Математика 11. клас

Донка Гълъбова
Мая Сидерова

Профилирана подготовка

Веди

Донка Гълъбова Мая Сидерова

Математика за 11. клас

ПРОФИЛИРАНА
ПОДГОТОВКА

Издателство ВЕДИ

3. Номер на задача
☒ Задача с избираем отговор
▲ Край на доказателство или решение

ISBN 978-954-8857-54-3

Съдържание

Модул I – Геометрия

Модул II – Елементи на математическия анализ

Модул I
Геометрия

1. Вектори и координати

1.1. Линейна зависимост и независимост на вектори в равнината и в пространството

1) Вектор

Определение. Отсечка, на която единият край е приет за първи, а другият – за втори, се нарича **насочена отсечка** или **вектор**.

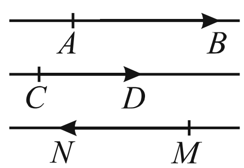
Означаваме: $\overrightarrow{AB}$, където точка A е начало на насочената отсечка (първи край), а B е край на насочената отсечка (втори край). Насочената отсечка ще означаваме и с малки латински букви $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

Ако B съвпада с A, отсечката $\overrightarrow{AA}$ наричаме нулева или **нулев вектор.** Означаваме $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Дължината на отсечката AB се нарича **дължина** на вектора $\overrightarrow{AB}$ и се означава $|\overrightarrow{AB}|$.

Определение. Два ненулеви вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се наричат **колинеарни**, ако правите AB и CD са успоредни или съвпадат. Означаваме $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.

Ако два вектора не са колинеарни, те се наричат **неколинеарни.** Два ненулеви вектора в равнината или са колинеарни, или са неколинеарни. Ако правите AB и CD се пресичат, векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са неколинеарни**.**



Колинеарните вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се наричат **еднопосочни,** ако лъчите $AB^{\rightarrow}$ и $CD^{\rightarrow}$ са еднопосочни. Означаваме $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

Колинеарните вектори $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{CD}$ се наричат **противопосочни**, ако лъчите $MN^{\rightarrow}$ и $CD^{\rightarrow}$ имат противоположни посоки. Означаваме $\overrightarrow{MN} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

Два ненулеви вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са **равни**, ако отсечките AB и CD имат равни дължини и $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са еднопосочни. Записваме $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ се наричат **противоположни**, записваме $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Под **ъгъл** между два вектора ще разбираме ъгъла, който сключат правите, на които лежат векторите.

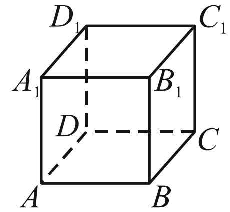
Нека $\vec{a}$ е вектор. През произволна точка O в пространството можем да построим единствен вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Казваме, че сме пренесли вектора $\vec{a}$ в точката O.

Всички определения, които бяха изучени за вектори в равнината, важат и за вектори в пространството.

Определение. Три вектора се наричат **компланарни**, ако, пренесени в произволна точка в пространството, лежат в една равнина.

Ако три вектора не са компланарни, те се наричат **некомпланарни.**

Три вектора или са компланарни, или са некомпланарни.



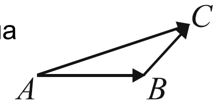
Пример. Нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е правоъгълен паралелепипед.

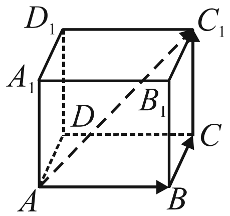
Да разгледаме векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{D_1B_1}$ и да ги пренесем в точката D.

Получаваме векторите $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{D_1B_1}$, които лежат в една равнина и значи векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{D_1B_1}$ са компланарни. Очевидно, че векторите $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ са некомпланарни.

2) Действия с вектори

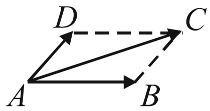
– Събиране на вектори





Правило на триъгълника. Векторът $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ се нарича сбор на векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Същото правило важи и за вектори в пространството: $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$



Правило на успоредника. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

За вектори в пространството може да се формулира по подобен начин $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC_1}$

Правилото за сбор на вектори се обобщава за три и повече вектора.

– Умножение на вектор с число

Произведението на вектора $\vec{a}$ с числото λ е вектор $\vec{b}$, такъв че $|\vec{b}|=|\lambda||\vec{a}|$ и $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$ при $\lambda>0$, $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$ при $\lambda<0$ и $\vec{b}=\vec{0}$ при $\lambda=0$.

Записваме $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

Нека O е произволна точка.

Ако $\overrightarrow{AB}$ е вектор, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

Ако M е средата на отсечката AB, то $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.

Ако M е медицентърът на ΔABC, то $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$.

Събирането на вектори и умножението на вектор с число се наричат афинни операции.

3) Линейна зависимост на вектори в равнината и пространството

Определение. Векторите $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3},...,\overrightarrow{a_n}$ се наричат **линейно зависими**, ако съществуват числа $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,...,\lambda_n$, поне едно от които е различно от нула, така че

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\lambda_3\overrightarrow{a_3}+...+\lambda_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0}.$$

Изразът $\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\lambda_3\overrightarrow{a_3}+...+\lambda_n\overrightarrow{a_n}$ се нарича **линейна комбинация** на векторите $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3},...,\overrightarrow{a_n}$, а числата $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,...,\lambda_n$ се наричат коефициенти на линейната комбинация.

Пример. Нека $ABCD$ е успоредник, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. От определението за сбор на вектори имаме $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.

Последното равенство записваме във вида $-1.\overrightarrow{AC}+\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$, което, според даденото определение, означава, че векторите $\overrightarrow{AC}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно зависими, защото поне един коефициент (числото -1) в линейната им комбинация е различен от нула.

Определение. Ако векторите $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3},...,\overrightarrow{a_n}$ не са линейно зависими, те се наричат **линейно независими**, което означава, че винаги когато е изпълнено равенството $\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\lambda_3\overrightarrow{a_3}+...+\lambda_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0}$, то $\lambda_1,=\lambda_2,=\lambda_3=...=\lambda_n=0$.

Определение. Ако векторът $\vec{p}$ се представя във вида $\vec{p}=\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\lambda_3\overrightarrow{a_3}+...+\lambda_n\overrightarrow{a_n}$, казваме, че $\vec{p}$ е **линейна комбинация на векторите** $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3},...,\overrightarrow{a_n}$.

Да запишем горното равенство във вида $-1.\overrightarrow{p}+\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\lambda_3\overrightarrow{a_3}+...+\lambda_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0}$. Това означава, че векторите $\overrightarrow{p},\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3},...,\overrightarrow{a_n}$ са линейно зависими, защото поне един коефициент (числото -1) в последното равенство е различен от нула.

Или изказано по друг начин, ако вектор е линейна комбинация на няколко вектора, то той е линейно зависим с тях.

Може да се докажат следните теореми.

Теорема 1. Два вектора са линейно зависими тогава и само тогава, когато са колинеарни.

Теорема 2. Три вектора са линейно зависими тогава и само тогава, когато са компланарни.

Теорема 3. Всеки четири вектора в пространството са линейно зависими.

От тези теореми и от начина им на доказване се получават следствията.

Следствие 1. Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно зависими (колинеарни), то съществува единствено число λ, така че $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ и $|\lambda|=\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$

Следствие 2. Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими, то всеки вектор $\vec{c}$ от равнината, определена от правите, върху които лежат векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, е линейно зависим с тях и съществува единствена двойка числа λ и μ, така че $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ ($\vec{c}$ е линейна комбинация на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$).

Следствие 3. Ако векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са линейно независими, то всеки вектор $\overrightarrow{p}$ в пространството е линейно зависим с тях и съществува единствена тройка числа λ, μ и ν, така че $\overrightarrow{p}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}$ ($\overrightarrow{p}$ е линейна комбинация на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$).

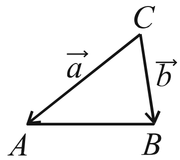
Резултатите може да се обобщят в таблицата.

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно зависими	$\Leftrightarrow$	$\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни	$\Leftrightarrow$	Съществува единствено число λ, така че $\vec{a}=\lambda\vec{b}$.
$\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими	$\Leftrightarrow$	$\vec{a}$ и $\vec{b}$ са неколинеарни	$\Rightarrow$	За всеки вектор $\vec{c}$ съществува единствена двойка числа λ и μ, така че $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$.
$\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са линейно зависими	$\Leftrightarrow$	$\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни		
$\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са линейно независими	$\Leftrightarrow$	$\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са некомпланарни	$\Rightarrow$	За всеки вектор $\overrightarrow{p}$ съществува единствена тройка числа λ, μ и ν, така че $\overrightarrow{p}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}$.

Непосредствено от определението за линейно независими вектори можем да изкажем следното твърдение.

Нека векторите $\vec{a}$ $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са линейно независими и $\vec{m}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}$, $\vec{n}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$. Тогава $\vec{m}=\vec{n}$ точно когато $\lambda=x$, $\mu=y$ и $\nu=z$.

1. В ΔABC са означени векторите $\vec{a}=\overrightarrow{CA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{f}=\vec{c}+\vec{d}$. Отговорете с „да”, или „не” на въпросите.



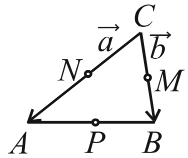
А) Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими ....

Б) Векторите $\vec{a}$ и $\vec{c}$ са линейно независими ....

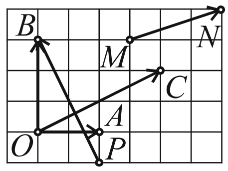
В) Векторите $\vec{b}$ и $\vec{d}$ са линейно независими ....

Г) Векторите $\vec{a}$ и $\vec{f}$ са линейно независими ....

2. В ΔABC са означени векторите $\vec{a}=\overrightarrow{CA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CB}$. Ако M, N и P са средите съответно на BC, AC и AB и G е медицентърът на триъгълника, да се изразят чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторите $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$ и $\overrightarrow{CG}$.



3. В квадратната мрежа на чертежа са дадени точките O, A, B, C, M, N и P. Изразете векторите $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PB}$ като линейна комбинация на векторите $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$.



4. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими. Намерете векторите $\vec{m}$ и $\vec{n}$, ако $\vec{m}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$, $\vec{n}=-3\lambda\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{m}+\vec{n}=3\vec{a}-\vec{b}$.

Решение. В равенството $\vec{m}+\vec{n}=3\vec{a}-\vec{b}$ заместваме $\vec{m}$ и $\vec{n}$ с равните им изрази: $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}-3\lambda\vec{a}-4\vec{b}=3\vec{a}-\vec{b} \Leftrightarrow (-2\lambda-3)\vec{a}+(\mu-3)\vec{b}=\vec{0}$. (1)

Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими и равенството (1) е тяхна линейна комбинация, следователно всички коефициенти в (1) са нули: $\left|\begin{array}{l}-2\lambda-3=0\\ \mu-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\lambda=-\dfrac{3}{2}\\ \mu=3\end{array}\right.$.

Следователно $\vec{m}=-\dfrac{3}{2}\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{n}=\dfrac{9}{2}\vec{a}-4\vec{b}$.▲

5. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими. Ако $\vec{m}=\vec{a}-\lambda\vec{b}$ и $\vec{n}=3\vec{a}+2\vec{b}$, определете λ, така че векторите $\vec{m}$ и $\vec{n}$ да бъдат линейно зависими.

6. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими и $\vec{v}=\vec{a}-3\vec{b}$. Намерете вектор $\vec{u}$, такъв че $\vec{u}=x\vec{a}+2y\vec{b}$ и $\vec{u}-\vec{v}=\vec{a}$.

7. Векторите $\vec{f}$ и $\vec{g}$ са линейно независими. Ако $\vec{a}=\vec{f}-\alpha\vec{g}$, $\vec{b}=2\vec{g}$, намерете вектор $\vec{c}=\beta\vec{f}+\alpha\vec{g}$, така че $\vec{c}$ да бъде равен на $\vec{a}-\vec{b}$.

8. Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са линейно независими и $\vec{m}=x\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{n}=\vec{a}-y\vec{c}$. Намерете x и y, така че векторът $\vec{m}-\vec{n}$ да бъде колинеарен с $\vec{b}$.

9. Векторите $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$ са линейно независими. Намерете числа x, y и z, такива че сборът на векторите $\vec{a}=x\vec{m}+\vec{n}-3\vec{p}$, $\vec{b}=\vec{m}+2y\vec{n}$ и $\vec{c}=\vec{n}+z\vec{p}$ да бъде равен на $3\vec{m}+4\vec{n}$.

10. Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са линейно независими. Намерете числа x, y и z, такива че $\vec{p}=2\vec{a}-x\vec{c}$, $\vec{q}=y\vec{b}$ и $\vec{p}-\vec{q}=z\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

1.2. Векторна база в равнината и в пространството

В равнината

Определение. Всеки два неколинеарни вектора в равнината се наричат **база** (базис) в равнината.

Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са база в равнината. Ако дължината на базисните вектори е 1, казваме, че базата е **нормирана**, ако базисните вектори са перпендикулярни, казваме, че базата е **ортогонална**, когато базисните вектори са с дължина 1 и са перпендикулярни, казваме, че базата е **ортонормирана.**

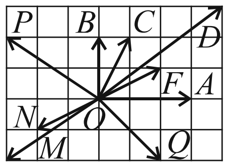
За **ортонормирана** база е изпълнено $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са база в равнината, т.е. те са неколинеарни и значи и линейно независими и като използваме Следствие 2 от предходния урок, получаваме твърдението:

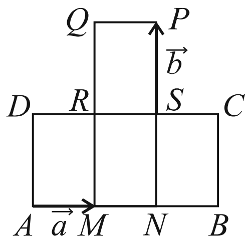
Всеки вектор в равнината се представя по единствен начин, като линейна комбинация на векторите от базата.

1. В квадратната мрежа на чертежа векторите $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ са неколинеарни, следователно образуват база.

Представете като линейна комбинация на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следните вектори: $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$.



2. На чертежа правоъгълниците $AMRD$, $MNSR$, $NBCS$ и $RSPQ$ са еднакви. Докажете, че векторите $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{SP}=\vec{b}$ образуват база в равнината и изразете като тяхна линейна комбинация векторите $\overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{BC}$.



В пространството

Определение. Всеки три некомпланарни вектора се наричат **база** (базис) в пространството.

По аналогичен начин на равнинния случай даваме определения за нормирана, ортогонална и ортонормирана база в пространството.

Нека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са база в пространството. Базата е **ортонормирана**, когато за базисните вектори е изпълнено $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{b}\perp\vec{c}$ и $\vec{a}\perp\vec{c}$.

Нека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са база в пространството $\Rightarrow$ те са некомпланарни $\Rightarrow$ са линейно независими, така получаваме твърдението:

Всеки вектор в пространството се представя по единствен начин, като линейна комбинация на векторите от базата.

3. На чертежа $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е правоъгълен паралелепипед.

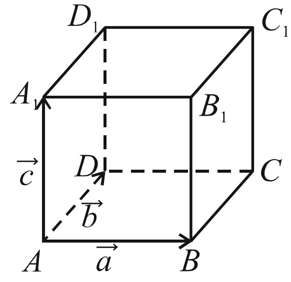
а) Коя от следните тройки вектори образува база в пространството?

☒ **А)** $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$

Б) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A_1D_1}$

В) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}$

Г) $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1}$



б) Изразете чрез базата от условие а) векторите: $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{DC_1}, \overrightarrow{C_1C}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{C_1B_1}$.

4. Ако $\overrightarrow{m}=2\vec{a}-3\vec{b}$ и $\vec{n}=\vec{a}+\vec{b}$, изразете чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторите:

а) $\vec{p}=\overrightarrow{m}+2\vec{n}$;

б) $\vec{q}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\overrightarrow{m}+\vec{n}$;

в) $\vec{c}=-3\vec{a}-3\overrightarrow{m}-3\vec{n}+\vec{b}$.

5. Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са база в пространството. Изразете чрез базата вектора $\overrightarrow{m}+\vec{n}$, ако

а) $\overrightarrow{m}=\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{n}=2\vec{b}$;

б) $\overrightarrow{m}=3(\vec{a}-\vec{b})$, $\vec{n}=\vec{b}-2\vec{c}$;

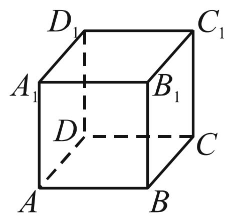
в) $\overrightarrow{m}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{n}=-2\vec{c}-3\vec{a}$;

г) $\overrightarrow{m}=(-\vec{a}+\vec{b})(-2)$, $\vec{n}=-3\vec{a}-3\vec{c}+\vec{b}$.

6. Точка M е средата на страната BC на ΔABC. Ако $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, да се изразят чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторите $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AC}$.

7. Точка M е средата на страната AB на успоредник $ABCD$. Ако $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, да се изразят чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$.

8. В правоъгълния паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M е средата на AB и $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$. Да се изразят чрез $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторите $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{D_1M}$.



9. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{c}$ са база в равнината. Ако $\overrightarrow{m}$ е вектор в равнината, за който са изпълнени равенствата $\overrightarrow{m}=\vec{a}+\lambda(\vec{a}+\vec{c})$ и $\overrightarrow{m}=\mu\vec{c}-2\vec{a}+\vec{c}$, то векторът $\vec{b}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{c}$ е равен на:

☒ А) $2\vec{a}-3\vec{c}$ Б) $-3\vec{a}-2\vec{c}$ В) $-3\vec{a}-4\vec{c}$ **Г)** $-\vec{a}+2\vec{c}$

10. Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са база в пространството. Ако за вектора $\vec{u}$ са изпълнени равенствата $\vec{u}=x\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$ и $\vec{u}=2\vec{a}-y\vec{b}+z\vec{c}$, намерете вектор $\vec{v}$, който е линейна комбинация на векторите от базата $\vec{a}$ $\vec{b}$ и $\vec{c}$ съответно с коефициенти x, y и z.

1.3. Скаларно произведение на два вектора. Приложение

Изучили сме две действия с вектори – събиране на вектори и умножение на вектор с число.
Ще въведем една нова операция (действие) – скаларно произведение на вектори.

Определение. Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са два ненулеви вектора в равнината или в пространството. **Скаларно произведение** на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **се нарича числото**, което се получава при умножение на дължините на векторите по косинуса на ъгъла между тях.

Означаваме $\vec{a}\vec{b}$ и $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$.

Ако един от векторите $\vec{a}$ или $\vec{b}$ е $\vec{0}$, то $\vec{a}\vec{b}=0$.

Скаларното произведение на вектора $\vec{a}$ по себе си означаваме така: $\vec{a}^{\,2}$ и $\vec{a}^{\,2}=\vec{a}\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

Числото $\vec{a}^{\,2}$ се нарича **скаларен квадрат** или **норма** на вектора $\vec{a}$ и $\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$.

За **дължината на вектора** $\vec{a}$ получаваме формулата $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}$. Четем: „Дължината на един вектор е корен квадратен от скаларния му квадрат."

За **косинуса на ъгъла между два вектора** получаваме формулата $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

Скаларното произведени има следните свойства.
Ако $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са вектори и $\lambda\in\mathbb{R}$, то:

1) $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$ (комутативен закон)
2) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$ (дистрибутивен закон)
3) $(\lambda\vec{a})\vec{b}=\lambda(\vec{a}\vec{b})$
4) $\vec{a}^{\,2}\geq 0$, като $\vec{a}^{\,2}=0$ имаме точно, когато $\vec{a}=\vec{0}$.

На доказателството на тези свойства няма да се спираме.

> *Обърнете внимание*
>
> Скаларното произведение на два вектора е **число**, докато сборът на два вектора е **вектор**, произведението на вектор с число е **вектор**.

Непосредствено от определението следва теоремата:
Теорема. Два ненулеви вектора са перпендикулярни тогава и само тогава, когато скаларното им произведение е нула.

Ако $\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}$, то $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}=0$.

1. Да се намери скаларното произведение на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако:

а) $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=6$ и $\angle(\vec{a},\vec{b})=\alpha=60^\circ$; б) $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=12$ и $\angle(\vec{a},\vec{b})=\alpha=120^\circ$.

Решение. а) $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha=10.6\cos 60^\circ=10.6.\frac{1}{2}=30$;

б) $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha=8.12\cos 120^\circ=8.12\left(-\frac{1}{2}\right)=-48$.▲

Сега, ако е дадена ортонормирана база, да намерим скаларните произведения на базисните вектори.

Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ортонормирана база в равнината, т.е. $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\perp\vec{b}$. За скаларните произведения на векторите от базата имаме:

$$\vec{a}^{\,2}=1,\quad \vec{b}^{\,2}=1,\quad \vec{a}\vec{b}=0.$$

Нека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са ортонормирана база в пространството, т.е. $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{b}\perp\vec{c}$ и $\vec{a}\perp\vec{c}$. За скаларните произведения на векторите от базата имаме:

$$\vec{a}^{\,2}=1,\quad \vec{b}^{\,2}=1,\quad \vec{c}^{\,2}=1,\quad \vec{a}\vec{b}=0,\quad \vec{b}\vec{c}=0,\quad \vec{a}\vec{c}=0.$$

2. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са база в равнината, като $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=60°$. Намерете скаларните произведения:

а) $2\vec{a}\vec{b}$, $2\vec{a}\vec{a}$; б) $\vec{a}(\vec{a}+2\vec{b})$;

в) $3\vec{b}(\vec{a}+\vec{b})$; г) $(\vec{a}+\vec{b})^2$;

д) $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$; е) $(\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})$.

