(B + B_1 + \sqrt{BB_1}\right)$

Прав кръгов цилиндър: $S = 2\pi rh$ $\qquad S_1 = 2\pi r\left(h + r\right)$ $\qquad V = \pi r^2 h$

Прав кръгов конус: $S = \pi rl$ $\qquad S_1 = S + B = \pi r\left(l + r\right)$ $\qquad V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Прав кръгов пресечен конус:

$S = \pi l\left(R + r\right)$ $\qquad S_1 = \pi l\left(R + r\right) + \pi R^2 + \pi r^2$ $\qquad V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + Rr + r^2\right)$

Сфера и кълбо: $S = 4\pi r^2$ $\qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Лице на проекция на многоъгълник от равнина α върху равнина β: $S_1 = S\cos\varphi$,

S – лице на многоъгълника от равнината α, φ – острият ъгъл между равнините α и β

Тригонометрични функции

$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0
$\operatorname{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

	$-\alpha$	$90°\pm\alpha$	$180°\pm\alpha$	$270°\pm\alpha$	$360°\pm\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{cotg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{cotg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{cotg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha \qquad 1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha \qquad \sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Полиноми на една променлива

Теорема на Безу $P_n(x)=(x-x_0)Q_{n-1}(x)+P_n(x_0)$

Схема на Хорнер

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-1}	a_n
x_0	$b_0=a_0$	$b_1=x_0b_0+a_1$	$b_2=x_0b_1+a_2$	$\dots$	$b_{n-1}=x_0b_{n-2}+a_{n-1}$	$x_0b_{n-1}+a_n=P_n(x_0)$

Числови редици. Граници на редици

Нютонов бином

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\dots\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\dots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

$$\binom{n}{k}=C_n^k \qquad \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

Сума на безкрайно намаляваща геометрична прогресия: $S=\dfrac{a_1}{1-q}\qquad |q|<1$

Граници на редици: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0\qquad \lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\Leftrightarrow |q|<1\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$

Функции. Непрекъснатост и диференцируемост

Граници на функции:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\qquad \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e\qquad \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Ако $\lim\limits_{x\to c}f(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}}=\begin{cases}\infty & \text{при } n>m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{при } n=m\\ 0 & \text{при } n<m\end{cases}$$

Функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0 от дефиниционното ѝ множество, ако $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Производни на някои функции	Правила за диференциране
$(c)'=0$, $c-$константа	$(cf(x))'=cf'(x)$
$(x)'=1$	$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$
$(x^\alpha)'=ax^{\alpha-1}$	$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$(\sin x)'=\cos x$	$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(g(f(x)))'=g'(f(x))f'(x)$
$(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	
$(\operatorname{cotg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	
$(e^x)'=e^x$	
$(a^x)'=a^x\ln a,\ a>0$	
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	
$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a},\ a>0,\ a\neq 1,\ x>0$	

Приложения на математическия анализ

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ допирателна към графиката на функцията $y=f(x)$ в точката с координати $(x_0;f(x_0))$

$t:(x_0-\alpha)(x-\alpha)+(y_0-\beta)(y-\beta)=R^2$ допирателна към окръжност в точка $M_0(x_0;y_0)$ от нея

Допирателна t към крива от втора степен в точка $M_0(x_0;y_0)$ от нея:

Елипса: $t:\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ Хипербола: $t:\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

Комбинаторика

	без повторение от n елемента от $k-$ти клас	с повторение от n елемента от $k-$ти клас
Пермутации	$P_n=n!$	$\widetilde{P}_n(n_1,n_2,...,n_k)=\dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$, $n_1+n_2+...+n_k=n$
Вариации	$V_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\widetilde{V}_n^k=n^k$
Комбинации	$C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dbinom{n}{k}$	$\widetilde{C}_n^k=\widetilde{P}_n(k,n-1)=\dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}=C_{n+k-1}^k$

Вероятности

Класическа вероятност

$P(A)=\dfrac{\text{брой на благоприятните изходи}}{\text{общ брой на изходите}}$, $0\le P(A)\le 1$, $P(\varnothing)=0$, $P(\Omega)=1$

Вероятност на сума $P(A\cup B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$, A и B са несъвместими

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$, A и B са съвместими

Условна вероятност

$P(A\,|\,B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$, при $P(B)>0$

Формула за пълната вероятност

$B_1,B_2,...,B_n$ е пълна група събития при даден опит. Тогава вероятността да настъпи случайното събитие A е:

$P(A)=P(A\,|\,B_1)P(B_1)+P(A\,|\,B_2)P(B_2)+...+P(A\,|\,B_n)P(B_n)$

Формула на Бейс

за всяко $k = 1, 2, ..., n$ е изпълнено $P(B_k \mid A) = \dfrac{P(A \mid B_k) P(B_k)}{P(A)}$

Математическо очакване, дисперсия и стандартно отклонение на дискретна случайна величина

X	x_1	x_2	...	x_k
P	p_1	p_2	...	p_k

Математическо очакване: $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_k p_k$

Дисперсия:

$$D(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + ... + (x_k - E(X))^2 p_k$$

$$D(X) = EX^2 - (EX)^2 \qquad D(X) = E(X - EX)^2$$

Стандартно отклонение: $\sigma = \sqrt{D(X)}$

Биномно разпределение с параметри n, p и q

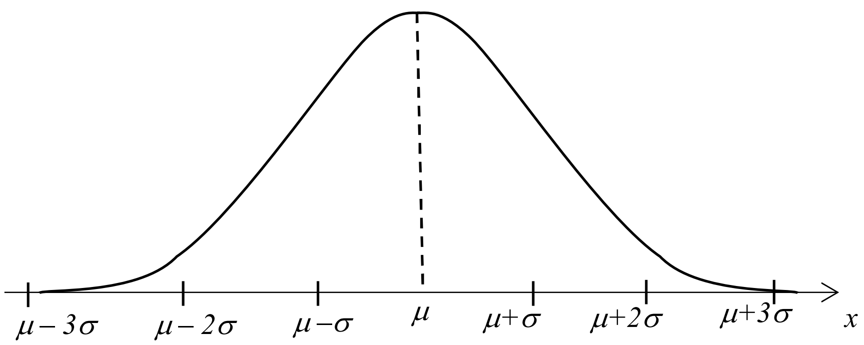
X	0	1	...	k	...	n
P	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^n p^n q^0$

$E(X) = np$, $D(X) = npq$, $\sigma = \sqrt{npq}$

Нормално разпределение $N(\mu, \sigma^2)$ на случайна величина X

Функция на плътност: $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ при $x \in (-\infty; +\infty)$

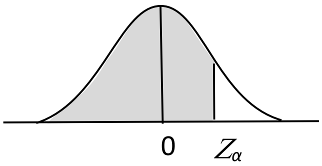
$E(X) = \mu$ – математическо очакване, σ – стандартно отклонение



$N(0,1)$ – стандартно нормално разпределена случайна величина Z

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Таблица за стойностите на стандартното нормално разпределение $N(0,1)$



Стойности на площите под нормалната крива, вляво от съответната стойност на аргумента.

$P(-\infty < Z \le Z_\alpha) = \alpha$, когато $Z_\alpha \ge 0$

За отрицателни стойности на Z_α площите се намират чрез $1 - P(Z \le Z_\alpha)$

Z_α	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990