Решение. Определяме скаларните произведения между базисните вектори и попълваме резултата в таблица: $\vec{a}\vec{a}=\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2=4$; $\vec{b}\vec{b}=\vec{b}^{\,2}=|\vec{b}|^2=9$ и $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=2.3.\cos 60°=3$.

	$\vec{a}$	$\vec{b}$
$\vec{a}$	4	3
$\vec{b}$	3	9

а) $2\vec{a}\vec{b}=2.3=6$; $2\vec{a}\vec{a}=2.4=8$.

б) От свойство 1), 2) и 3) на скаларното произведение имаме

$$\vec{a}(\vec{a}+2\vec{b})=\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\vec{b}=4+2.3=10.$$

г) От свойство 1) и 2) на скаларното произведение имаме

$$(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{\,2}=4+2.3+9=19.\blacktriangle$$

3. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуват ортонормирана база в равнината. Ако $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$, намерете:

а) $\vec{u}\vec{v}$; б) $|\vec{u}|$ и $|\vec{v}|$; в) $\cos\angle(\vec{u},\vec{v})$.

Решение. а) $\vec{u}\,\vec{v}=(\vec{a}+2\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^{\,2}-\vec{a}\vec{b}+2\vec{a}\vec{b}-2\vec{b}^{\,2}=1.1-0+0-2.1=-1$.

б) $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}^{\,2}}=\sqrt{(\vec{a}+2\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^{\,2}+4\vec{a}\vec{b}+4\vec{b}^{\,2}}=\sqrt{1+0+4}=\sqrt{5}$.

$|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}^{\,2}}=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^{\,2}-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{\,2}}=\sqrt{1-0+1}=\sqrt{2}$.

в) $\cos\angle(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{5}.\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{10}}{10}.\blacktriangle$

4. Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуват ортонормирана база в пространството. Ако $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{v}=2\vec{b}$, намерете $\cos\angle(\vec{u},\vec{v})$.

Решение. Последователно намираме скаларното произведение на векторите $\vec{u}$ и $\vec{v}$, дължините им и косинуса на ъгъла между тях.

$\vec{u}\,\vec{v}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\,2\vec{b}=2\vec{a}\vec{b}+2\vec{b}^{\,2}+2\vec{b}\vec{c}=0+2+0=2$.

$|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}^{\,2}}=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2}=\sqrt{\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}+2\vec{a}\vec{b}+2\vec{a}\vec{c}+2\vec{b}\vec{c}}=\sqrt{1+1+1+0+0+0}=\sqrt{3}$.

$|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}^{\,2}}=\sqrt{(2\vec{b})^2}=\sqrt{4\vec{b}^{\,2}}=2$.

$\cos\angle(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}.2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}.\blacktriangle$

5. Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са база в пространството, като $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=1$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=60°$, $\angle(\vec{b},\vec{c})=90°$, $\angle(\vec{a},\vec{c})=90°$. Да се намери дължината на вектора $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Решение.

1) Определяме скаларните произведения на базисните вектори и записваме резултатите в таблица.

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	4	3	0
$\vec{b}$	3	9	0
$\vec{c}$	0	0	1

2) Пресмятаме
$|\vec{u}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}+2\vec{a}\vec{b}+2\vec{b}\vec{c}+2\vec{a}\vec{c}}=$
$\sqrt{4+9+1+2.3+0+0}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

6. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Да се намери скаларното произведение $\vec{a}\vec{b}$, ако

а) $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=\dfrac{1}{3}$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=30°$;   б) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=45°$;

в) $|\vec{a}|=12$, $|\vec{b}|=5$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=60°$;   г) $|\vec{a}|=\dfrac{3}{2}$, $|\vec{b}|=\dfrac{3}{4}$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=120°$.

7. Да се намери ъгълът между векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако:
а) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\vec{b}=2\sqrt{2}$;   б) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\vec{b}=-5$;

8. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуват ортонормирана база в равнината. Намерете $\vec{u}\vec{v}$, $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ и $\cos\angle(\vec{u},\vec{v})$, ако:

а) $\vec{u}=-\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{v}=\vec{a}-3\vec{b}$;   б) $\vec{u}=\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$ и $\vec{v}=-3\vec{a}-2\vec{b}$;

в) $\vec{u}=\dfrac{2}{3}\vec{a}-2\vec{b}$ и $\vec{v}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+2\vec{b}$.

9. Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуват ортонормирана база в пространството. Намерете $\vec{u}\vec{v}$, $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ и $\cos\angle(\vec{u},\vec{v})$, ако:
а) $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$, $\vec{v}=2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$;   б) $\vec{u}=\vec{b}-2\vec{c}$, $\vec{v}=2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$.

10. За векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от база в пространството е изпълнено $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=2$ $\angle(\vec{a},\vec{b})=90°$, $\angle(\vec{a},\vec{c})=60°$, $\angle(\vec{b},\vec{c})=90°$. Да се намери ъгълът между векторите:
а) $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{v}=\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$;   б) $\vec{u}=\vec{a}+\vec{c}$ и $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$;
в) $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ и $\vec{v}=2\vec{b}+\vec{c}$.

11. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ортонормирана база в равнината. Ако $\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}$ и $\vec{v}=2\vec{u}-\vec{a}-\vec{b}$, то скаларното произведение $\vec{v}\vec{a}$ е равно на:
☒ **А)** -4 **Б)** 1 **В)** 3 **Г)** 5

12. Нека $\vec{a}$ $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са ортонормирана база в пространството и $\vec{m}=x\vec{b}-2\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{n}=y\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c}$. Намерете $\vec{m}\vec{n}$, ако $\vec{m}-\vec{a}=z\vec{c}+\vec{n}$.

13. Нека $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са ортонормирана база в пространството и $\vec{m}=x\vec{a}-3\vec{b}-\vec{c}$ и $\vec{n}=\vec{a}+y\vec{b}$. Ако векторът $\vec{m}+\vec{n}$ е колинеарен с вектора $\vec{c}$, намерете дължината на вектора $\vec{m}-\vec{n}$.

14. Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са ортонормирана база в пространството. Векторите $\vec{m}=(x+1)\vec{a}+(y-1)\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{n}=\vec{a}+\vec{c}$ са перпендикулярни. Намерете дължината на вектор $\vec{u}=2\vec{a}+x\vec{b}$.

15. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са база в равнината, като $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$ и $\angle(a,b)=60°$. Да се намерят дължините на векторите $\vec{m}=x\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{n}=-2\vec{a}+3y\vec{b}$, ако $\vec{m}$ е перпендикулярен на $\vec{a}$ и $\vec{n}$ е перпендикулярен на $\vec{b}$.

1.4. Координати на вектор в равнинна правоъгълна координатна система

1) Правоъгълна координатна система

Определение. Нека върху права е дадена точка O и вектор $\overrightarrow{OE}=\vec{e}$. Казваме, че е определена координатна ос с начало точка O и посока, определена от вектора $\vec{e}$. Означаваме $O\vec{e}$.

Наредена двойка от пресичащи се координатни оси $O\overrightarrow{e_1}$ и $O\overrightarrow{e_2}$ с общо начало O, при което $\overrightarrow{e_1}\perp\overrightarrow{e_2}$ и $|\overrightarrow{e_1}|=|\overrightarrow{e_2}|=1$ се нарича **правоъгълна (декартова или ортогонална) координатна система** в равнината. Оста $O\overrightarrow{e_1}$ се нарича абсцисна ос, оста $O\overrightarrow{e_2}$ – ординатна ос. В координатната система се задава положителна посока на въртене, която е обратна на часовниковата стрелка.

Тъй като координатните оси се пресичат, то векторите $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ са линейно независими и значи образуват база в равнината. Тогава всеки вектор в равнината се представя по единствен начин като тяхна линейна комбинация.

Да отбележим, че по определение базата $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ е ортонормирана.

Нека M е произволна точка в равнината на координатната система. Следователно векторът $\overrightarrow{OM}$ се представя по единствен начин като линейна комбинация на базата:

$$\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}.$$

Наредената двойка числа (x,y) се нарича **координати** на точка M. Записваме $M(x,y)$, като x се нарича абсциса, а y ордината на точката M.

Ще разглеждаме само ортогонални координатни системи. Означаваме $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ или Oxy.

Векторът $\overrightarrow{OM}$ се нарича **радиус вектор** на точката M спрямо координатната система $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$.

2) Координати на вектор

Нека е даден вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ с начална точка $M_1(x_1,y_1)$ и крайна точка $M_2(x_2,y_2)$.

Тогава $\overrightarrow{OM_1}=x_1\overrightarrow{e_1}+y_1\overrightarrow{e_2}$ и $\overrightarrow{OM_2}=x_2\overrightarrow{e_1}+y_2\overrightarrow{e_2}$.

За вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ имаме:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=x_2\overrightarrow{e_1}+y_2\overrightarrow{e_2}-x_1\overrightarrow{e_1}-y_1\overrightarrow{e_2}=(x_2-x_1)\overrightarrow{e_1}+(y_2-y_1)\overrightarrow{e_2}$$

Тъй като представянето на вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ като линейна комбинация на векторите от базата е единствено, то числата (x_2-x_1) и (y_2-y_1) са еднозначно определени и се наричат координати на вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$. Записваме $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$.

Ако означим координатите на вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ с m_x и m_y, т.е. $\overrightarrow{M_1M_2}(m_x,m_y)$, то са изпълнени равенствата:

$$\left|\begin{array}{l} m_x=x_2-x_1 \\ m_y=y_2-y_1 \end{array}\right..$$

Директно от определението за координати на вектор, получаваме следните случаи:

1) Векторите $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ имат координати $\overrightarrow{e_1}(1,0)$, $\overrightarrow{e_2}(0,1)$, защото $\overrightarrow{e_1}=1.\overrightarrow{e_1}+0.\overrightarrow{e_2}$ и $\overrightarrow{e_2}=0.\overrightarrow{e_1}+1.\overrightarrow{e_2}$.

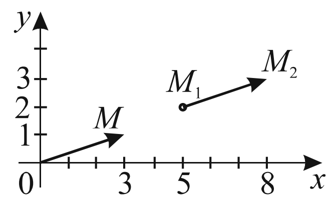
2) Радиус векторът на точка $A(x_a,y_a)$ има координати $\overrightarrow{OA}(x_a,y_a)$.

3) Вектор $\vec{a}$, успореден на абсцисната ос Ox, има координати от вида $\vec{a}(x,\text{const})$.

Вектор $\vec{a}$, успореден на ординатната ос Oy, има координати от вида $\vec{a}(\text{const},\ y)$.

Пример. Геометрична интерпретация на координати на вектор.
Нека $M_1(5,2)$ и $M_2(8,3)$. Тогава $M_1M_2(3,1)$.

Нека точка M има координати $M(3,1)$, значи и радиус векторът $\overrightarrow{OM}$ има координати $\overrightarrow{OM}(3,1)$. Векторите $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ са равни.



1. Да се намерят координатите на вектора $\overrightarrow{AB}$, ако $A(3,-5)$ и $B(4,2)$.

Решение. Нека $\overrightarrow{AB}(x,y)$, тогава $\left| \begin{array}{l} x=4-3=1 \\ y=2-(-5)=7 \end{array} \right. \Rightarrow \overrightarrow{AB}(1,7)$.▲

2. Дадени са вектор $\overrightarrow{AB}(-7,6)$ и точка $A(-1,2)$. Да се намерят координатите на точка B.

Решение. Нека $B(x,y)$, тогава $\left| \begin{array}{l} -7=x-(-1) \\ 6=y-2 \end{array} \right.$, откъдето $\left| \begin{array}{l} x=-8 \\ y=8 \end{array} \right. \Rightarrow B(-8,8)$.▲

3. Да се намерят координатите на вектора $\overrightarrow{AB}$, ако

а) $A(2;3)$, $B(4,5)$; б) $A(-8,-17)$, $B(-2,-1)$;

в) $A(3;-10)$, $B(-4,0)$; г) $A(-5,2)$, $B(-11,-5)$.

4. Дадени са точките $A(1,-3)$, $B(-2,-7)$, $C(5,4)$ и $D(-8,8)$. Да се намерят координатите на векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}$.

5. Даден е вектор $\overrightarrow{AB}(5,-4)$. Да се намерят координатите на точка

а) B, ако $A(-1,3)$; б) A, ако $B(8,-4)$.

6. Даден е триъгълник ABC, за който $A(-1,-1)$, $\overrightarrow{AB}(4,3)$ и $\overrightarrow{CA}(3,-6)$. Намерете координатите на точките B и C и координатите на вектора $\overrightarrow{BC}$.

Действия с вектори

С вектори можем да извършваме три действия:

– събиране на вектори – можем да събираме два и повече вектора;

– умножение на вектор с число;

– скаларно произведение на два вектора – можем да умножаваме скаларно само два вектора.

Действията с вектори можем да извършваме:

– като прилагаме определенията за действията;

– когато векторите са изразени като линейна комбинация на други вектори, което вече сме показали;

– когато векторите са зададени с техните координати, което ще покажем в следващия урок.

1.5. Операции с вектори, зададени с координати

Изучили сме следните операции (действия) с вектори – събиране на вектори, умножение на вектор с число и скаларно произведение на два вектора.

Сега ще покажем как се извършват тези операции, когато векторите са зададени с координатите си спрямо ортогонална координатна система.

Нека $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ е ортогонална координатна система и $\vec{a}(x_a, y_a)$ и $\vec{b}(x_b, y_b)$ са два вектора.

Тогава $\vec{a} = x_a\overrightarrow{e_1} + y_a\overrightarrow{e_2}$ и $\vec{b} = x_b\overrightarrow{e_1} + y_b\overrightarrow{e_2}$.

Събиране на вектори

$\vec{a}+\vec{b} = x_a\overrightarrow{e_1} + y_a\overrightarrow{e_2} + x_b\overrightarrow{e_1} + y_b\overrightarrow{e_2} = (x_a + x_b)\overrightarrow{e_1} + (y_a + y_b)\overrightarrow{e_2}$, т.е. $\vec{a}+\vec{b}(x_a + x_b, y_a + y_b)$.

Да означим с m и n координатите на вектора $\vec{a}+\vec{b}$: $\vec{a}+\vec{b}(m,n)$. Изпълнени са равенствата:

$$\left| \begin{array}{l} m = x_a + x_b \\ n = y_a + y_b \end{array} \right. .$$

Получихме, че сборът на вектори е вектор, чиито координати се получават, като съберем съответните координати на векторите събираеми. Правилото се обобщава за три и повече вектора:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}(x_a + x_b + x_c + x_d,\ y_a + y_b + y_c + y_d)$$

Умножение на вектор с число

Нека $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\alpha\vec{a} = \alpha(x_a\overrightarrow{e_1} + y_a\overrightarrow{e_2}) = \alpha x_a\overrightarrow{e_1} + \alpha y_a\overrightarrow{e_2} \Rightarrow \alpha\vec{a}(\alpha x_a, \alpha y_a)$.

Ако означим координатите на вектора $\alpha\vec{a}$ с m и n, т.е. $\alpha\vec{a}(m,n)$, изпълнени са равенствата:

$$\left| \begin{array}{l} m = \alpha x_a \\ n = \alpha y_a \end{array} \right.$$

Получихме, че произведението на вектор с число е вектор, чиито координати се получават, като умножим с числото съответните координати на дадения вектор.

Тъй като векторът $\alpha\vec{a}$ е колинеарен на $\vec{a}$, това означава, че **координатите на два колинеарни вектора са пропорционални числа.**

Линейна комбинация на вектори

Обобщавайки събирането на вектори и умножението на вектор с число, получаваме, че линейната комбинация на вектори **е вектор**, чиито координати са същата линейна комбинация на съответните координати на участващите вектори:

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}\,(\alpha x_a + \beta x_b + \gamma x_c + \delta x_d,\ \alpha y_a + \beta y_b + \gamma y_c + \delta y_d)$ и ако

векторът $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}(m,n)$, то:

$$\left| \begin{array}{l} m = \alpha x_a + \beta x_b + \gamma x_c + \delta x_d \\ n = \alpha y_a + \beta y_b + \gamma y_c + \delta y_d \end{array} \right. .$$

1. Ако $\vec{a}(2,3)$, $\vec{b}(-3,4)$ и $\vec{c}(-2,-3)$, да се намерят координатите на вектора $\vec{u} = -2\vec{a} + 5\vec{b} - 2\vec{c}$.

Решение. Нека $\vec{u}(x, y)$, тогава $\left| \begin{array}{l} x = -2.2 + 5.(-3) - 2.(-2) \\ y = -2.3 + 5.4 - 2.(-3) \end{array} \right.$, $\left| \begin{array}{l} x = -15 \\ y = 20 \end{array} \right.$, или $\vec{u}(-15, 20)$.▲

2. Дадени са точките $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ и $C(x_c, y_c)$. Да се намерят координатите на

а) средата $M(x_M, y_M)$ на отсечката AB;

б) медицентърът $G(x_G, y_G)$ на ΔABC.

Решение. Векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ имат координати $\overrightarrow{OA}(x_a, y_a)$, $\overrightarrow{OB}(x_b, y_b)$ и $\overrightarrow{OC}(x_c, y_c)$.

а) Тъй като $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, то за координатите на M получаваме

$$\left| \begin{array}{l} x_M = \dfrac{x_a + x_b}{2} \\ y_M = \dfrac{y_a + y_b}{2} \end{array} \right. \quad \text{или} \quad M\left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right).$$

б) От $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, за координатите на G получаваме

$$\left| \begin{array}{l} x_G = \dfrac{x_a + x_b + x_c}{3} \\ y_G = \dfrac{y_a + y_b + y_c}{3} \end{array} \right. \quad \text{или} \quad G\left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_c}{3}\right).\blacktriangle$$

<u>Скаларно произведение на два вектора</u>

По определение за ортогонална координатна система имаме $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$ и $|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = 1$ или $\vec{e_1}^{\,2} = \vec{e_2}^{\,2} = 1$ и $\vec{e_1}\vec{e_2} = 0$. Така за $\vec{a}\vec{b}$ получаваме:

$\vec{a}\vec{b} = (x_a\vec{e_1} + y_a\vec{e_2})(x_b\vec{e_1} + y_b\vec{e_2}) = x_a x_b \vec{e_1}^{\,2} + x_a y_b \vec{e_1}\vec{e_2} + y_a x_b \vec{e_2}\vec{e_1} + y_a y_b \vec{e_2}^{\,2} =$

$= x_a x_b.1 + 0 + 0 + y_a y_b.1 = x_a x_b + y_a y_b$. Получихме:

$$\vec{a}\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b,$$

тоест скаларното произведение на два вектора, записани с техните координати, **е числото**, което се получава като умножим съответните координати на векторите и получените числа съберем.

За скаларния квадрат и за дължината на вектор $\vec{a}$ получаваме:

$$\vec{a}^{\,2} = x_a^{\,2} + y_a^{\,2}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{x_a^{\,2} + y_a^{\,2}}.$$

За косинуса на ъгъла между два вектора имаме:

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_a^{\,2} + y_a^{\,2}}.\sqrt{x_b^{\,2} + y_b^{\,2}}}$$

3. Ако $\vec{a}(3, -5)$ и $\vec{b}(-4, 2)$, да се намерят дължините на дадените вектори, скаларното им произведение и ъгълът между тях.

Решение. Последователно намираме:

$\vec{a}\vec{b} = 3.(-4) + (-5).2 = -22$, $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$; $|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;

$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{-22}{\sqrt{34}.2\sqrt{5}} = -\dfrac{11\sqrt{170}}{170}$.▲

4. Дадени са векторите $\vec{a}(-2,3)$ и $\vec{b}(1,-4)$. Намерете координатите на вектора: $-\vec{a}$, $3\vec{a}$, $-4\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $2\vec{a}-3\vec{b}$.

5. Дадени са векторите $\vec{a}(3,-1)$, $\vec{b}(2,2)$, $\vec{c}(1,3)$ и $\vec{d}(2,-1)$. Да се намерят координатите на вектора:
а) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$; б) $3\vec{c}$; в) $\vec{b}-2\vec{a}+2\vec{d}-2\vec{c}$.

6. Дадени са векторите $\vec{a}(2,2)$ и $\vec{b}(-2,-2)$. Намерете координатите на вектор $\vec{u}=2\vec{a}-2\vec{b}$ и вектор $\vec{v}=2\vec{u}+\vec{b}$.

7. Дадени са векторите $\vec{a}(\alpha+1,3)$ и $\vec{b}(-2,\alpha)$. Намерете координатите на векторите $\vec{m}=-\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{n}=\vec{a}-2\vec{b}$ и $\vec{p}=x\vec{b}$.

8. Ако $\vec{a}(-3,3)$ и $\vec{b}(5,2)$, да се намерят координатите на векторите $\vec{m}=2\vec{a}$, $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{u}=3\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

9. Дадени са векторите $\vec{a}(1,-2)$ и $\vec{b}(2,3)$. Ако векторите $\vec{m}=\vec{a}+x\vec{b}$ и $\vec{c}(1,2)$ са колинеарни, намерете координатите на вектора $3\vec{m}$.

10. Да се намерят дължините на векторите $\vec{a}(2,3)$, $\vec{b}(3,2)$, $\vec{c}(-2,-3)$, $\vec{d}(-3,2)$.

11. Да се намери разстоянието между точките A и B, ако:
а) $A(3,4)$, $B(-1,2)$; б) $A(-1,3)$, $B(-2,2)$; в) $A(2,-4)$, $B(3,0)$.

12. Да се намери скаларното произведение $\vec{a}\vec{b}$, ако:
а) $\vec{a}(1,3)$, $\vec{b}(-2,1)$; б) $\vec{a}(3,\frac{1}{2})$, $\vec{b}(5,4)$; в) $\vec{a}(-1,-1)$, $\vec{b}(3,2)$.

13. Да се намери косинусът на ъгъла между векторите:
а) $\vec{a}(2,1)$ и $\vec{b}(-1,-2)$;
б) $\vec{a}(3,3)$ и $\vec{b}(2,2)$;
в) $\vec{a}(-4,2)$ и $\vec{b}(2,1)$.

14. Дадени са векторите $\vec{a}(3,2)$ и $\vec{b}(-1,1)$. Намерете дължината на векторите $2\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $2\vec{a}-3\vec{b}$.

15. Дадени са векторите $\vec{a}(-2,-1)$ и $\vec{b}(-2,-3)$ и вектор $\vec{m}=x\vec{a}-2\vec{b}$. Ако векторите $\vec{m}+\vec{a}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ са колинеарни, намерете дължината на $\vec{m}+\vec{a}$.

16. Дадени са векторите $\vec{a}(2,3)$ и $\vec{b}(-1,2)$. Да се намери дължината на вектор $\vec{p}=3\vec{a}-\lambda\vec{b}$, ако векторите $\vec{p}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ са перпендикулярни.

17. Върховете на ΔABC имат координати $A(1,1)$, $B(-3,-2)$ и $C(-2,3)$. Да се намерят дължините на страните на триъгълника и ъгълът при върха A.

18. Върховете на ΔABC са $A(4,-1)$, $B(-2,3)$ и $C(2,5)$. Намерете дължините на медианите на ΔABC.

19. Трите върха на успоредник $ABCD$ са $B(3,1)$, $C(7,5)$, $D(2,4)$. Намерете координатите на върха A и дължините на страните на успоредника.

20. Точките $A(1,3)$ и $B(6,0)$ са съседни върхове на успоредник $ABCD$ с пресечна точка на диагоналите $S(5,2)$. Да се намерят другите два върха на успоредника и дължините на диагоналите му.

Тест 1
Вектори и координати

1. Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са линейно зависими, ако:

☒ **А)** $\vec{a} = 2\vec{b}$ **Б)** $\lambda\vec{a} - \mu\vec{b} = \vec{0}$

В) $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$ **Г)** $\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$

2. Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са база в пространството. Изразете чрез базата вектора $\vec{p} = \vec{u} + \vec{v}$, ако $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{c}$ и $\vec{v} = -\vec{b} + 4\vec{c}$.

☒ **А)** $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b} - 3\vec{c}$

Б) $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{c}$

В) $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Г) $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b} + 7\vec{c}$

3. Колко е скаларното произведение на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45°$?

☒ **А)** $1{,}5$ **Б)** 3 **В)** $3\sqrt{6}$ **Г)** 6

4. Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са ортонормирана база в пространството. Ако $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{v} = \vec{b} - \vec{c}$, попълнете празните места, така че равенствата да са верни.

а) $\vec{u}\vec{v}$ = ___________

б) $|\vec{u}|$ = ___________

в) $|\vec{v}|$ = ___________

г) $\cos\angle(\vec{u}, \vec{v})$ = ___________

5. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ортонормирана база в равнината. Ако $\vec{m} = \vec{a} - 3\vec{b}$ и $\vec{n} = 2\vec{b} - 2\vec{m}$, скаларното произведение $\vec{b}\vec{n}$ е равно на:

☒ А) 2 Б) 4 В) 6 Г) 8

6. Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са ортонормирана база в пространството. Ако $\vec{m} = \vec{a} - \vec{c} + 3\vec{b}$, намерете $\cos\angle(\vec{m}, \vec{c})$.

☒ А) $\sqrt{10}$ Б) $\sqrt{11}$ В) $-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ **Г)** $-\dfrac{\sqrt{11}}{11}$

7. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуват база в равнината, като $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 2$ и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Ако $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$, попълнете празните места, така че равенствата да са верни.

а) $\vec{u}\vec{v}$ = ___________

б) $|\vec{u}|$ = ___________

в) $|\vec{v}|$ = ___________

г) $\cos\angle(\vec{u}, \vec{v})$ = ___________

8. Дадени са векторите $\vec{a}(2, -1)$, $\vec{b}(-2, 3)$ и $\vec{c}(1, 1)$. Попълнете празните места, така че твърденията да са верни.

а) Координатите на вектора $\vec{a} + \vec{b}$ са ___________.

б) Координатите на вектора $4\vec{b}$ са ___________.

в) Координатите на вектора $\vec{b} - 3\vec{c}$ са ___________.

г) Координатите на вектора $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ са ___________.

Тест 2
Вектори и координати

1. Ако векторите е $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими, $\vec{m} = 2\vec{a} + \lambda\vec{b}$, $\vec{n} = \lambda\vec{a} + \frac{1}{2}\mu\vec{b}$ и $\vec{m} + 2\vec{n} = \vec{0}$, то λ и μ са равни съответно на:

☒ **А)** $-1; -1$ **Б)** $-1; 1$ **В)** $1; -1$ **Г)** $1; 1$

2. Колко е косинусът на ъгъла между векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако $|\vec{a}| = 3\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{6}$ и $\vec{a}\vec{b} = 4$?

☒ **А)** $\frac{\sqrt{2}}{9}$ **Б)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **В)** $\frac{2\sqrt{6}}{9}$ **Г)** $\frac{2}{9}$

3. Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са база в пространството, като $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 1$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 90°$, $\angle(\vec{b},\vec{c}) = 60°$ и $\angle(\vec{a},\vec{c}) = 30°$. Попълнете празните места, така че твърденията да са верни.

а) Дължината на вектора $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ е __________.

б) Скаларното произведение на векторите $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ е__________.

4. Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са ортонормирана база в пространството. Намерете скаларното произведение $\vec{c}\vec{u}$, където $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$.

☒ **А)** 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

5. Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са ортонормирана база в пространството. Намерете скаларното произведение $\vec{u}\vec{v}$, където $\vec{u} = -\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{v} = 2\vec{b} + \vec{c}$.

☒ **А)** -3
Б) -2
В) -1
Г) 3

6. Ако $A(-3, -2)$ и $B(1, 4)$, то координатите на вектора $\overrightarrow{AB}$ са:

☒ **А)** $(-2, -2)$
Б) $(-2, 2)$
В) $(4, 6)$
Г) $(4, 2)$

7. Дадени са вектор $\overrightarrow{AB}(-2, 1)$ и точка $A(4, 5)$. Координатите на точка B са:

☒ **А)** $(2, 4)$
Б) $(2, 6)$
В) $(-2, 6)$
Г) $(-2, -4)$

8. Дадени са векторите $\vec{a}(3, 4)$ и $\vec{b}(2, 1)$. Попълнете празните места, така че твърденията да са верни.

а) Скаларното произведение $\vec{a}\vec{b}$ е равно на __________.

б) Дължината на вектора $\vec{a}$ е равна на __________.

в) Дължината на вектора $\vec{b}$ е равна на__________.

г) Косинусът на $\angle(\vec{a},\vec{b})$ е равен на __________.

2. Аналитична геометрия в равнината

2.1. Уравнение на права

1) Общо уравнение на права

Всяка права в равнината може да бъде определена с две точки от нея или с точка и колинеарен вектор. Сега ще покажем, че за всяка права съществуват числа A, B и C, такива че координатите на точките от правата удовлетворяват уравнението $Ax+By+C=0$.

Теорема. Ако g е произволна права в равнината, съществуват числа A, B и C, така че координатите x и y на всяка точка $M(x,y)$ от g удовлетворяват уравнението

$$Ax+By+C=0, \qquad (1)$$

където поне едно от числата A и B е различно от 0, т.е. $|A|+|B|\neq 0$.

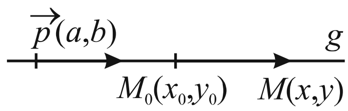
Доказателство.

Нека правата g е определена с точка $M_0(x_0,y_0)$ и колинеарен вектор $\vec{p}(a,b)\neq\vec{0}$ и нека (за определеност) $a\neq 0$.

Ако $M(x,y)$ е произволна точка от правата, върху g е определен векторът $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0,\,y-y_0)$ (виж чертежа).

Векторите $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{p}$ са колинеарни $\Rightarrow$ координатите им са пропорционални, имаме:

$$\left|\begin{array}{l} x-x_0=\lambda a \\ y-y_0=\lambda b \end{array}\right. ; \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{x-x_0}{a} \quad \text{и} \quad y-y_0=\frac{x-x_0}{a}b \quad \Leftrightarrow$$



$bx-bx_0=ay-ay_0 \quad \Leftrightarrow \quad bx-ay+ay_0-bx_0=0$, с което получихме уравнение от вида $Ax+By+C=0$, където сме означили $A=b$, $B=-a$, $C=ay_0-bx_0$ и е изпълнено $|A|+|B|=|b|+|-a|\neq 0$, защото $\vec{p}\neq\vec{0}$.

И така, получихме, че координатите на точките от правата g удовлетворяват уравнение от вида $Ax+By+C=0$, $|A|+|B|\neq 0$, което и трябваше да докажем.▲

Може да се докаже, че всяко уравнение от вида (1) е уравнение точно на една права в равнината. Ако две уравнения са еквивалентни, те задават една и съща права.

Уравнението $Ax+By+C=0$ се нарича **общо уравнение** на права в равнината.

Ако $A=0$, уравнението на правата е $y=-\dfrac{C}{B}$ или $y=b=\text{const}$, което е уравнение на права, успоредна на абсцисната ос Ox.

Ако $B=0$, уравнението на правата е $x=-\dfrac{C}{A}$ или $x=a=\text{const}$, което е уравнение на права, успоредна на ординатната ос Oy.

Ако $C=0$, уравнението на правата е $y=ax$, което е уравнение на права, минаваща през координатното начало $O(0,0)$.

От доказателството следва, че

векторът $\vec{p}(-B,A)$ е колинеарен на правата $g: Ax+By+C=0$.

1. Дадена е права $g:\ 2x-3y+5=0$. Вектор, колинеарен на правата, има координати:

☒ **А)** $(-3,-2)$ **Б)** $(-3,2)$ **В)** $(3,-2)$ **Г)** $(3,2)$

2. Намерете общото уравнение на права, определена от колинеарен вектор и точка, ако:

а) $\vec{p}(-2,-1)$, $M_0\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$;

б) $\vec{p}(1,3)$, $M(1,3)$; в) $\vec{p}(2,1)$, $M(1,1)$;

г) $\vec{p}(3,0)$, $M(2,1)$; д) $\vec{p}(0,2)$, $M(3,1)$.

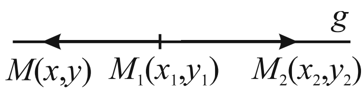
Решение. а) Ако $g: Ax+By+C=0$, то $\vec{p}(-2,-1)=\vec{p}(-B,A) \Rightarrow -2=-B$ и $-1=A \Rightarrow g: -x+2y+C=0$.

От условието, че M_0 лежи на правата, намираме C: $-0+2.\dfrac{1}{2}+C=0$, $C=-1$.

Окончателно $g: -x+2y-1=0$.▲

2) Уравнение на права през две точки.

Нека правата g е определена от точките $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. Тогава векторът $\vec{p}=\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1)$ е колинеарен с g.



Ако $M(x,y)$ е произволна точка от правата,

то векторът $\overrightarrow{M_1M}(x-x_1,y-y_1)$ също е колинеарен с g, което означава, че векторите $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ имат пропорционални координати: $\left|\begin{array}{l} x-x_1=\lambda(x_2-x_1) \\ y-y_1=\lambda(y_2-y_1) \end{array}\right.$. Откъдето намираме

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},\quad x_2\neq x_1,\ y_2\neq y_1 \qquad \text{или} \qquad y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),\quad x_2\neq x_1.$$

Всяко от горните уравнения се нарича **уравнение на права през две точки, неуспоредна на ординатната ос**.

Ако $x_2=x_1=a$, правата е успоредна на ординатната ос Oy и уравнението ѝ е $x=a$.

Ако $y_2=y_1=b$, правата е успоредна на абсцисната ос Ox и уравнението ѝ е $y=b$.

3. Напишете уравнението на права, определена от точките:

а) $M_1(1,3)$ и $M_2(-3,2)$; б) $M_1(-3,4)$ и $M_2(-3,-7)$; в) $M_1(5,2)$ и $M_2(-3,2)$.

Решение. а) Използваме уравнение на права, записано във вида $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Имаме $\dfrac{x-1}{-3-1}=\dfrac{y-3}{2-3} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y-3}{-1} \Leftrightarrow x-4y+11=0$, което е търсеното уравнение.

Задачата може да решим и като използваме уравнение на права, записано във вида $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$. Тогава $y-3=\dfrac{2-3}{-3-1}(x-1) \Leftrightarrow x-4y+11=0$.

б) Абсцисите на двете точки са равни. Уравнението на правата е $x=-3$. Правата е успоредна на ординатната ос Oy.

в) Ординатите на двете точки са равни. Уравнението на правата е $y=2$. Правата е успоредна на абсцисната Ox.▲

3) Декартово уравнение на права

а) Определение

Нека в равнината е дадена права, неуспоредна на ординатната ос Oy. Тя, както знаем, има общо уравнение, в което $B \neq 0$ и нека запишем общото ѝ уравнение във вида

$$y = k\,x + b\,.$$

Това уравнение се нарича **декартово уравнение** на права. Коефициентът k се нарича **ъглов коефициент**.

б) Получаване на декартовото уравнение в зависимост от начина на задаване на правата

Правата е зададена с две точки

Нека в равнината е дадена правоъгълна координатна система Oxy и права g, която не е успоредна на оста Oy, зададена с точките $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Уравнението на правата е: $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, $x_2 \neq x_1$.

Представяме това уравнение в търсения вид

$y = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + y_1 - \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1$ и означаваме $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ и $b = y_1 - \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1$.

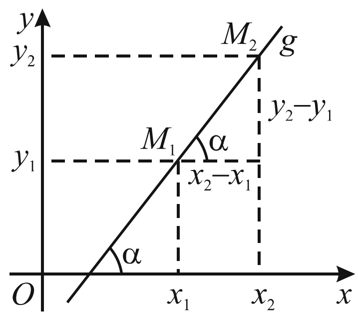
Така получаваме уравнението $y = k\,x + b$, което е декартовото уравнение на правата и за ъгловия коефициент получихме $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Това представяне ни дава следното тълкуване на ъгловия коефициент.

Нека правата g сключва ъгъл α с положителната посока на оста Ox.

Тогава (виж чертежа) $k = \operatorname{tg}\alpha$, защото $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Така показахме, че ъгловият коефициент на права, неуспоредна на Oy, е равен на тангенса на ъгъла, който правата сключва с положителната посока на оста Ox.



Правата е зададена с ъглов коефициент и точка

Ако правата е зададена с ъглов коефициент k и точка $M_1(x_1, y_1)$, уравнението ѝ е $y - y_1 = k(x - x_1)$, $y = k(x - x_1) + y_1$.

На практика записваме декартовото уравнение $y = k\,x + b$, в което неизвестния коефициент b определяме от условието правата да минава през дадената точка.

Правата е зададена с общо уравнение

Нека правата е зададена с общото си уравнение $Ax + By + C = 0$

За да получим декартовото уравнение преобразуваме общото уравнение и получаваме $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$, $B \neq 0$, откъдето намираме, че $k = -\dfrac{A}{B}$.

Обърнете внимание

Правите, които са успоредни на оста Oy и самата ос Oy ($B = 0$), не притежават декартово уравнение. Общото уравнение на такава права е $x = a$.

4. Намерете декартовото уравнение на права и намерете ъгловия ѝ коефициент, ако правата е зададена с:

а) общо уравнение $1{,}5x-3y+6=0$

б) две точки $M_1(-3,1)$ и $M_2(2,-1)$;

Решение. а) Преобразуваме общото уравнение на правата до декартово:

$$1{,}5x-3y+6=0 \;\Leftrightarrow\; y=\frac{1{,}5}{3}x+\frac{6}{3} \;\Leftrightarrow\; y=0{,}5x+2, \quad k=0{,}5.$$

б) Записваме уравнението на права през две точки и преобразуваме:

$$\frac{x+3}{2+3}=\frac{y-1}{-1-1} \;\Leftrightarrow\; \frac{x+3}{5}=\frac{y-1}{-2} \;\Leftrightarrow\; 2x+5y+1=0 \;\Leftrightarrow\; y=-\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}, \quad k=-\frac{2}{5}.$$

Задачата можем да решим и като запишем уравнението:

$$y-1=\frac{-1-1}{2-(-3)}(x-(-3)) \;\Leftrightarrow\; y=-\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}, \quad k=-\frac{2}{5}.▲$$

5. Намерете уравнението на права с ъглов коефициент -3 и минаваща през точката $M(1,2)$.

Решение. Декартовото уравнение на правата е $y=-3x+b$. Коефициента b определяме от условието, че правата минава през точката $M(1,2)$: $2=-3.1+b$, $b=5$.

Декартовото уравнение на правата е $y=-3x+5$, а общото ѝ уравнение е $3x+y-5=0$. ▲

6. Намерете общото уравнение на права, минаваща през точка M и колинеарна с вектор $\vec{p}$, ако

а) $\overrightarrow{p}(-3,2)$, $M(1,0)$; б) $\overrightarrow{p}(3,\frac{1}{2})$, $M(1,2)$; в) $\overrightarrow{p}(4,0)$, $M(3,2)$;

г) $\overrightarrow{p}(0,2)$, $M(-1,1)$; д) $\vec{p}(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$, $M(2,1)$; е) $\vec{p}(2,-5)$, $M(-2,5)$.

7. Напишете общото уравнение на права през точките A и B, ако

а) $A(3,-4), B(1,2)$; б) $A(-2,1), B(3,3)$; в) $A(-4,-5), B(-4,2)$;

г) $A(2,3), B(3,3)$; д) $A(5,0), B(0,2)$; е) $A(0,-3), B(3,0)$.

8. Напишете декартово уравнение на права, определена с ъглов коефициент k и точка A, ако

а) $k=-3, A(1,2)$; б) $k=\frac{1}{2}, A(0,2)$; в) $k=-\frac{2}{3}, A(3,2)$;

г) $k=5, A(3,3)$; д) $k=-4, A(-1,-1)$.

9. Напишете общото уравнение на права, която сключва ъгъл φ с положителната посока на Ox и минаваща през точка A, ако

а) $\varphi=30°$, $A(\sqrt{3},-2)$; б) $\varphi=45°$, $A(1,-2)$; в) $\varphi=60°$, $A(-3,1)$;

г) $\varphi=120°$, $A(2,2)$; д) $\varphi=135°$, $A(-2,1)$; е) $\varphi=150°$, $A(1,1)$;

ж) $\varphi=0°$, $A(3,-3)$.

10. Дадена е права с общо уравнение $5x-8y-2=0$. Декартовото уравнение на тази права е:

☒ **А)** $y=5x-2$ **Б)** $8y=5x-2$ **В)** $y=\frac{5x}{8}-\frac{1}{4}$ **Г)** $y=\frac{5x-2}{8}$

11. Дадена е права с декартово уравнение $y=3x-1$. Общото уравнение на тази права е:

☒ **А)** $x=\frac{y}{3}+\frac{1}{3}$ **Б)** $3x-y-1=0$ **В)** $3x=y+1$ **Г)** $x=\frac{y+1}{3}$

12. Уравнение на права, минаваща през точките $A(2;-3)$ и $B(4;5)$ се намира от равенството:

☒ **А)** $\frac{x-2}{4-2}=\frac{y+3}{5+3}$ **Б)** $\frac{x-2}{y+3}=\frac{-3-2}{5-4}$ **В)** $\frac{x-2}{-3-2}=\frac{y-5}{5-4}$ **Г)** $\frac{x-2}{4-2}=\frac{y+3}{5+3}$

13. Общото уравнение на права през точките $A(5;1)$ и $B(6;3)$ е:

☒ **А)** $y=2x-9$ **Б)** $x-5=\frac{y-1}{2}$ **В)** $11x+4y-10=0$ **Г)** $2x-y-9=0$

14. Начертайте на една и съща координатна система правите:

$a:\ y=\frac{x}{2}$ $b:\ y=x$ $c:\ y=2x$

$d:\ y=-2x$ $e:\ y=-x$ $f:\ y=-\frac{x}{2}$

15. Начертайте на една и съща координатна система правите:

$a:\ y=x$ $b:\ y=x+2$ $c:\ y=x-2$

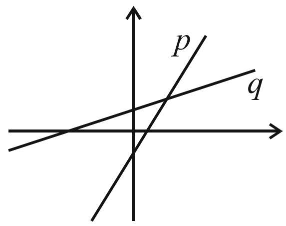
$d:\ y=-x$ $e:\ y=-x+2$ $f:\ y=-x-2$

16. Ъгловият коефициент на правата $q:\ y=4x-1$ е:

☒ **А)** -4 **Б)** -1 **В)** 3 **Г)** 4

17. Дадени са правите $p:\ y=ax+b$ и $q:\ y=cx+d$, разположени, както е показано на чертежа. За ъгловите им коефициенти a и c е изпълнено:

☒ **А)** $a>c$
Б) $a<c$
В) $a=c$
Г) $a=-c$



18. Ъгълът между правата $p:\ y=\sqrt{3}x-5$ и абсцисната ос е:

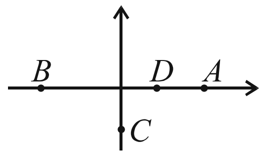
☒ **А)** 30° **Б)** 45° **В)** 60° **Г)** 135°

19. Да се намери ъгълът между права, минаваща през точките $P(3;10)$ и $Q(-5;2)$ и положителната посока на абсцисната ос.

☒ **А)** 30° **Б)** 45° **В)** 60° **Г)** 120°

20. Точките A, B, C и D са разположени върху координатните оси, както е показано на чертежа. От всички прави, минаващи през 2 от дадените точки коя е с най-голям ъглов коефициент?

☒ **А)** AC
Б) CD
В) CB
Г) AB



21. Коя от правите сключва най-малък ъгъл с положителната посока на абсцисната ос?

☒ **А)** $x+y+1=0$ **Б)** $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-\frac{1}{2}=0$ **В)** $-x+10y-15=0$ **Г)** $-5x-y-2=0$

2.2. Взаимно положение на две прави

Дадени са две прави в равнината, никоя от които не е успоредна на координатните оси, с общи уравнения:

$$g_1: \ A_1x + B_1y + C_1 = 0 \ ,$$
$$g_2: \ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \ .$$

Теорема 1. Правите g_1 и g_2

а) **се пресичат** точно когато съответните им коефициенти пред x и y не са пропорционални, т.е. $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$;

б) **са успоредни** точно когато съответните им коефициенти пред x и y са пропорционални, но не са пропорционални на съответните свободни членове, т.е. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$;

в) **съвпадат** точно когато съответните им коефициенти са пропорционални, т.е. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Доказателство. Векторите $\overrightarrow{p_1}(-B_1, A_1)$ и $\overrightarrow{p_2}(-B_2, A_2)$ са колинеарни съответно на g_1 и g_2. Правите g_1 и g_2 са успоредни или съвпадат точно когато $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{p_2}$ са колинеарни, условието за което е координатите им да са пропорционални: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \ (= \rho \neq 0)$. Като вземем предвид, че правите се пресичат точно когато $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{p_2}$ са неколинеарни, получаваме, че е в сила твърдение а) на теоремата.

Нека g_1 и g_2 са успоредни или съвпадат, следователно $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{p_2}$ са колинеарни, т.е. съществува число ρ, за което са изпълнени и двете равенства $A_1 = \rho A_2$ и $B_1 = \rho B_2$.

Уравнението на g_1 приема вида $g_1: \ \rho(A_2x + B_2y) + C_1 = 0$, откъдето $A_2x + B_2y = -\dfrac{C_1}{\rho}$.

От уравнението на правата g_2 имаме $A_2x + B_2y = -C_2$.

Ако правите съвпадат, то $-\dfrac{C_1}{\rho} = -C_2 \ \Leftrightarrow \ C_1 = \rho C_2$, а ако не съвпадат $C_1 \neq \rho C_2$.

Обратно, ако всички коефициентите на двете прави са пропорционални, то правите имат еквивалентни уравнения и значи съвпадат. Ако са пропорционални само коефициентите пред x и y, то колинеарните вектори на правите ще бъдат колинеарни помежду си и значи правите са успоредни, но няма да съвпадат, защото третите им коефициенти не са пропорционални.▲

Ако правите g_1 и g_2 не са успоредни на Oy, те притежават декартови уравнения и ъглови коефициенти $k_1 = -\dfrac{A_1}{B_1}$ и $k_2 = -\dfrac{A_2}{B_2}$ ($B_1 \neq 0, \ B_2 \neq 0$). В сила е следната теорема.

Теорема 2. Две прави g_1 и g_2 (неуспоредни на Oy) с ъглови коефициенти k_1 и k_2 са:

а) **успоредни (или съвпадат)** точно когато $k_1 = k_2$;

б) **перпендикулярни** точно когато $k_1k_2 = -1$.

Доказателство. а) От Теорема 1 правите са успоредни (съвпадат) точно когато

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \ \Leftrightarrow \ \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \ \Leftrightarrow \ k_1 = k_2 .$$

б) Нека векторите, колинеарни с g_1 и g_2, са съответно $\overrightarrow{p_1}(-B_1, A_1)$ и $\overrightarrow{p_2}(-B_2, A_2)$. Правите са перпендикулярни точно когато $\overrightarrow{p_1} \perp \overrightarrow{p_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1}\,\overrightarrow{p_2} = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ (в последното равенство сме използвали формулата за скаларното произведение, когато векторите са зададени с техните координати).

Да разделим последното равенство с $B_1B_2 \neq 0$. Получаваме $\dfrac{A_1A_2}{B_1B_2} + 1 = 0 \Leftrightarrow k_1k_2 = -1$.▲

Нека правите g_1 и g_2 се пресичат и ъгълът между тях е φ. Тогава ъгълът между колинеарните им вектори $\overrightarrow{p_1}(-B_1, A_1)$ и $\overrightarrow{p_2}(-B_2, A_2)$ също е φ и следователно $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{p_1}\,\overrightarrow{p_2}}{|\overrightarrow{p_1}||\overrightarrow{p_2}|}$.

Като използваме формулата за скаларното произведение на два вектора, зададени с координати и за дължините им, окончателно получаваме **формула за косинуса на ъгъла между две прави**:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Да отбележим, че две прави сключват два ъгъла, които се допълват до $180°$.

1. Определете взаимното положение на двойката прави, зададени с уравненията. Ако правите се пресичат, намерете пресечната им точка и косинуса на ъгъла между тях.

а) $3x + 2y - 7 = 0$ и $x + y - 3 = 0$;

б) $2x - 3y + 6 = 0$ и $y = \dfrac{2}{3}x + 2$;

в) $x - y - 2 = 0$ и $7x - 2y + 1 = 0$;

г) $5x - 9y + 7 = 0$ и $15x - 27y + 7 = 0$.

Решение. а) Пресечната точка на двете прави е решение на системата, образувана от уравненията на правите:

$\begin{vmatrix} 3x + 2y - 7 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{vmatrix}$. Умножаваме второто уравнение по -2 и го прибавяме към първото. След опростяване получаваме $x - 1 = 0$ или $x = 1$ и $y = 2$. Правите се пресичат и точката с координати $(1, 2)$ е пресечната им точка.

За косинуса на ъгъла φ между тях получаваме

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{3.1 + 2.1}{\sqrt{9+4}.\sqrt{1+1}} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

б) Уравнението на втората права е $y = \dfrac{2}{3}x + 2 \Leftrightarrow 2x - 3y + 6 = 0$, следователно правите съвпадат.

в) Имаме $\begin{vmatrix} x - y - 2 = 0 \\ 7x - 2y + 1 = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow x = -1,\ y = -3$. Точката $(-1, -3)$ е пресечната точка на правите.

Косинусът на ъгъла между правите е равен на $\cos\varphi = \dfrac{7+2}{\sqrt{1+1}.\sqrt{49+4}} = \dfrac{9\sqrt{106}}{106}$.

г) За коефициентите на двете прави имаме $\dfrac{5}{15} = \dfrac{-9}{-27} = \dfrac{1}{3} \neq \dfrac{7}{7}$. Правите са успоредни.▲

2. Намерете уравнение на права g, която минава през точка $M(5,1)$ и е перпендикулярна на права p с уравнение $5x-3y+15=0$.

Решение. Постъпваме по следния начин:

1) намираме ъгловия коефициент k_p на дадената права p;

2) намираме ъгловия коефициент k_g на търсената права g от условието за перпендикулярност на две прави $k_p k_g=-1$;

3) записваме уравнението на права, определена от ъглов коефициент k_g и точка $M(5,1)$.

От уравнението на правата p намираме $k_p=\frac{5}{3}$. От $p\perp g \quad \Rightarrow \quad k_p k_g=-1 \quad \Rightarrow \quad k_g=-\frac{3}{5}$.

Тогава $g:\ y=-\frac{3}{5}x+b$ и от условието $M(5,1)\in g$ намираме b, $1=-\frac{3}{5}.5+b$, $b=4$

$\Rightarrow \ g:\ y=-\frac{3}{5}x+4$. Общото уравнение на правата е $3x+5y-20=0$.▲

3. Да се намери разстоянието от точка $A(1;-3)$ до правата $p:3x+4y-16=0$.

Решение. Ще постъпим по следния начин – намираме пресечната точка на правата p и права g, която е перпендикулярна на p и минава през точката A, след което намираме разстоянието между A и намерената пресечна точка.

Решението извършваме в няколко стъпки:

1) Намираме права $g:\ y=kx+b$, $g\perp p$ и $A\in g$ (както при решението на задача 2).

Имаме $k_p=-\frac{3}{4}$ и от условието $k_p k=-1$, $k=\frac{4}{3}$ и значи $g:\ y=\frac{4}{3}x+b$.

От условието $A(1,-3)\in g$ намираме $b=-\frac{13}{3}$, окончателно $g:\ 4x-3y-13=0$.

2) Намираме пресечната точка B на правите p и g, като решим системата $\left|\begin{array}{l}3x+4y-16=0\\4x-3y-13=0\end{array}\right.$, чието решение е $x=4,\ y=1 \quad \Rightarrow \quad B(4,1)$.

3) Намираме разстоянието между точките $A(1;-3)$ и $B(4,1)$.

$|AB|=\sqrt{(4-1)^2+(1+3)^2}=5$. Търсеното разстояние е 5.▲

4. Определете взаимното положение на двойката прави. Ако правите се пресичат, намерете пресечната им точка и косинуса на ъгъла между тях.

а) $2x-y+7=0$ и $4x+y+1=0$;

б) $6x+3y-1=0$ и $x=2y$;

в) $2x-3y=17$ и $y=\frac{2}{3}x+1$;

г) $4x+y-1=0$ и $y=\frac{4}{3}x+1$.

5. Намерете права g, която е перпендикулярна на правата g_1 и минава през точка A, ако

а) $g_1:\ 2x-3y+1=0,\ \ A(2,1)$;

б) $g_1:\ x-y+3=0,\ \ A(1,3)$;

в) $g_1:\ -4x+5y+10=0,\ \ A\left(\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right)$;

г) $g_1: \quad x-4y+11=0, \quad A\left(\frac{1}{2},3\right)$;

д) $g_1: \quad 2x+y-2=0, \quad A(-3,-2)$.

6. Намерете права g, която е успоредна на g_1 и минава през точка A, ако

а) $g_1: \quad 3x+4y-5=0, \quad A(1,1)$;

б) $g_1: \quad -2x+y+3=0, \quad A\left(1,\frac{1}{2}\right)$;

в) $g_1: \quad 2x-\frac{1}{2}y+2=0, \quad A(1,2)$.

7. Да се намери разстоянието от точка A до правата g, ако

а) $A(1,2), \ g: \quad x-3y+2=0$;

б) $A(-1,1), \ g: \quad 2x-2y+1=0$;

в) $A(2,3), \ g: \quad x+3y-2=0$.

8. Дадени са правите

$$a: \ y=2x+3,$$
$$b: \ y=-2x-1,$$
$$c: \ y=-\frac{x}{2}-2,$$
$$d: \ y=-\frac{x}{2}+7.$$

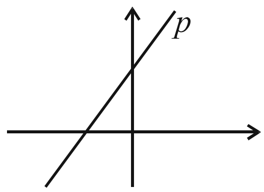
В кой случай и двете твърдения са верни?

☒ **А)** $a \parallel b$ и $a \perp c$ **Б)** $c \parallel d$ и $a \perp c$ **В)** $c \parallel d$ и $a \perp b$ **Г)** $b \parallel d$ и $a \perp d$

9. Да се намери разстоянието от точка A до правата p, ако:

а) $A(1;-2)$ и $p: 4x-3y+15=0$;

б) $A(-2;-4)$ и $p: 9x+3y-30=0$.



10. На чертежа е дадена правата $p: \ y=ax+b$.

а) Начертайте правите $r: \ y=ax$ и $q: \ y=b$.

б) Намерете координатите на пресечната точка M на правите r и q от а).

11. Намерете уравнението на права, която минава през точката $A(-1,5;2)$ и е успоредна на:

а) $5x-6y+7=0$;

б) $3x-2y+2=0$.

12. Намерете уравнението на права, която минава през пресечната точка на правите $3x+3y-5=0$ и $2x-3y-25=0$ и е успоредна на:

а) правата $7x-5y-2=0$;

б) оста Ox;

в) оста Oy.

2.3. Приложение на векторите и аналитичната геометрия за решаване на триъгълник

1. Дадени са точките $A(-1;-1)$, $B(4;1)$ и $C(-2;3)$. За триъгълник ABC да се намерят:

а) координатите на медицентъра G;

б) координатите на средите M_a, M_b и M_c съответно на страните BC, AC и AB;

в) уравненията на правите a, b и c, на които лежат съответно страните BC, AC и AB на триъгълника;

г) уравненията на правите m_a, m_b и m_c, на които лежат медианите съответно от връх A, B и C;

д) уравненията на правите h_a, h_b и h_c, на които лежат височините съответно от връх A, B и C;

е) координатите на H_a, H_b и H_c на петите на височините съответно от връх A, B и C;

ж) периметърът на ΔABC;

з) лицето на ΔABC.

Решение.

а) $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$, $G\left(\dfrac{-1+4-2}{3};\dfrac{-1+1+3}{3}\right)$, $G\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

б) M_a – среда на отсечка BC $\Rightarrow$ $M_a\left(\dfrac{x_B+x_C}{2};\dfrac{y_B+y_C}{2}\right)$, $M_a\left(\dfrac{4-2}{2};\dfrac{1+3}{2}\right)$, $M_a(1;2)$,

M_b – среда на отсечка AC $\Rightarrow$ $M_b\left(\dfrac{x_A+x_C}{2};\dfrac{y_A+y_C}{2}\right)$, $M_b\left(\dfrac{-1-2}{2};\dfrac{-1+3}{2}\right)$, $M_b(-\dfrac{3}{2};1)$,

M_c – среда на отсечка AB $\Rightarrow$ $M_c\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$, $M_c\left(\dfrac{-1+4}{2};\dfrac{-1+1}{2}\right)$, $M_c(\dfrac{3}{2};0)$.

в) $a\equiv BC:\ \dfrac{x-x_B}{x_C-x_B}=\dfrac{y-y_B}{y_C-y_B}$, $\dfrac{x-4}{-2-4}=\dfrac{y-1}{3-1}$, $a:\ x+3y-7=0$,

$b\equiv AC:\dfrac{x-x_A}{x_C-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_C-y_A}$, $\dfrac{x+1}{-2+1}=\dfrac{y+1}{3+1}$, $b:\ 4x+y+5=0$,

$c\equiv AB:\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$, $\dfrac{x+1}{4+1}=\dfrac{y+1}{1+1}$, $c:\ 2x-5y-3=0$.

г) m_a – права през точките $A(-1;-1)$ и $M_a(1;2)$, т.е. $m_a:\ \dfrac{x-x_{M_a}}{x_A-x_{M_a}}=\dfrac{y-y_{M_a}}{y_A-y_{M_a}}$,

$\Rightarrow$ $m_a:\ 3x-2y+1=0$,

m_b – права през точките $B(4;1)$ и $M_b(-\dfrac{3}{2};1)$, т.е. $m_b:\ \dfrac{x-x_B}{x_{M_b}-x_B}=\dfrac{y-y_B}{y_{M_b}-y_B}$, но в този случай не може да използваме това уравнение, защото $y_{M_b}=y_B=1$ и $y_{M_b}-y_B=0$.

Точките имат равни ординати и уравнението на правата е $m_b:\ y=1$.

m_c – права през точките $C(-2;3)$ и $M_c(\frac{3}{2};0)$, $\Rightarrow$ $m_c:\ 6x+7y-9=0$.

д) Правата h_a, на която лежи височината от върха A, намираме като права, перпендикулярна на правата a и минаваща през точката A.

Правата a има уравнение $a:\ x+3y-7=0$, точката A е с координати $A(-1;-1)$ и както в задача 2 от предходния урок намираме $h_a:\ 3x-y+2=0$.

Аналогично намираме $h_b:\ x-4y=0$ и $h_c:\ 5x+2y+4=0$.

е) За намиране на координатите на петата на височината от върха A:

$H_a=h_a\cap a$

$\begin{matrix} h_a: \\ a: \end{matrix}\left|\begin{matrix} 3x-y+2=0 \\ x+3y-7=0 \end{matrix}\right.$ решението на системата е $\left(\frac{1}{10};\frac{23}{10}\right)$ $\Rightarrow$ $H_a\left(\frac{1}{10};\frac{23}{10}\right)$,

За намиране на координатите на петата на височината от върха B:

$H_b=h_b\cap b$

$\begin{matrix} h_b: \\ b: \end{matrix}\left|\begin{matrix} x-4y=0 \\ 4x+y+5=0 \end{matrix}\right.$ решението на системата е $\left(-\frac{20}{17};-\frac{5}{17}\right)$ $\Rightarrow$ $H_b\left(-\frac{20}{17};-\frac{5}{17}\right)$,

За намиране на координатите на петата на височината от върха C:

$H_c=h_c\cap c$

$\begin{matrix} h_c: \\ c: \end{matrix}\left|\begin{matrix} 5x+2y+4=0 \\ 2x-5y-3=0 \end{matrix}\right.$ решението на системата е $\left(-\frac{14}{29};-\frac{23}{29}\right)$ $\Rightarrow$ $H_c\left(-\frac{14}{29};-\frac{23}{29}\right)$.

ж) $|c|=|AB|=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{(-1-4)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$,

$|a|=|BC|=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_c)^2}=\sqrt{(4+2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{36+4}=2\sqrt{10}$,

$|b|=|AC|=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}=\sqrt{(-1+2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$,

$P_{ABC}=\sqrt{29}+2\sqrt{10}+\sqrt{17}$.

з) $|a|=2\sqrt{10}$, $|h_a|=|AH_a|=\sqrt{\left(\frac{1}{10}+1\right)^2+\left(\frac{23}{10}+1\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{11}{10}\right)^2+\left(\frac{33}{10}\right)^2}=\frac{11\sqrt{10}}{10}$

$\Rightarrow$ $S_{ABC}=\frac{|a|.|h_a|}{2}=\frac{2\sqrt{10}.11\sqrt{10}}{2.10}=11.$▲

2. Дадени са точките $A(2;1)$, $B(8;1)$ и $C(5;2)$. За триъгълник ABC да се намерят:

а) координатите на медицентъра G;

б) координатите на средите M_a, M_b и M_c съответно на страните BC, AC и AB.

в) уравненията на правите a, b и c, на които лежат съответно страните BC, AC и AB на триъгълника;

г) уравненията на правите m_a, m_b и m_c, на които лежат медианите съответно от A, B и C.

д) уравненията на правите h_a, h_b и h_c, на които лежат височините съответно от A, B и C.

е) координатите на H_a, H_b и H_c на петите на височините съответно от връх A, B и C.

ж) периметърът на ΔABC;

з) лицето на ΔABC.

3. Дадени са уравненията $8x+3y+1=0$ и $2x+y-1=0$ на две страни на един успоредник и уравнението $3x+2y+3=0$ на един диагонал на успоредника. Намерете върховете на този успоредник.

4. Уравненията на две от страните на един успоредник са $x-2y+8=0$ и $x+y-7=0$, а диагоналите му се пресичат в точката $F(-2,6)$. Намерете уравненията на другите две страни на успоредника.

5. Диагоналите на ромб се пресичат в точка $M(5,1)$. Уравнението на единия диагонал е $y=x-4$, а на една от страните е $3y-x-6=0$. Намерете върховете на ромба.

6. Намерете координатите на върховете на ромб, ако уравненията на две от страните му са $5x-2y+1=0$ и $5x-2y+34=0$, а уравнението на един от диагоналите е $3x+y-6=0$.

7. Крайните точки на една отсечка имат абсциси 11 и -15, а средата ѝ лежи на правата $p: 5x+13y=29$. Напишете уравнението на права, която минава през средата на отсечката и е перпендикулярна на дадената права p. Определете лицето на триъгълника, образуван от координатните оси и получената права.

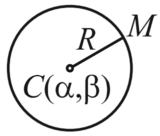
8. В квадрата $ABCD$ правата AB има общо уравнение $4x-3y-12=0$. Намерете уравненията на правите AD и BC, ако страната на квадрата е 5 и средата на CD е точка $M(3,5;9)$.

9. Да се намери разстоянието между правите $a:\ x+y-3=0$ и $b:\ x+y+5=0$.

2.4. Нормално уравнение на окръжност

Определение. Множеството от всички точки в равнината, които се намират на едно и също разстояние от дадена точка, се нарича **окръжност**. Точката се нарича **център** на окръжността, а големината на разстоянието – **радиус** на окръжността.

Нека R е радиусът на окръжност и спрямо ортогонална координатна система центърът ѝ C има координати $C(\alpha,\beta)$.



Ако $M(x,y)$ е произволна точка от окръжността, определен е векторът $\overrightarrow{CM}(x-\alpha, y-\beta)$ и $|\overrightarrow{CM}|=R$. Тъй като $|\overrightarrow{CM}|=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$, то $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=R$ и след повдигане на втора степен получаваме

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \qquad (1)$$

И така, ако $M(x,y)$ е точка от окръжността, координатите ѝ удовлетворяват уравнението (1). Може да се докаже и обратното – ако (x,y) удовлетворяват уравнението (1), то точка $M(x,y)$ лежи на окръжност с център $C(\alpha,\beta)$ и радиус R.

Уравнението (1) се нарича **нормално уравнение на окръжност** с радиус R и център $C(\alpha,\beta)$.

Ако $C(0,0)$, то уравнението на окръжността е $x^2+y^2=R^2$, което се нарича **централно уравнение** на окръжността.

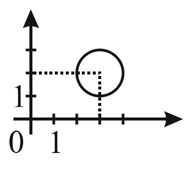
Ако $R=1$, то $x^2+y^2=1$, окръжността се нарича **единична окръжност**.

Както знаем, през три точки, нележащи на една права, минава точно една окръжност. Отговорът на въпроса как да намерим уравнението на окръжност, определена с три точки, ще покажем със задача.

1. Дадени са точките $A(3,3)$, $B(2,2)$ и $D(3,1)$. Да се намери уравнението на окръжността, определена от A, B и D. Да се начертае окръжността в координатната равнина.

Решение. а) Нека търсеното уравнение е $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$. Тъй като координатите на дадените точки трябва да удовлетворяват уравнението на окръжността, получаваме системата:

$$\left| \begin{array}{ll} (3-\alpha)^2+(3-\beta)^2=R^2 & \text{(i)} \\ (2-\alpha)^2+(2-\beta)^2=R^2 & \text{(ii)} \\ (3-\alpha)^2+(1-\beta)^2=R^2 & \text{(iii)} \end{array} \right.$$ с три неизвестни α,β,R.



Умножаваме (iii) по -1 и прибавяме към (i), получаваме уравнението $(3-\beta)^2-(1-\beta)^2=0 \Leftrightarrow \beta=2$. Приравняваме левите страни на (i) и (ii) и използваме, че $\beta=2$: $(3-\alpha)^2+1=(2-\alpha)^2$, $\alpha=3$. Следователно центърът има координати $C(3,2)$. От (i) намираме $R^2=1$, $R>0 \Rightarrow R=1$. Уравнението на окръжността е $(x-3)^2+(y-2)^2=1$. На чертежа е начертана окръжността.▲

Забележка. Координатите на центъра на окръжността може да намерим и като използваме, че центърът е пресечна точка на симетралите на две от отсечките AB, AD и BD.

2. Дадените уравнения са съответно на окръжност и права. Да се намерят общите им точки или да се докаже, че няма такива.

а) $(x+1)^2+(y-1)^2=20$ и $x-3y+14=0$; б) $(x+3)^2+(y-5)^2=13$ и $2x-3y+8=0$;

в) $(x+8)^2+(y+3)^2=64$ и $5x+y-5=0$.

Решение. а) Координатите на пресечните точки на окръжността и правата са решенията на системата: $\begin{vmatrix}(x+1)^2+(y-1)^2=20\\ x-3y+14=0\end{vmatrix}$. От второто уравнение изразяваме $x=3y-14$, заместваме в първото и получаваме $(3y-13)^2+(y-1)^2=20 \quad\Leftrightarrow\quad y^2-8y+15=0 \quad\Leftrightarrow\quad y_1=3,\ y_2=5$. От второто уравнение намираме $x_1=-5,\ x_2=1$. Правата пресича окръжността в две точки с координати $(-5,3)$ и $(1,5)$.

б) Решаваме системата $\begin{vmatrix}(x+3)^2+(y-5)^2=13\\ 2x-3y+8=0\end{vmatrix}$. От второто уравнение $x=\dfrac{3}{2}y-4$ заместваме в първото уравнението и намираме $(y-2)^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=2$. За x получаваме $x=-1$. Правата и окръжността имат само една обща точка $(-1,2)$. В този случай правата се нарича **допирателна** към окръжността.

в) Решаваме системата $\begin{vmatrix}(x+8)^2+(y+3)^2=64\\ 5x+y-5=0\end{vmatrix}$. От второто уравнение $y+3=8-5x$ заместваме в първото и получаваме уравнението $(x+8)^2+(8-5x)^2=64$, което няма реални корени. Следователно правата и окръжността нямат общи точки.▲

3. Да се намери уравнението на окръжност, която минава през точките A, B и C, ако

а) $A(-1,-2), B(-2,-1), C(-2,-2)$; б) $A(-2,-3), B(-3,-3), C(-2,-1)$;

в) $A(2,-2), B(-2,2), C(-2,-2)$

4. Дадените уравнения са на окръжност и права. Да се намерят общите им точки или да се докаже, че няма такива.

а) $(x-2)^2+(2y+2)^2=1$, $2x-2y+2=0$; б) $(x-2)^2+(2y-2)^2=1$, $x-y+2=0$;

в) $(2x+2)^2+(2y-1)^2=2$, $2x-2y+1=0$.

5. Да се намери уравнение на окръжността, минаваща през точките A_1, A_2 и A_3, ако те имат координати $A_1(1,2)$, $A_2(0,1)$ и $A_3(1,0)$.

а) Да се изобрази окръжността в координатната равнина.

б) Да се намери взаимното положение на координатните оси и окръжността. Да се приведе аналитично (с уравнение) и синтетично (геометрично) решение.

6. Окръжност k има уравнение $k: x^2+y^2+2x-3y-7=0$.

Да се намерят координатите на центъра и дължината на радиуса на k. Да се напише нормалното ѝ уравнение.

7. Да се напише уравнението на окръжността, минаваща през точките $A(2;2)$, $B(-5;-5)$, $C(1;-5)$.

8. Да се напише уравнението на окръжност през точка $A(4;-1)$ и концентрична на окръжност с уравнение $(x-3)^2+(y+2)^2=1$.

9. Окръжност k с център M минава през точка $A(-3;4)$ и е концентрична на окръжността $x^2+y^2+3x-4y-1=0$. Окръжността k пресича оста Oy в точки N и P.

а) Намерете уравнението на окръжността k. б) Намерете координатите на точките N и P.

2.5. Канонично уравнение на елипса, хипербола и парабола

1) Елипса

Определение. Нека F_1 и F_2 са две различни точки. Множеството от точки M в равнината, за които сборът от дължините MF_1+MF_2 е постоянно число, по-голямо от разстоянието F_1F_2, се нарича **елипса**.

Точките F_1 и F_2 се наричат **фокуси** на елипсата, а разстоянието $F_1F_2=2c$ се нарича **фокусно разстояние**.

По определение $MF_1+MF_2=\mathrm{const}>2c$. Означаваме $MF_1+MF_2=2a$ и тогава $a>c$.

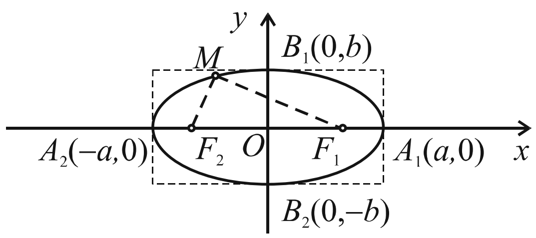
Въвеждаме координатна система Oxy, така че $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$ и да означим $b=\sqrt{a^2-c^2}$. Очевидно, че $a>b$.

Може да се докаже, че координатите (x,y) на точките от елипсата удовлетворяват уравнението

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Това уравнение се нарича **канонично уравнение на елипса**.

Графиката на елипсата е разположена спрямо координатната система Oxy, както е показано на чертежа.



Елипсата има две оси на симетрия и един център на симетрия, които при така избраната координатна система съвпадат съответно с координатните оси и с координатното начало.

Координатните оси Ox и Oy се наричат **оси на елипсата**. Началото O на координатната система се нарича **център на елипсата.** Оста, на която лежат фокусите, се нарича **фокусна ос**.

Точките $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$, $B_1(0,b)$ и $B_2(0,-b)$ се наричат **върхове на елипсата**.

Отсечките $A_1A_2=2a$ и $B_1B_2=2b$ се наричат съответно **голяма ос** и **малка ос**.

Отсечките $OA_1=a$ и $OB_1=b$ се наричат съответно **голяма полуос** и **малка полуос**.

Елипсата се намира вътре в правоъгълник със страни $2a$ и $2b$, ограничен от правите $x=a$, $x=-a$, $y=b$ и $y=-b$.

Канонично уравнение с $a<b$ задава елипса с фокуси върху ординатната ос Oy.

Когато $a=b$ елипсата е окръжност с уравнение $x^2+y^2=a^2$.

2) Хипербола

Определение. Нека F_1 и F_2 са две различни точки. Множеството от точки M в равнината, за които разликата от дължините $MF_1 - MF_2$ е постоянно число, по-малко от разстоянието F_1F_2, се нарича **хипербола**.

Точките F_1 и F_2 се наричат **фокуси на хиперболата**, а разстоянието $F_1F_2 = 2c$ се нарича **фокусно разстояние**.

По определение $\left| MF_2 - MF_1 \right| = \text{const} < 2c$.

Означаваме $\left| MF_2 - MF_1 \right| = 2a$ и $a < c$.

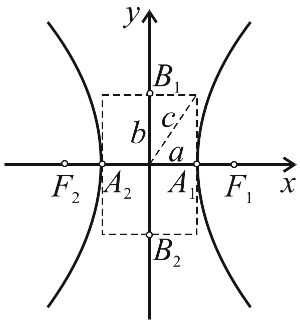
Въвеждаме координатна система Oxy, така че $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$ и означаваме $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Може да се докаже, че координатите (x, y) на точките от хиперболата удовлетворяват уравнението

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Това уравнение се нарича **канонично уравнение на хипербола**.

Графиката на хиперболата е разположена спрямо координатната система Oxy, както е показано на чертежа.



Хиперболата има две оси на симетрия и един център на симетрия, които при така избраната координатна система съвпадат съответно с Ox, Oy и точка O. Оста Ox се нарича **фокусна ос.**

Точката O се нарича **център** на хиперболата.

Точките $A_1(a,0)$ и $A_2(-a,0)$ се наричат **върхове на хиперболата**.

Отсечките $A_1A_2 = 2a$ и $B_1B_2 = 2b$ се наричат съответно **реална ос** и **имагинерна ос**.

Отсечките $OA_1 = a$ и $OB_1 = b$ се наричат съответно **реална полуос** и **имагинерна полуос**.

При хиперболата е възможно

$$a > b, \quad b > a \quad \text{или} \quad a = b.$$

Когато $a = b$ хиперболата се нарича **равнораменна** и уравнението ѝ е $x^2 - y^2 = a^2$.

3) Парабола

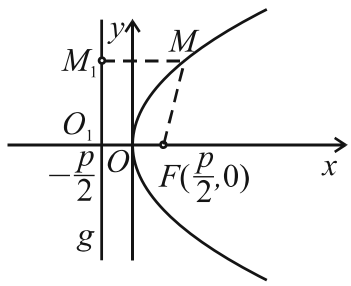
Определение. Нека са дадени точка F и права g, неминаваща през F. Множеството от точки M в равнината, за които разстоянието от M до F е равно на разстоянието от M до g, се нарича **парабола**.

Точката F се нарича **фокус**, а правата g – **директриса**.

Да означим с p разстоянието от F до g. Въвеждаме координатна система Oxy, така че $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$. Може да се докаже, че координатите (x,y) на точките от параболата удовлетворяват уравнението

$$y^2 = 2px.$$

Това уравнението се нарича **канонично уравнение на парабола.**



Графиката на параболата спрямо координатната система Oxy е показана на чертежа.

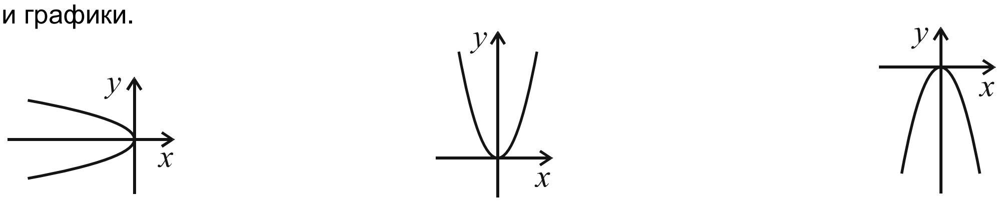
По определение

$$MF = MM_1,\ FO_1 = p,\ FO = OO_1 = \frac{p}{2},\ O_1\left(-\frac{p}{2};0\right).$$

Параболата има ос на симетрия, която при избраната координатна система е оста Ox – нарича се **ос на параболата**.

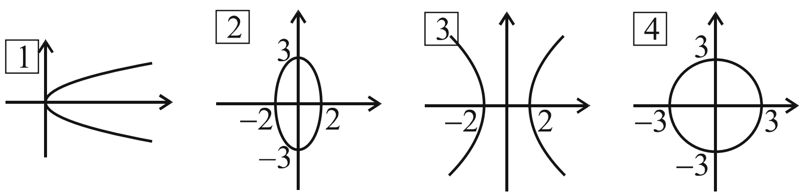
Точката $O(0,0)$ се нарича **връх на параболата**.

При други разположения на параболата в координатната система, параболата има следните уравнения и графики.



$y^2 = -2px$ $\qquad$ $x^2 = 2py$ $\qquad$ $x^2 = -2py$

1. За всяко уравнение запишете номера на кривата, която описва.



А) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ **Б)** $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ **В)** $x^2+y^2=9$ **Г)** $y^2=4x$

2. Срещу всяко уравнение запишете името на кривата, която се задава с това уравнение.

А) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ……………………… **Б)** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ………………………

В) $y^2=2px$ ……………………… **Г)** $x^2+y^2=R^2$ ………………………

Тест 1
Аналитична геометрия в равнината

1. Права е определена от колинеарен вектор $\vec{p}(-2,-3)$ и точка $M(1,2)$. Уравнението на правата е:

☒ **А)** $-2x+3y+1=0$ **Б)** $3x-2y-1=0$

В) $2x+3y+1=0$ **Г)** $-3x+2y-1=0$

2. На празното място запишете уравнението на права, която минава през точките $M(-2,5)$ и $N(4,1)$.

____

3. Дадени са точките $M(3,2)$, $N(5,2)$ и $P(3,-4)$. Попълнете празните места, така че твърденията да са верни.

а) Уравнението на правата MN е ___________.

б) Уравнението на правата MP е ___________.

в) Уравнението на правата NP е ___________.

4. Уравнението на права с ъглов коефициент $k=2$ и минаваща през точката $A(-3,2)$ е:

☒ **А)** $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}y$ **Б)** $2y=x+1$

В) $y=-2x+8$ **Г)** $y=2x+8$

5. Правата, която сключва ъгъл $135°$ с положителната посока на оста Ox и минава през точката $P(\sqrt{2},0)$ има уравнение

☒ **А)** $\sqrt{2}x+y-2=0$ **Б)** $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+1$

В) $y=-x+\sqrt{2}$ **Г)** $y=x-\sqrt{2}$

6. Да се намери тангенсът на ъгъла, който правата, минаваща през точките $M(2,5)$ и $N(-3,-5)$, сключва с положителната посока на абсцисната ос.

☒ **А)** -3 **Б)** -1 **В)** 1 **Г)** 2

7. Кое от твърденията за правите, зададени с уравненията $\sqrt{3}x+2y-\sqrt{6}=0$ и $3x+2\sqrt{3}y-3\sqrt{2}=0$, е вярно?

☒ **А)** Правите са успоредни. **Б)** Правите се пресичат в точка $\left(0,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

В) Правите се пресичат в точка $(1,\sqrt{3})$. **Г)** Правите съвпадат.

8. Коя двойка прави, зададени с уравненията, са перпендикулярни?

☒ **А)** $2x-3y+1=0$ и $y=-1,5x-1$ **Б)** $3x+2y+1=0$ и $y=1,5x+1$

В) $y=-2,5x+1$ и $5x-2y-1=0$ **Г)** $y=\frac{1}{3}x-2$ и $y=3x-2$

9. Косинусът на ъгъла между правите с уравнения $2x-\sqrt{3}y+1=0$ и $\sqrt{3}x+y+2=0$ е равен на:

☒ **А)** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ **Б)** $\frac{2\sqrt{21}}{7}$ **В)** $\frac{\sqrt{21}}{14}$ **Г)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

10. Дадени са точките $A(1,3)$, $B(-2,1)$ и $C(3,-2)$. Попълнете празното място, така че твърдението да в вярно.

Периметърът на ΔABC е равен на ___________.

Тест 2
Аналитична геометрия в равнината

1. Права е определена от колинеарен вектор $\vec{p}(-1,1)$ и точка $M(a,5)$. Уравнението на правата е:

☒ **А)** $x+y-a-5=0$ **Б)** $-x+y-a-5=0$

В) $x+y+a+5=0$ **Г)** $-x+y+a+5=0$

2. На празното място запишете уравнението на права, която минава през точките $A(1,0)$ и $B(4,-3)$.

____

3. Дадени са точките $A(4,-5)$, $B(4,-3)$ и $C(3,-3)$. Попълнете празните места, така че твърденията да са верни.

а) Уравнението на правата AB е ____________.

б) Уравнението на правата BC е ____________.

в) Уравнението на правата AC е ____________.

4. Уравнението на права с ъглов коефициент $k=-1$ и минаваща през точката $M(-4,0)$ е:

☒ **А)** $y=-x+4$ **Б)** $y=x-4$

В) $x+y-4=0$ **Г)** $x+y+4=0$

5. Уравнението на права, която минава през точката $M(0,\frac{1}{2})$ и сключва с положителната посока на оста Ox ъгъл $45°$ е:

☒ **А)** $y=\frac{1}{2}$ **Б)** $2x-2y+1=0$

В) $y=x-\frac{1}{2}$ **Г)** $2x+2y+1=0$

6. Права, минаваща през точките $A(7,-2)$ и $B(-4,-1)$, има ъглов ковфициент:

☒ **А)** -1 **Б)** -11 **В)** $-\frac{1}{11}$ **Г)** $-\frac{7}{11}$

7. Кое от твърденията за правите, зададени с уравненията $x-\sqrt{2}y+1=0$ и $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-1$, е вярно?

☒ **А)** Правите са успоредни. **Б)** Правите се пресичат в точка $(1,\sqrt{2})$.

В) Правите се пресичат в точка $(2\sqrt{2},1)$. **Г)** Правите съвпадат.

8. Коя двойка прави, зададени с уравненията, са перпендикулярни?

☒ **А)** $x-1{,}5y-1=0$ и $-1{,}5x+y-1=0$ **Б)** $x+1{,}5y-1=0$ и $y=1{,}5x+1$

В) $x-1{,}5y-1=0$ и $y=1{,}5x-1$ **Г)** $x+1{,}5y+1=0$ и $1{,}5x+y+1=0$

9. Косинусът на ъгъла между правите с уравнения $\sqrt{2}x+2y-5=0$ и $\sqrt{2}x-3y-7=0$ е равен на:

☒ **А)** $\frac{4\sqrt{66}}{33}$ **Б)** $-\frac{4\sqrt{66}}{33}$ **В)** $\frac{2\sqrt{66}}{33}$ **Г)** $-\frac{2\sqrt{66}}{33}$

10. Дадени са точките $A(1,0)$, $B(-2,3)$ и $C(4,2)$. Попълнете празното място, така че твърдението да в вярно.

Периметърът на ΔABC е равен на ____________.

3. Стереометрия

3.1. Първични понятия и аксиоми в стереометрията. Успоредност в пространството

Да преговорим изученото по стереометрия в 10. клас.

Означения:

$a \subset \alpha$; $\alpha \supset a$, $a \in \alpha$ – правата a лежи в равнината α; равнината α минава през правата a.

$\alpha = (ABC)$ – равнината α, определена от точките A, B и C.

$\alpha = (a,\ A)$ – равнината α, определена от правата a точка $A \notin a$.

$\alpha = (a, b)$ – равнината α, определена от пресичащите се или успоредни прави a и b.

$\angle(a, b)$ – ъгъл между правите a и b; $\angle Opq$; $\angle(pOq)$ – ъгъл с връх O и рамене p и q.

$a \cap \alpha = M$ – правата a пробожда (пресича) равнината α в точка M. Точка M се нарича пробод.

$\alpha \cap \beta = a$ – правата a е пресечница на пресичащите се равнини α и β.

$\angle(\alpha, \beta)$ – двустенен ъгъл между равнините α и β. Ако $\alpha \cap \beta = a$, правата a се нарича ръб на двустенния ъгъл, а α и β – стени.

Две прави

Определения.

Успоредни прави – прави, които лежат в една равнина и нямат обща точка, $a \parallel b$.

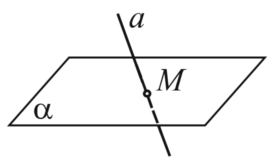
Пресичащи се прави – прави, които имат само една обща точка.

Кръстосани прави – прави, които не лежат в една равнина.

Ъгълът между две кръстосани прави е равен на ъгъла между пресичащи се прави, съответно успоредни на кръстосаните прави.

Права и равнина

Определения.

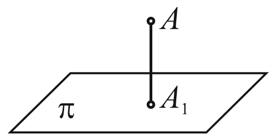


Права и равнина са успоредни, ако нямат обща точка, $a \parallel \alpha$.

Ако права и равнина имат само една обща точка, казваме, че правата пробожда (пресича) равнината и общата им точка се нарича **пробод**.

Права и равнина са перпендикулярни, ако правата е перпендикулярна на всяка права в равнината, $a \perp \alpha$.

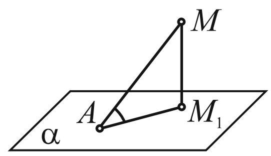
Дадена е равнина π и нека A е произволна точка в пространството. Спускаме перпендикуляр през A към π и нека A_1 е петата на този перпендикуляр. Точката A_1 се нарича **ортогонална проекция** на A в π. Понякога ще казваме само проекция.



Означаваме $A_1 = \text{пр}_\pi A$. Четем: „A_1 е ортогоналната проекция на A в π" или „Ортогоналната проекция на A в равнината π е A_1". Когато равнината се подразбира ще пишем само $A_1 = \text{пр}A$.

Изображение, при което на всяка точка от пространството се съпоставя нейната ортогонална проекция в равнина π се нарича **ортогонално проектиране**, а равнината π се нарича **проекционна равнина**.

Нека M_1 е ортогоналната проекция на точка M в равнина α и точка A е произволна точка в α, различна от M_1. Отсечката MM_1 се нарича **перпендикуляр**, а отсечката MA – **наклонена.** Отсечката M_1A е ортогонална проекция на отсечката MA в α.



Разстояние от точка до равнина е дължината на перпендикуляра от точката до равнината.

Разстояние между успоредни права и равнина е равно на разстоянието от коя да е точка от правата до равнината.

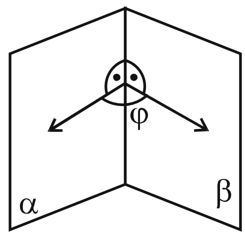
Ъгълът между права и равнина е равен на ъгъла между правата и ортогоналната ѝ проекция в равнината. На чертежа $\angle MAM_1$ е ъгълът между правата AM и равнината α.

Две равнини

Определения.

Две равнини са успоредни, ако нямат обща точка, $\alpha \parallel \beta$.

Линеен ъгъл на двустенен ъгъл се нарича ъгълът, който се получава при пресичането на двустенния ъгъл с равнина, перпендикулярна на ръба му. **Мярка на двустенен ъгъл** се нарича мярката на кой да е негов линеен ъгъл. Два двустенни ъгъла са равни, ако са равни линейните им ъгли. Един двустенен ъгъл е прав, ако линейният му ъгъл е прав.



Две равнини са перпендикулярни, ако образуват прав двустенен ъгъл;

$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \angle(\alpha, \beta) = 90°$.

Ъгъл между две пресичащи се равнини, които не са перпендикулярни, се нарича по-малкият от двустенните ъгли, образувани от равнините.

Ъглополовяща на двустенен ъгъл се нарича полуравнината с контур ръба на двустенния ъгъл, образуваща равни двустенни ъгли със стените на ъгъла.

Аксиоми в стереометрията. Успоредност в пространството

1. Направете съответствие между твърденията, номерирани от 1) до 15) и чертежите, означени с буквите от а) до л). Попълнете квадратчетата до чертежите с номер на твърдение, за което считате, че се отнася чертежът. Внимание: има твърдения без чертеж за тях и чертежи без твърдение за тях.

Определете номерата на твърденията, за които не сте открили съответен чертеж.

Определете буквите на чертежите, за които не сте открили съответно твърдение.

1) **Аксиома.** През три точки, нележащи на една права, минава единствена равнина.

2) **Аксиома.** Ако две точки от една права лежат в една равнина, то всяка точка от правата лежи в равнината.

3) **Аксиома.** Ако две равнини имат обща точка, то те имат обща права.

4) **Аксиома.** Във всяка равнина са изпълнени аксиомите на планиметрията и за фигури, лежащи в различни равнини, може да се прилагат всички твърдения от планиметрията.

5) **Теорема.** През права и точка, нележаща на правата, минава точно една равнина.

6) **Теорема.** През две пресичащи се прави минава точно една равнина.

7) **Теорема.** В пространството през точка, нележаща на дадена права, минава единствена права, успоредна на дадената.

8) **Теорема.** Ако две прави са успоредни на трета права, то те са успоредни помежду си.

Ако $a \parallel b$ и $b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$.

9) **Теорема.** Ако права, която не лежи в дадена равнина, е успоредна на някоя права от равнината, то правата и равнината са успоредни.

Ако $a \not\subset \alpha$ и $a \parallel b$, където $b \subset \alpha \Rightarrow a \parallel \alpha$.

10) **Теорема.** Ако права a и равнина α са успоредни, то всяка равнина, която минава през a и пресича α, я пресича в права, успоредна на a.

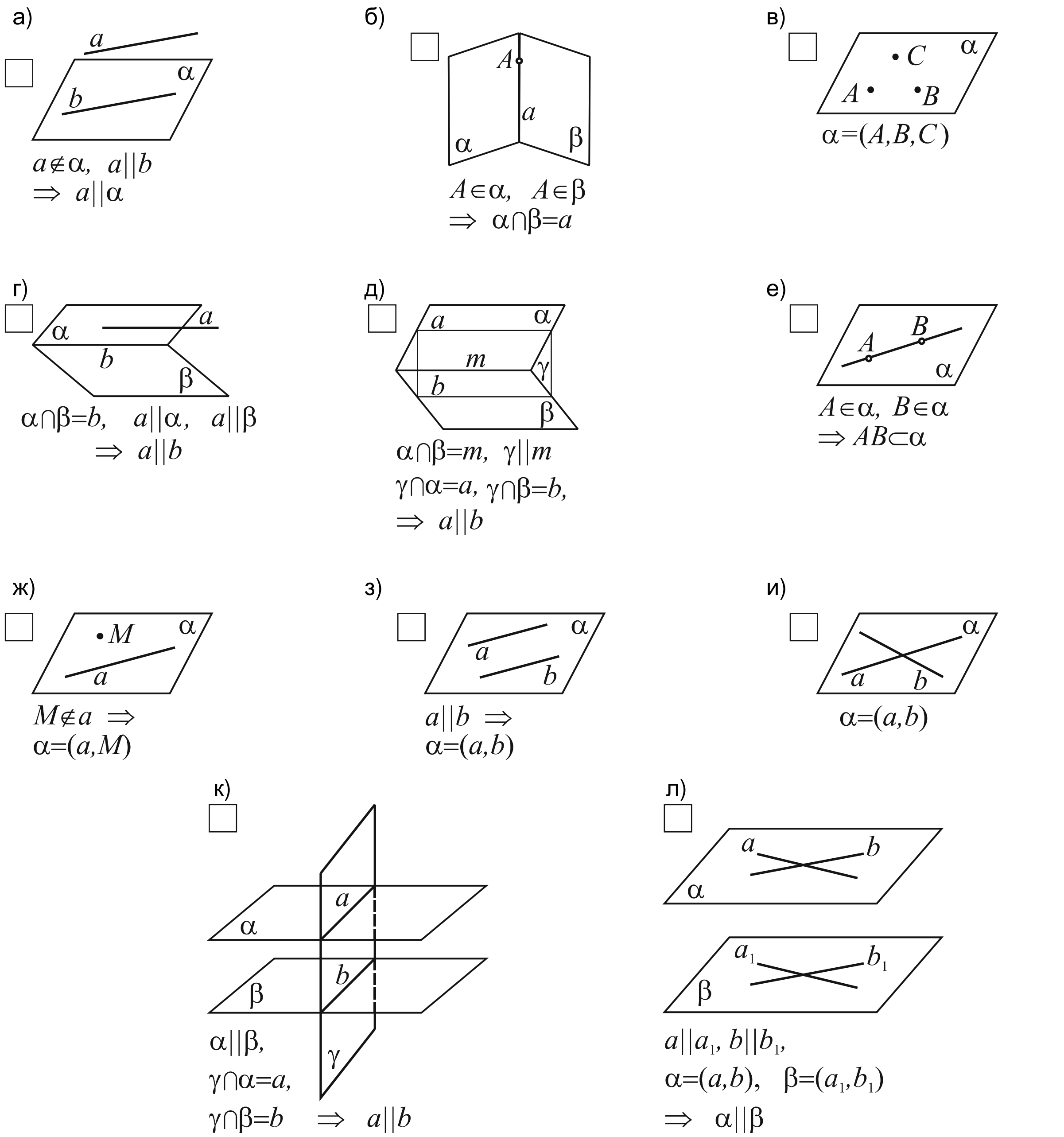
11) **Теорема.** Ако права е успоредна на две пресичащи се равнини, то тя е успоредна на тяхната пресечница.

12) **Теорема.** Ако равнина пресича две пресичащи се равнини и е успоредна на тяхната пресечница, то тя сече двете равнини в успоредни прави.

13) **Теорема.** Ако две пресичащи се прави от една равнина са съответно успоредни на две пресичащи се прави от друга равнина, то двете равнини са успоредни.

14) **Теорема.** Пресечниците на равнина с две успоредни равнини са успоредни прави.

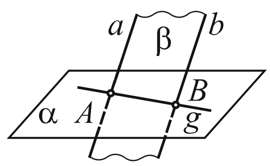
15) **Теорема.** През точка, нележаща на дадена равнина, минава единствена равнина, успоредна на дадената.



Теорема 1. Ако две прави са успоредни, то всяка равнина, която пресича едната от тях, пресича и другата.

Доказателство. Нека $a \| b$ и $a \cap \alpha = A$. Ще докажем, че α пресича и правата b.

Нека $\beta = (a \| b)$. Равнините α и β имат обща точка, следователно имат обща права – да я означим с g, $g = \alpha \cap \beta$ и $A \in g$.



В равнината β имаме $a \| b$ и $g \cap a = A \Rightarrow g$ пресича и b, $B = g \cap b$ и $B \in \alpha$ (защото $B \in g \subset \alpha$). Ако допуснем, че b има втора обща точка с α, то $b \subset \alpha$ и понеже $A \in g \subset \alpha$, то $\alpha \equiv \beta$, което противоречи с условието, че a пресича α. Следователно α пресича b.▲

Докажете следните теореми.

Теорема 2. Ако права е успоредна на равнина и през точка от равнината минава права, успоредна на дадената, то втората права лежи в равнината.

Теорема 3. Ако права и равнина са успоредни, то в равнината съществува права, успоредна на дадената права.

3.2. Перпендикулярност в пространството

Да преговорим изученото по стереометрия в 10. клас.

1. Направете съответствие между твърденията, номерирани от 1) до 8) и чертежите, означени с буквите от а) до д). Попълнете квадратчетата до чертежите с номер на твърдение, за което считате, че се отнася чертежът. Внимание: има твърдения без чертеж за тях.
Определете номерата на твърденията, за които не сте открили съответен чертеж.

1) **Теорема.** Ако права е перпендикулярна на две пресичащи се прави от една равнина, то тя е перпендикулярна на равнината.

2) **Теорема.** През дадена точка съществува единствена права, перпендикулярна на дадена равнина.

3) **Теорема.** През дадена точка съществува единствена равнина, перпендикулярна на дадена права.

4) **Теорема.** Ако равнина е перпендикулярна на една от две успоредни прави, то тя е перпендикулярна и на другата.

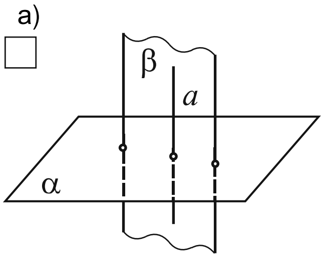
5) **Теорема.** Ако равнина минава през права, перпендикулярна на друга равнина, то равнините са перпендикулярни.

6) **Теорема.** Ако две пресичащи се равнини α и β са перпендикулярни на равнина γ, то пресечницата им е перпендикулярна на равнината γ.

7) **Теорема.** Ако две прави са перпендикулярни на равнина, то те са успоредни.

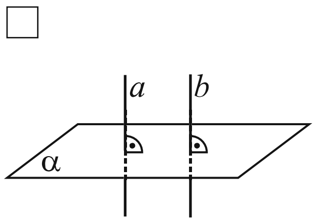
8) **Теорема.** Ако две равнини са перпендикулярни на права, то те са успоредни.

а)



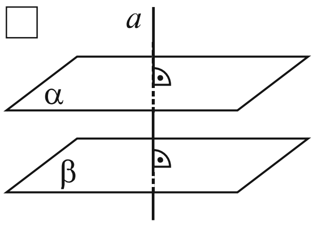
$a\perp\alpha,\ \beta\supset a \ \Rightarrow\ \beta\perp\alpha$

б)



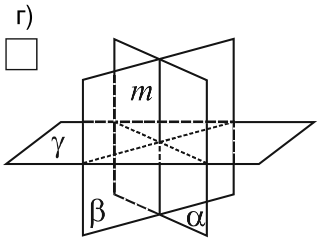
$a\perp\alpha,\ b\perp\alpha \ \Rightarrow\ a\|b$

в)



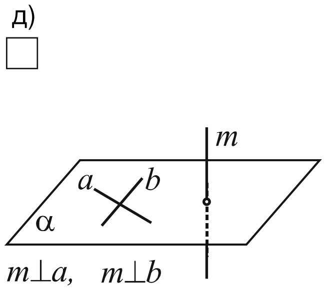
$\alpha\perp a,\ \beta\perp a, \ \Rightarrow\ \alpha\|\beta$

г)



$\alpha\cap\beta=m,\ \gamma\perp\alpha,\ \gamma\perp\beta$
$\Rightarrow\ \gamma\perp m$

д)



$m\perp a,\ \ m\perp b$
$\Rightarrow\ m\perp\alpha$

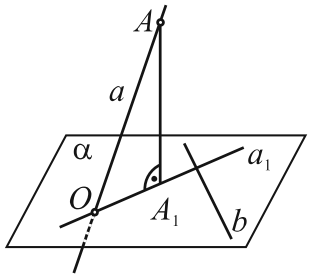
Теорема 1. (Теорема за трите перпендикуляра)

Наклонена права към дадена равнина е перпендикулярна на права от равнината тогава и само тогава, когато ортогоналната проекция на наклонената права е перпендикулярна на правата от равнината.

Нека права a е наклонена към равнината α и b е права от равнината. Теоремата гласи, че

$$a \perp b \;\Leftrightarrow\; \text{пр}_\alpha a \perp b.$$

Доказателство. Нека $a_1 = \text{пр}_\alpha a$. Нека $A \in a$ и $A_1 = \text{пр}_\alpha A \Rightarrow AA_1 \perp \alpha$ и тъй като b лежи в α, то $AA_1 \perp b$. Да означим $\beta = (a, AA_1) = (a_1, AA_1)$.



I. Нека $a \perp b$ и тъй като $AA_1 \perp b$, получихме, че b е перпендикулярна на две пресичащи се прави от $\beta \Rightarrow b \perp \beta$ и значи е перпендикулярна на всяка права от β и тъй като $a_1 \subset \beta$, то $b \perp a_1$.

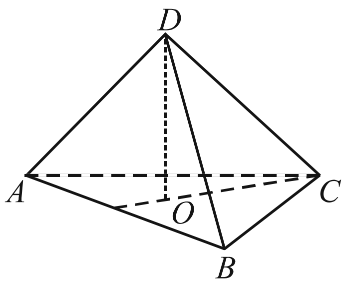
II. Нека $a_1 \perp b$ и тъй като $AA_1 \perp b$ получихме, че b е перпендикулярна на две пресичащи се прави от $\beta \Rightarrow b \perp \beta$ и значи е перпендикулярна на всяка права от β и тъй като $a \subset \beta$, то $b \perp a$.▲

Обърнете внимание

Правата b и проекцията a_1 лежат в една и съща равнина, докато правата a е наклонена към тази равнина.

2. В триъгълна пирамида $ABCD$ ръбът DC е наклонен към (ABC) и перпендикулярен на AB. Да се докаже, че проекцията на D в равнината (ABC) лежи на височината през върха C в ΔABC.

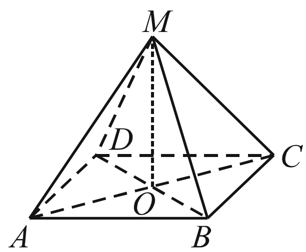
Решение. Нека O е проекцията на D в (ABC), тогава $CO = \text{пр}DC$.



По условие $DC \perp AB$. От теоремата за трите перпендикуляра следва, че $\text{пр}DC \perp AB$, т.е. $CO \perp AB$ и значи CO е височината през върха C в ΔABC. Последното твърдение означава, че O лежи на височината през точка C в ΔABC. ▲

3. Дадена е правилна четириъгълна пирамида $ABCDM$ с връх M. Да се докаже, че правата AM е перпендикулярна на правата BD.

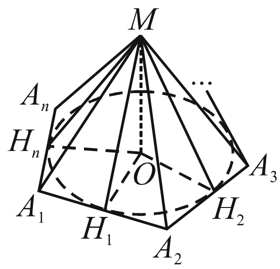
Решение. Пирамидата е правилна, следователно проекцията на M в (ABC) е пресечната точка O на диагоналите на квадрата $ABCD$. Имаме $AO = \text{пр}AM$ и $AO \perp BD$. От теоремата за трите перпендикуляра следва, че $AM \perp BD$.▲



Теорема 2. Всички околни стени на една пирамида сключват равни ъгли с основата точно тогава, когато в основата може да се впише окръжност и петата на височината на пирамидата съвпада с центъра на тази окръжност.

Доказателство.

Нека $A_1A_2...A_nM$ е пирамида с връх M (виж чертежа) и MH_1, $MH_2,\dots,MH_n$ са височините в околните стени към основните ръбове.



От теоремата за трите перпендикуляра следва, че $OH_1 \perp A_1A_2$, $OH_2 \perp A_2A_3$,..., $OH_n \perp A_nA_1$.

Тогава линейните ъгли на двустенните ъгли при основата са $\angle MH_1O$, $\angle MH_2O,\dots,\angle MH_nO$. Тези ъгли са равни точно когато триъгълниците ΔMOH_1, $\Delta MOH_2,\dots,\Delta MOH_n$ са еднакви, което е изпълнено точно когато катетите им OH_1, $OH_2,\dots,OH_n$ са равни, което е изпълнено точно когато в основата може да се впише окръжност с център O.▲

Следствие. За n-ъгълна пирамида следните твърдения са еквивалентни:

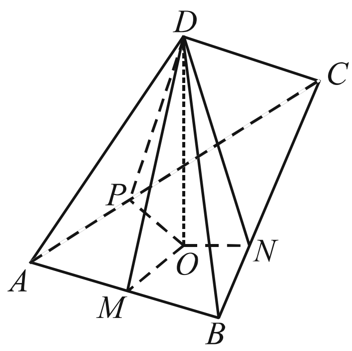
1) всички околни стени сключват равни ъгли с основата;
2) височините към основен ръб във всички околни стени са равни;
3) проекциите в основата на височините към основен ръб във всички околни стени са равни;
4) всички околни стени сключват равни ъгли с височината на пирамидата;
5) в основата може да се впише окръжност и петата на височината на пирамидата съвпада с центъра ѝ.

Доказателството следва от доказателството на предходната теорема.

4. Триъгълна пирамида $ABCD$ с височина 2 има за основа правоъгълния ΔABC с катети 3 и 4. Ако всички околни стени сключват равни ъгли с основата, намерете околната повърхнина на пирамидата.

Решение. Нека r е радиусът на вписаната в ΔABC окръжност и DM, DN и DP са височини в околните стени на пирамидата.

От теорема 2 следва, че проекцията на върха D в равнината (ABC) е центърът O на вписаната в ΔABC окръжност $\Rightarrow$ $OM = ON = OP = r$ и $DM = DN = DP$.



В правоъгълния ΔABC хипотенузата е $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ и

$$OM = ON = OP = r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{3+4-5}{2} = 1.$$

От триъгълниците MOD, NOD и POD намираме:

$$DM = DN = DP = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

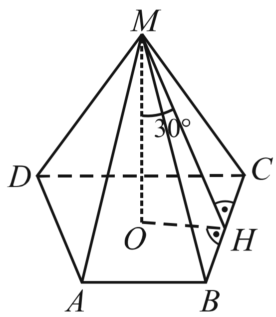
$$\Rightarrow S = \frac{P_{ABC}\sqrt{5}}{2} = 6\sqrt{5}.▲$$

5. В четириъгълна пирамида $ABCDM$ с основа трапец и връх M височините към основен ръб във всички околни стени сключват ъгъл $30°$ с височината на пирамидата. Ако височината на пирамидата е 3 и периметърът на основата е $4\sqrt{5}$, да се намери лицето на основата.

Решение. Тъй като височините в околните стени сключват равни ъгли с височината на пирамидата, то в трапеца $ABCD$ може да се впише окръжност и M се проектира в центъра O на тази окръжност.

Нека $MH \perp BC$ $(H \in BC)$ $\Rightarrow$ $\angle OMH = 30°$, $MO = 3$ и $r = OH = 3\operatorname{tg}30° = \sqrt{3}$ $\Rightarrow$ височината на трапеца е $2r = 2\sqrt{3}$. Трапецът е вписан в окръжност, следователно сборът от основите е $\dfrac{P_{ABCD}}{2} = 2\sqrt{5}$.

Тогава $S_{ABCD} = \dfrac{2\sqrt{5}}{2} 2\sqrt{3} = 2\sqrt{15}$.▲



6. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Да се докаже, че

а) правата BD_1 е перпендикулярна на AC;

б) правата DB_1 е перпендикулярна на CD_1.

7. Докажете, че всеки околен ръб на правилна триъгълна пирамида е перпендикулярен на срещулежащия му основен ръб.

8. Основата $ABCD$ на четириъгълна пирамида $ABCDM$ е ромб. Ако ръбът MC е перпендикулярен на равнината на основата, да се докаже, че $AM \perp BD$.

9. В правилна четириъгълна пирамида $ABCDM$ с връх M върху ръба BC е взета точка N, а върху отсечката MN – точка P. Ако проекцията на M върху (ABC) е O и $OP \perp BC$, да се докаже, че N е среда на BC.

10. Основата на пирамида е правоъгълник със страни $AD = BC = 2a$ и $AB = CD = 5a$. Ортогоналната проекция O на върха M на пирамидата лежи върху отсечката PF, съединяваща средите P и F съответно на страните AD и BC, $PO = a$ и $MO = 2a$.

а) Намерете обема и околната повърхнина на пирамидата.

б) Намерете двустенния ъгъл φ между равнините (MAB) и (MCD).

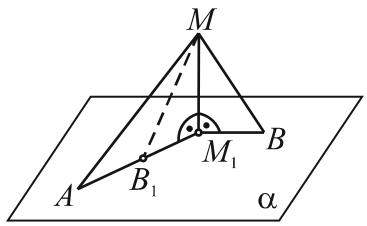
в) Докажете, че ΔPMF е правоъгълен и че равнините (MAD) и (MBC) са перпендикулярни.

11. Основата на пирамида е квадрат. Един от околните ѝ ръбове е перпендикулярен на равнината на основата, а несъседният на него околен ръб има дължина b и образува с основните ръбове, минаващи през единия му край, ъгли, равни на α. Да се намери обемът на пирамидата.

.3. Перпендикуляр и наклонена

Определение. Нека точка M не лежи в равнината α и M_1 е нейната ортогонална проекция в α. Всяка отсечка, която свързва M с точка от равнината, различна от M_1, се нарича **наклонена.** Отсечката MM_1 е **перпендикуляр**.

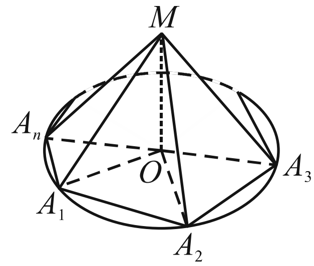
Теорема 1. Две наклонени от една и съща точка към дадена равнина са равни тогава и само тогава, когато са равни проекциите им в равнината. От две наклонени от една и съща точка към дадена равнина с неравни проекции по-голяма е тази, която има по-голяма проекция.



Доказателство. Нека M не лежи в равнината α и M_1 е ортогоналната ѝ проекция в α. Нека точките A и B лежат в α и са различни от M_1. Отсечките MA и MB са равни точно когато ΔAM_1M и ΔBM_1M са еднакви, което е изпълнено точно когато са равни отсечките M_1A и M_1B.

Нека сега $M_1A > M_1B$. Върху AM_1 вземаме точка B_1, така че $M_1B_1 = M_1B$. Имаме $M_1A > M_1B_1$, следователно $MA > MB_1$. Но $MB_1 = MB$ (защото имат равни проекции), следователно $MA > MB$.▲

Теорема 2. Околните ръбове на една пирамида са равни точно когато около основата може да се опише окръжност и ортогоналната проекция на върха в равнината на основата е центърът на тази окръжност.



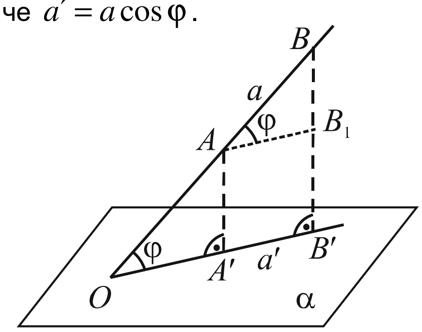
Доказателство. Нека $A_1A_2...A_nM$ е пирамида с връх M и O е ортогоналната проекция ма M в равнината на основата (виж чертежа). Околните ръбове са наклонени към равнината на основата и те са равни точно когато са равни проекциите им в равнината, което е изпълнено точно когато около многоъгълника $A_1A_2...A_n$ може да се опише окръжност с център O.▲

Следствие. За n-ъгълна пирамида следните твърдения са еквивалентни:

1) всички околни ръбове са равни;
2) всички околни ръбове сключват равни ъгли с равнината на основата;
3) проекциите в основата на всички околни ръбове са равни;
4) всички околни ръбове сключват равни ъгли с височината на пирамидата;
5) около основата може да се опише окръжност и ортогоналната проекция на върха в равнината на основата е центърът ѝ.

Доказателството следва от доказателството на предходната теорема.

1. Отсечката a лежи на правата, наклонена спрямо равнина α и сключваща с нея ъгъл с мярка φ. Ако a' е ортогоналната проекция на a в α, да се докаже, че $a' = a\cos\varphi$.



Решение. Нека $AB = a$, $\angle(AB, \alpha) = \varphi$, $A' = \text{пр}_\alpha A$, $B' = \text{пр}_\alpha B$, $A'B' = a'$.

Нека $AB \cap \alpha = O \Rightarrow \angle B'OB = \varphi$. (Разположението на точките е както е показано на чертежа.)

В равнината $(B'OB)$ построяваме $AB_1 \parallel A'B'$, $B_1 \in BB'$

$\Rightarrow \angle B_1AB = \varphi$ и $AB_1 = A'B' = a'$. От правоъгълния AB_1B имаме $AB_1 = AB\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad a' = a\cos\varphi$.▲

2. От една точка до дадена равнина са прекарани две наклонени, всяка от които образува с равнината ъгъл $45°$. Намерете ъгъла между двете наклонени, ако проекциите им в равнината са перпендикулярни.

3. От точка M са прекарани към дадена равнина наклонените $MA=\sqrt{5}$ и $MB=2\sqrt{2}$. Проекцията на първата наклонена е $\sqrt{2}$. Намерете проекцията на втората.

4. В правилна триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ основният ръб и височината са равни. Да се намери ъгълът φ между CN и равнината (ABC), където N е средата на A_1B_1.

5. Основата на четириъгълна пирамида $ABCDM$ е равнобедрен трапец $ABCD$, $AB>CD$ с пресечна точка на диагоналите O и $\angle AOB=60°$. Ако височината MO на пирамидата е 4 и ръбът BM е 5, да се намери ъгълът φ между правата AM и равнината (DBM).

6. В триъгълна пирамида $ABCD$ основата е равнобедрен триъгълник ABC с основа $AB=a$. Петата на височината на пирамидата е средата на AC. Ако ъгълът между правата BC и равнината (ACD) е 2α и ъгълът между правата AD и равнината (ABC) е β, да се намери обемът на пирамидата.

7. Основата $ABCD$ на четириъгълна пирамида $ABCDM$ е квадрат със страна $\sqrt{2}$. Проекцията P на върха в равнината на основата лежи на AC и $CP:AP=1:3$ Ако височината на пирамидата е $3{,}5$, намерете ъгъла φ между BM и основата.

8. В правилна триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ основният ръб е a и ъгълът между BC_1 и равнината ABB_1A_1 е $45°$. Да се намери обемът на призмата.

9. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Намерете ъгъла φ между D_1O и равнината (ABC), където точка O е центърът на $ABCD$.

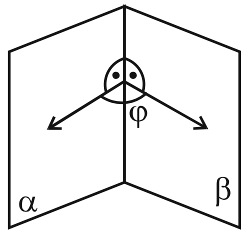
б) Ако M е медицентърът на ΔDBD_1 и ортогоналната проекция на отсечката D_1M в равнината (ABC) е $\sqrt{2}$, намерете обема на куба.

3.4. Двустенен ъгъл. Перпендикулярност на две равнини

Да преговорим още веднъж понятията, свързани с двустенен ъгъл.

Определение. Фигура, образувана от две полуравнини с общ контур, се нарича **двустенен ъгъл**, полуравнините се наричат стени, а общият контур – ръб на двустенния ъгъл.

Линеен ъгъл на двустенен ъгъл се нарича ъгълът, който се получава при пресичането на двустенния ъгъл с равнина, перпендикулярна на ръба му. **Мярка на двустенен ъгъл** се нарича мярката на кой да е негов линеен ъгъл. Два двустенни ъгъла са равни, ако са равни линейните им ъгли. Един двустенен ъгъл е прав, ако линейният му ъгъл е прав. Две равнини са перпендикулярни, ако образуват прав двустенен ъгъл.

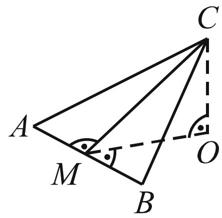


1. Равнобедрен триъгълник ABC има основа $AB = 6$ и бедро 5. Основата му лежи в дадена равнина, а върхът C е на разстояние 2 от равнината. Намерете ъгъла между дадената равнина и равнината на триъгълника.

Решение. Нека дадената равнина е α и $CO \perp \alpha$, $O \in \alpha \;\Rightarrow\; CO = 2$.

Нека $CM \perp AB$, $M \in AB$

Тъй като MO е ортогоналната проекция на MC в α, като използваме теоремата за трите перпендикуляра следва, че $MO \perp AB$. Следователно $\angle CMO$ е линейният ъгъл на двустенния $\angle(ABC, \alpha)$ и значи е търсеният ъгъл.



От ΔAMC намираме $MC = 4$. От ΔMOC $\sin\angle CMO = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow$ $\angle CMO = 30°$.▲

Изучените теореми за перпендикулярност между две равнини вече преговорихме. Сега ще добавим още една теорема.

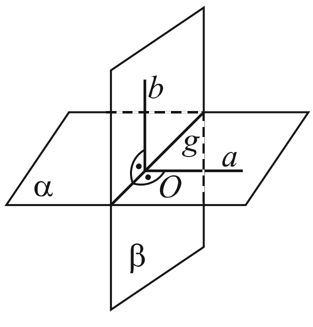
Теорема. Ако права лежи в едната от две перпендикулярни равнини и е перпендикулярна на тяхната пресечница, то тя е перпендикулярна на другата равнина.

Доказателство.

Нека $\alpha \perp \beta$ и $\alpha \cap \beta = g$. Нека $b \subset \beta$ и $b \perp g$.

Ще докажем, че $b \perp \alpha$.

Нека $b \cap g = O$. В равнината α през точката O построяваме права a, която е перпендикулярна на g. Следователно $g \perp (a, b)$ (защото е перпендикулярна и на двете прави) $\Rightarrow$ $\angle(a, b)$ е линейният ъгъл между дадените равнини $\Rightarrow$ $\angle(a,b) = \angle(\alpha,\beta) = 90°$ $\Rightarrow$ $b \perp a$. Получихме, че b е перпендикулярна на две пресичащи се прави a и g от равнината α, следователно $b \perp \alpha$.▲



2. Дадена е правилна четириъгълна призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Да се намери разстоянието от върха B_1 до равнината (ACD_1), ако $AB = a$ и $AA_1 = 2a$.

Решение. В ΔACD_1 $AD_1 = CD_1 \;\Rightarrow\; AC \perp D_1O$.

Тъй като $AC \perp BD$, то $AC \perp (D_1O, BD) = (DBB_1D_1)$.

Получихме, че AC лежи в равнината (ACD_1) и е перпендикулярна на равнината (DBB_1D_1), следователно двете равнини са перпендикулярни. Пресечницата на тези равни е D_1O (точките D_1 и

O лежат и в двете равнини). В равнината (DBB_1D_1) построяваме $B_1M \perp D_1O$, $M \in D_1O$, т.е. BM_1 е перпендикулярна на пресечницата на двете перпендикулярни равнини и лежи в едната от тях – от доказаната теорема следва, че тя е перпендикулярна и на другата равнина, $B_1M \perp (ACD_1)$. Това означава, че B_1M е търсеното разстояние.

Изчисляването на дължината на B_1M става от ΔOB_1D_1 (виж чертежа).

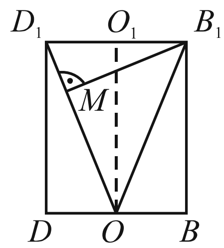
Имаме $D_1B_1 = a\sqrt{2}$, $OO_1 = 2a$,

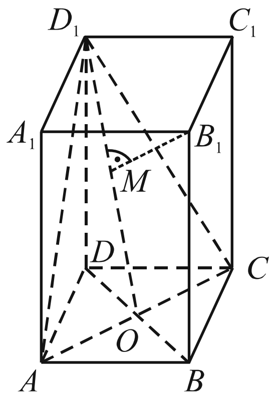
$OD_1 = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (2a)^2} = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$ и

$S_{D_1OB_1} = \dfrac{D_1B_1.OO_1}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}.2a}{2} = a^2\sqrt{2}$.

От друга страна $S_{D_1OB_1} = \dfrac{OD_1.B_1M}{2} = \dfrac{3a}{2\sqrt{2}}.B_1M \Rightarrow$

$\dfrac{3a}{2\sqrt{2}}.B_1M = a^2\sqrt{2} \Rightarrow B_1M = \dfrac{4a}{3}$.▲





3. В правилна четириъгълна пирамида $ABCDM$ с връх M, височина 3 и околен ръб 5 точките P и Q са средите на AB и BC. Да се намери разстоянието от D до равнината (PQM).

4. Основата на четириъгълна пирамида $ABCDM$ е квадрат $ABCD$ и $MC \perp (ABC)$. Намерете мярката на двустенния $\angle(ABC;BCM)$ и линеен ъгъл на двустенния $\angle(ABC;ABM)$.

5. Основата на четириъгълна пирамида $ABCDM$ е ромб $ABCD$, $\angle BAD < 90°$ и $MC \perp (ABC)$. Намерете мярката на двустенния $\angle(ABC;BCM)$ и линеен ъгъл на двустенния $\angle(ABC;ABM)$.

6. Основата на триъгълна пирамида $ABCM$ е равностранен ΔABC и $MC \perp (ABC)$. Намерете мярката на двустенния $\angle(ABC;BCM)$ и линеен ъгъл на двустенния $\angle(ABC;ABM)$.

7. Дадена е триъгълна пирамида $ABCM$, като проекцията на върха M в равнината на основата съвпада с центъра O на вписаната в ΔABC окръжност. Намерете линеен ъгъл на двустенния $\angle(ABC;ABM)$.

8. Правилна четириъгълна пирамида има основен ръб a и двустенен ъгъл между околна стена и основата α. Намерете повърхнината на пирамидата.

3.5. Многостен

Изучени са многостените призма и пирамида.

Лицето S на околната повърхнина и на двете тела се намира, като съберем лицата на околните стени, а лицето S_1 на пълната повърхнина, като съберем лицето на околната повърхнина с лицата на двете основи за призмата или с лицето на основата за пирамидата.

Обемът V на призмата е равен на произведението от лицето на основата и височината, а на пирамидата е $\frac{1}{3}$ от произведението на лицето на основата и височината.

Призмата се нарича **права**, ако околните ръбове са перпендикулярни на равнините на основите. Права призма, на която основите са правилни многоъгълници, се нарича **правилна призма**.

Пирамида, на която основата е правилен многоъгълник и върхът се проектира в центъра на основата, се нарича **правилна пирамида**.

Триъгълната пирамида се нарича още и **тетраедър**. Ако всички ръбове на един тетраедър са равни, той се нарича **правилен тетраедър**.

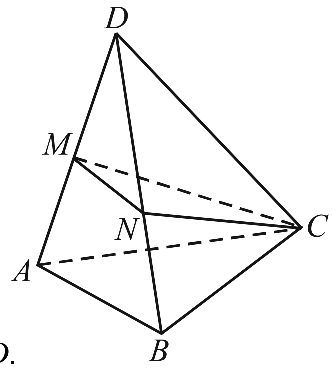
Желателно е следните формули да се помнят наизуст.

Диагоналът на куб с ръб a е равен на $a\sqrt{3}$.

Височина на правилен тетраедър с ръб a е равна на $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Със следващата задача ще покажем един метод за намиране на разстояние от точка до равнина, като изразим обема на един многостен по два начина.

1. В правилен тетраедър $ABCD$ с ръб 1 точка M е средата на ръба AD и точка N дели ръба DB в отношение $2:1$, считано от точка D. Да се намери разстоянието от точка D до равнината (CMN).



Решение. Нека търсеното разстояние е x.

Ще изразим обема на пирамидата $MNCD$ по два начина – веднъж като пирамида с основа ΔMND и височина, равна на височината на тетраедъра и втори път като пирамида с основа ΔMNC и височина – търсеното разстояние x.

Извършване на пресмятанията.

Нека $CC_1 = \frac{1.\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ е височината на правилния тетраедър $ABCD$.

I. Намираме обема на пирамидата $MNCD$ като пирамида с основа ΔMND и височина CC_1.

1) Пресмятаме S_{MND} от ΔMND, в който $DM = \frac{1}{2}$, $DN = \frac{2}{3}$ и $\angle MDN = 60°$.

$\Rightarrow S_{MND} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{12}$.

2) Намираме обема на пирамидата $MNCD$: $V_{MNCD} = \frac{CC_1}{3} S_{MND} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{36}$. (1)

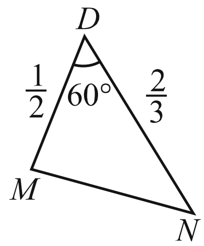
II. Изразяваме обема на пирамидата $MNCD$ като пирамида с основа ΔMNC и височина x.

$V_{MNCD} = \frac{1}{3}.S_{MNC}.x$. (2)

За намирането лицето на ΔMNC ще постъпим по следния начин: намираме трите му страни, намираме косинуса и след това синуса на ъгъла при върха C и накрая намираме лицето. (Намирането на лицето на триъгълника по Хероновата формула е неподходящо поради многото корени, които се получават за страните.)

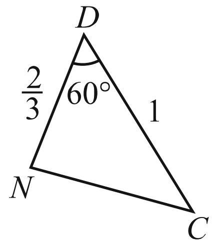
1) Страната $CM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (от равностранния триъгълник ΔACD).

2) Намираме страната MN по косинусовата теорема за ΔMND.



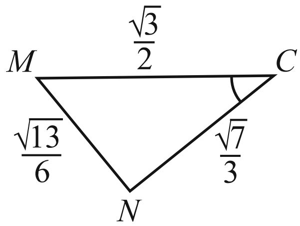
$$MN = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{4}{9}-2.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\cos 60°} = \frac{\sqrt{13}}{6}.$$

3) Намираме страната NC по косинусовата теорема за ΔNCD.



$$NC = \sqrt{\frac{4}{9}+1-2.\frac{2}{3}.1.\cos 60°} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

4) Намираме косинуса на $\angle MCN$ по косинусовата теорема за страната MN в ΔMNC.



$$\cos\angle MCN = \frac{MC^2+CN^2-MN^2}{2.MC.CN} = \frac{\sqrt{21}}{6}.$$

5) Намираме синуса на $\angle MCN$.

$$\sin\angle MCN = \sqrt{1-\cos^2\angle MCN} = \frac{\sqrt{15}}{6}.$$

6) Намираме лицето на ΔMNC. $S_{MNC} = \dfrac{MC.CN.\sin\angle MCN}{2} = \dfrac{\sqrt{35}}{24}$. (3)

Сега от (1), (2) и (3) окончателно получаваме $x = \dfrac{3.V_{MNCD}}{S_{MNC}} = \dfrac{3.\frac{\sqrt{2}}{36}}{\frac{\sqrt{35}}{24}} = \dfrac{2\sqrt{70}}{35}$.▲

2. В куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M е среда на ръба $A_1D_1 = 1$ и точка N е от ръба D_1C_1, така че $D_1N = 2C_1N$. Да се намери разстоянието от точка B_1 до равнината (MBN).

3. Основата на пирамидата $ABCDM$ е ромбът $ABCD$. Околният ръб BM е перпендикулярен на равнината на основата. Страната и диагоналът BD на ромба са равни на 4, а разстоянието от върха B до околната стена е равно на $\sqrt{3}$. Да се намери обемът на пирамидата.

4. На куб с ръб a са отрязани ъглите с равнини, прекарани през средите на всеки три ръба, които излизат от един връх. Да се намери повърхнината на полученото тяло.

5. Права призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ има основа ромб с ъгъл $\angle BAD = 60°$ и страна $4\sqrt{2}$ и околен ръб 2. Да се намери ъгълът между правите AC и D_1M, където M е средата на DC.

6. Основата на триъгълна пирамида е равностранен триъгълник със страна 7 cm. Дължината на двата ѝ околни ръба са по 7 cm, а дължината на третия ръб е 10 cm. Да се намери обемът на пирамидата и ъгъл φ между височината и големия околен ръб .

7. Да се намерят обемът и повърхнината на правилна триъгълна призма, ако височината ѝ е 8 cm и вписаната в основата окръжност има радиус 2 cm.

8. В триъгълна пирамида $ABCM$ околната стена BCM е перпендикулярна на равнината на основата ABC. Намерете обема на пирамидата, ако $MC = MB = 1$ и ъглите между околните ръбове на всяка стена са по $60°$.

9. Основният ръб на правилна четириъгълна пирамида е a и околният ръб образува с равнината на основата ъгъл α. Намерете околната повърхнина и обема на пирамидата.

10. Основата на права призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е равнобедрен трапец $ABCD$ с основи $AB = 3CD = 3a$ и височина a. Да се намери обемът на призмата, ако $\cos\angle BDB_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{21}}$.

11. Нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е правилна четириъгълна призма и нека лицето на четириъгълника AB_1C_1D е $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Намерете обема на призмата, ако $\cos\angle BAB_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

12. Върху околните ръбове AA_1, BB_1 и CC_1 на правилна триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ са взети съответно точки A_2, B_2 и C_2, така че $A_1A_2 = BB_2 = CC_2$ и $A_1A_2 : AA_2 = 1:3$. Да се намери в какво отношение равнината $(A_2B_2C_2)$ разделя обема на призмата, считано от (ABC).

3.6. Сечение на многостен с равнина

1) Сечение на многостен с равнина

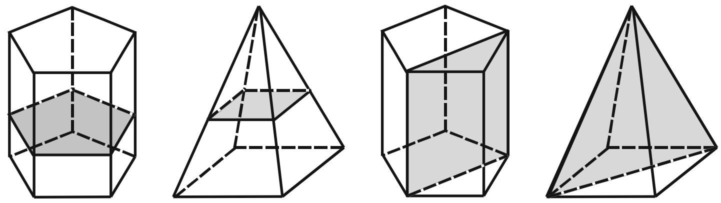
Определение. Сечение на многостен с равнина се нарича множеството от точки, които са общи за многостена и равнината.

Нека равнина α пресича ръбовете на многостена в точки $M_1M_2,...,M_k$. Многоъгълникът $M_1M_2,...,M_k$ е сечението на дадения многостен с равнината α.

Нека многостенът е призма или пирамида.

– Ако равнината α е успоредна на основата, сечението се нарича **успоредно сечение**.

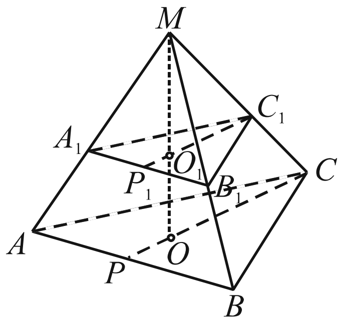
– Ако равнината α минава през два несъседни околни ръба, сечението се нарича **диагонално сечение**.



Теорема 1. Свойства на успоредните сечения на пирамида

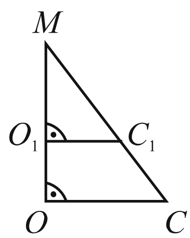
1. Успоредните сечения на пирамида са подобни многоъгълници;
2. Отношенията на лицата на две успоредни сечения на пирамида е равно на отношението на квадратите на разстоянията им до върха.

Доказателство. Доказателството ще извършим за триъгълна пирамида. Нека ABC и $A_1B_1C_1$ са две успоредни сечения на пирамидата $ABCM$ и проекцията на върха M съответно в двете сечения е O и O_1.



Равнините (ABC) и $(A_1B_1C_1)$ са успоредни, следователно пресечниците им с околните стени на пирамидата са успоредни прави, т.е. $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$ и $AC \parallel A_1C_1$. Тогава, прилагайки теоремата на Талес за всеки от околните триъгълници, получаваме $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{MA}{MA_1} = \dfrac{MB}{MB_1} = k$, $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{MB}{MB_1} = k$ и $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{MA}{MA_1} = k$.

Следователно $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ с коефициент k и значи $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$.

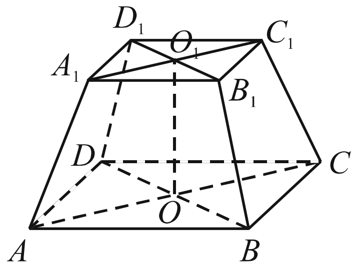


В ΔOCM $OC \parallel O_1C_1$ $\Rightarrow$ $\dfrac{MO}{MO_1} = \dfrac{MC}{MC_1} = k$ $\Rightarrow$ $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2 = \dfrac{MO^2}{MO_1^2}$. ▲

2) Пресечена пирамида

Определение. Частта от пирамида между две нейни успоредни сечения се нарича **пресечена пирамида**.

Ако пресечена пирамида е получена посредством успоредно сечение от правилна пирамида, то тя се нарича **правилна пресечена пирамида.**



Елементите на правилна пресечената пирамида са:

– $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ – основи;

– страните на $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – основни ръбове;

– AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 – околни ръбове;

– OO_1 – височина;

– ABB_1A_1, BCC_1B_1, DCC_1D_1 и ADD_1A_1 – околни стени.

Всички околни стени на правилна пресечена пирамида са еднакви равнобедрени трапеци.

Височината на околна стена на правилна пресечена пирамида се нарича **апотема**.

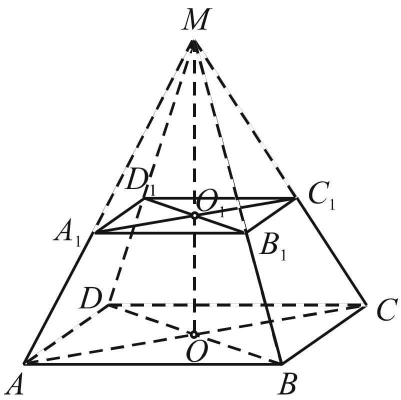
Една правилна пресечена пирамида е определена, ако са дадени основните ѝ ръбове и височината.

3) Лице на повърхнина и обем на пресечена пирамида.

Лице на околна повърхнина на пресечена пирамида се нарича сборът от лицата на околните стени, а **лице на повърхнина** е сборът от лицето на околната повърхнина и лицата на основите.

Теорема 2. Обемът на пресечена пирамида с височина h и лица на основите B и B_1 е $V=\dfrac{h}{3}\left(B+B_1+\sqrt{BB_1}\right)$.

Доказателство. Нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е пресечена пирамида, която в получена от пирамидата $ABCDM$ (виж чертежа).



Да означим с H височината MO на пирамидата $ABCDM$, с V_1 – обема на пирамидата $A_1B_1C_1D_1M$ и с V_2 – обема на пирамидата $ABCDM$.

За обема V на пресечената пирамида намираме:

$$V=V_2-V_1=\frac{BH}{3}-\frac{B_1(H-h)}{3}=\frac{1}{3}\left(H(B-B_1)+B_1h\right) \qquad (1)$$

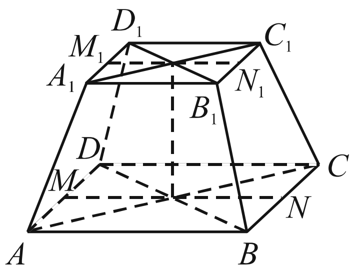
От свойство 2. на успоредните сечения на пирамидата ще получим израз за H:

$\dfrac{B}{B_1}=\dfrac{H^2}{(H-h)^2}$, $\quad \dfrac{H}{H-h}=\dfrac{\sqrt{B}}{\sqrt{B_1}}$, $\quad H=\dfrac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{B_1}}$. Заместваме получения израз в (1):

$$\Rightarrow\ V=\frac{1}{3}\left(\frac{h\sqrt{B}(B-B_1)}{\sqrt{B}-\sqrt{B_1}}+hB_1\right)=\frac{h}{3}\left(\sqrt{B}\left(\sqrt{B}+\sqrt{B_1}\right)+B_1\right)\quad\Rightarrow\quad V=\frac{h}{3}\left(B+B_1+\sqrt{BB_1}\right).\blacktriangle$$

1. Дадена е правилна четириъгълна пресечена пирамида $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с голяма основа $ABCD$ със страна a, малка основа $A_1B_1C_1D_1$ със страна b и височина на пресечената пирамида h. Да се намери апотемата на пресечената пирамида.

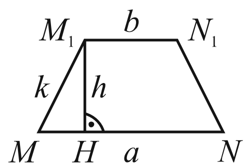
Решение.



Нека M, N, M_1 и N_1 са средите съответно на AD, BC, A_1D_1 и B_1C_1 и да означим с k апотемата на пресечената пирамида.

Тогава четириъгълникът MNN_1M_1 е равнобедрен трапец с основи $MN=a$, $M_1N_1=b$, височина h и бедра $MM_1=NN_1=k$.

От ΔMHM_1 (виж чертежа) намираме:



$$k^2=h^2+MH^2=h^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=h^2+\frac{(a-b)^2}{4}.$$

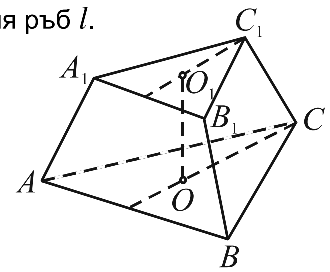
$$\Rightarrow\ k=\sqrt{h^2+\frac{(a-b)^2}{4}}.\blacktriangle$$

2. Намерете височината, лицето на повърхнината и обема на правилна четириъгълна пресечена пирамида, ако основните ръбове и апотемата са съответно равни на:
а) a, b и k;
б) 9, 3 и 5;
в) 4, 2 и $\sqrt{2}$.

3. Дадена е правилна триъгълна пресечена пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с голяма основа ABC със страна a, малка основа $A_1B_1C_1$ със страна b и височина на пресечената пирамида h. Да се намери апотемата на пресечената пирамида.

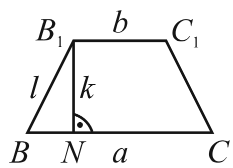
Решение.

Да означим с k апотемата на пресечената пирамида.



1) От равнобедрения трапец BCC_1B_1 (виж чертежа) намираме околния ръб l.

$l^2 = k^2 + \dfrac{(a-b)^2}{4}$. (1)

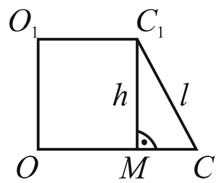


2) В правоъгълния трапец OCC_1O_1 (виж чертежа) наклоненото бедро $CC_1 = l$ и $C_1M = h$. Основите са

$$OC = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ и } O_1C_1 = \frac{2}{3}\frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{b\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow$$

$$MC = OC - O_1C_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{b\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(a-b), \quad MC^2 = \frac{(a-b)^2}{3}.$$

От ΔMCC_1 имаме $l^2 = h^2 + MC^2$, $l^2 = h^2 + \dfrac{(a-b)^2}{3}$. (2)



3) От (1) и (2) получаваме $k^2 + \dfrac{(a-b)^2}{4} = h^2 + \dfrac{(a-b)^2}{3}$, откъдето

$k^2 = h^2 + \dfrac{(a-b)^2}{12}$ и $k = \sqrt{h^2 + \dfrac{(a-b)^2}{12}}$.▲

4. Да се намери околният ръб и обемът на правилна триъгълна пресечена пирамида, ако:
а) основните ѝ ръбове са 7 cm и 1 cm и апотемата е $\sqrt{7}$ cm;
б) основните ѝ ръбове са 8 cm и 2 cm и апотемата е $2\sqrt{3}$ cm;

5. Кутийка за пръстен има форма на правилна четириъгълна пресечена пирамида с ръб на малката основа 2 cm и апотема 5 cm. Дизайнерът на кутията трябва да избере дали височината на пресечената пирамида да бъде 3 cm или 4 cm. Коя височина да избере, ако иска кутията да има по-малък обем? С колко cm^3 обемът ще е по-голям, ако се наложи да избере другата височина?

6. Правилна пресечена пирамида има основни ръбове a и b и височина h. Да се намери обемът на пресечената пирамида, ако:
а) тя е триъгълна;
б) тя е четириъгълна.

7. В правилна триъгълна пресечена пирамида отношението на основните ръбове е $2{:}1$. Да се намери отношението на обемите на телата, получени при пресичането на пресечената пирамида с равнина:
а) през ръб на долната основа и срещулежащ връх на горната основа;
б) през ръб на горната основа и срещулежащ връх на долната основа.

8. В правилна триъгълна пресечена пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с ръбове $AB = 7$, $A_1B_1 = 1$ и апотема, равна на $\sqrt{5}$ отношението на височината към околния ръб е:

☒ **А)** $\sqrt{7}:7$

Б) $7:\sqrt{7}$

В) $1:7$

Г) $\sqrt{7}:1$

9. Намерете дължините на основните ръбове на правилна триъгълна пресечена пирамида с апотема 3, височина $\sqrt{6}$ и обем $39\sqrt{2}$.

☒ **А)** 10 и 4

Б) 9 и 3

В) 8 и 2

Г) 7 и 1

10. Намерете околния ръб на правилна триъгълна пресечена пирамида, ако височината и апотемата са съответно $\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}$.

☒ **А)** $\sqrt{13}$

Б) $\sqrt{14}$

В) $\sqrt{15}$

Г) $\sqrt{18}$

11. В пирамидата $ABCM$ с основа ABC MO е височина ($O \in (ABC)$). Успоредно сечение на пирамидата пресича правите $AM,$ $BM,$ CM и OM съответно в точки $A_{1,}$ B_1, C_1 и O_1. Отношението от лица $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}$ е равно на:

☒ **А)** $\frac{MO_1}{OO_1}$

Б) $\frac{MO_1^2}{OO_1^2}$

В) $\frac{MO_1}{MO}$

Г) $\frac{MO_1^2}{MO^2}$

12. Пирамида е пресечена с равнина, успоредна на основата и минаваща през средата на височината. Каква част от обема на дадената пирамида е обемът на получената пресечена пирамида?

☒ **А)** $\frac{3}{4}$

Б) $\frac{5}{6}$

В) $\frac{6}{7}$

Г) $\frac{7}{8}$

3.7. Построяване на сечение на многостен с равнина

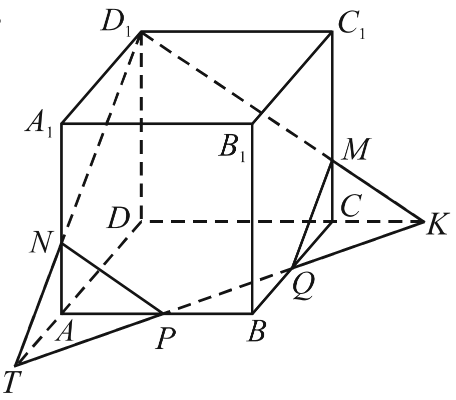
Да преговорим: Сечение на многостен с равнина α е многоъгълникът $M_1M_2...M_k$, където M_1, M_2, ..., M_k са точките, в които равнината α пресича многостена. Да построим сечението означава да намерим точките M_1, M_2, ..., M_k.

Ще разгледаме два основни метода за построяване на сечение.

1) Метод на пресечниците.

Ако стена на многостена и равнината α на сечението не са успоредни, те се пресичат. Тогава достатъчно е да намерим тяхната пресечница и след това да определим пресечните ѝ точки с ръбовете на многостена.

1. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Да се построи сечението на куба с равнината α, определена от върха D_1 и средите P и Q съответно на ръбовете AB и BC.



Решение.

1) В равнината $(ABCD)$ точките P и Q са от сечението и значи правата $PQ \subset \alpha$.

2) Нека $PQ \cap DC = K \Rightarrow K \in \alpha$, (защото $PQ \subset \alpha$) и $K \in (DCC_1D_1) \Rightarrow$ в равнината (DCC_1D_1) намерихме две точки от равнината α – $KD_1 = \alpha \cap (DCC_1D_1)$.

3) В равнината (DCC_1D_1) намираме $M = D_1K \cap CC_1$.

4) В равнината (BCC_1B_1) свързваме точките Q и M.

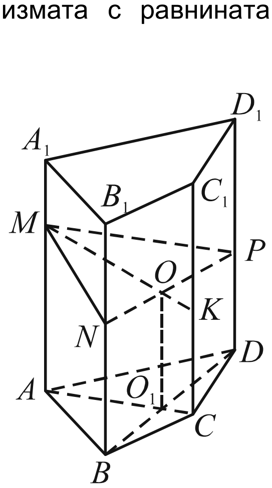
5) Нека $PQ \cap AD = T \Rightarrow T \in \alpha$ (защото $PQ \subset \alpha$) и $T \in (ADD_1A_1) \Rightarrow TD_1 \subset \alpha$.

6) В равнината (ABB_1A_1) свързваме точките P и N.

Търсеното сечение е петоъгълникът $PQMD_1N$. ▲

2) Метод на проектирането.

2. Дадена е права четириъгълна призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Върху ръбовете AA_1, BB_1 и DD_1 са взети съответно точки M, N и P. Да се построи сечението на призмата с равнината $\alpha = (MNP)$.



Решение. Знаем точките, в които α пресича ръбовете AA_1, BB_1 и DD_1. Търсим пресечната точка на α с ръба CC_1.

Тъй като $CC_1 \parallel AA_1$ и α пресича AA_1, то (по теорема) α пресича и правата CC_1. Ще разгледаме случая, когато α пресича отсечката CC_1.

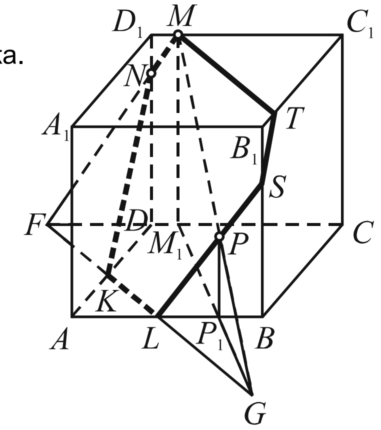
Да проектираме сечението върху равнината $(ABCD)$ на основата. Получаваме, че диагоналите AC и BD са проекции на диагоналите на сечението и пресечната им точка O_1 е проекция на пресечната точка O на диагоналите на сечението. Тогава точка O намираме, като прекараме права през O_1, успоредна на AA_1, до пресичането ѝ с диагонала NP. Сега диагоналът MO е напълно определен и пресечната му точка K с ръба CC_1 е четвъртият връх на сечението – $MNKP$. ▲

Сега ще покажем пример, в който се използват и двата метода.

3. Да се построи сечението на куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с равнина α, определена от точките M и N съответно от ръбовете C_1D_1 и DD_1 и точка P от стената ABB_1A_1.

Решение.

Нека точките M, N и P са разположени, както е показано на чертежа.



1) В равнината (DCC_1D_1) построяваме $F = MN \cap DC$, $F \in MN \subset \alpha$.

2) Правата MP от равнината на сечението е наклонена спрямо $(ABCD)$. Прободът на MP с $(ABCD)$ е пресечната ѝ точка с ортогоналната ѝ проекция в $(ABCD)$. Нека $M_1P_1 = \text{пр}_{(ABC)}MP$ и $M_1P_1 \cap MP = G$, $G \in \alpha$.

3) В $(ABCD)$ $FG \in \alpha$ и FG пресича AD и AB съответно в точки K и L.

4) В (ABB_1A_1) $LP \cap BB_1 = S$.

5) Тъй като $(ABCD) \parallel (A_1B_1C_1D_1)$, то и пресечниците им с α са успоредни. Тогава през точка M построяваме права, успоредна на KL, която пресича B_1C_1 в точка T.

6) В (BCC_1B_1) свързваме S и T.

Сечението е $KLSTMN$.▲

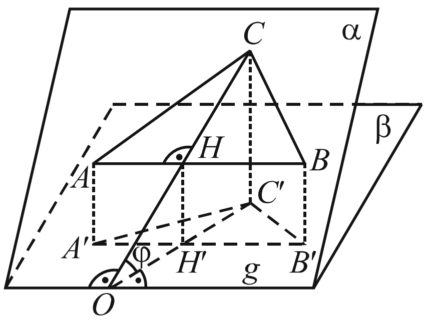
3) Лице на ортогонална проекция на многоъгълник

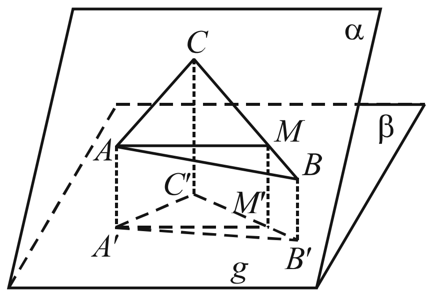
Теорема. Ако многоъгълник в равнина α има лице S, ортогоналната му проекция в равнина β има лице S' и ъгълът между α и β е $\varphi \neq 90°$, то $S' = S\cos\varphi$.

Доказателство. Нека $\alpha \cap \beta = g$ и $\angle(\alpha, \beta) = \varphi \neq 90°$.

Първо ще докажем теоремата за триъгълник.

Нека $\Delta ABC \subset \alpha$ има лице S и ортогоналната му проекция $\Delta A'B'C'$ в β има лице S'.





Ще разгледаме два случая.

I. случай. Една от страните на ΔABC е успоредна на g.

Нека $AB \parallel g \Rightarrow AB \parallel \beta \Rightarrow A'B' \parallel AB$ и $A'B' = AB$.

Нека $CH \perp AB$ е височина в ΔABC и $H' = \text{пр}H$.

Нека $CH \cap g = O \Rightarrow CO \perp g$, $C'O = \text{пр}CO$ и от теоремата за трите перпендикуляра получаваме, че $C'O \perp g \Rightarrow C'H'$ е височина в $\Delta A'B'C'$ и $\angle COC' = \angle(\alpha, \beta) = \varphi$. Сега от урок 3.3., задача 1 получаваме, че $C'H' = CH\cos\varphi$.

За лицето S' намираме: $S' = \dfrac{A'B'.C'H'}{2} = \dfrac{AB.CH\cos\varphi}{2} = S\cos\varphi$.

II. случай. Никоя от страните на ΔABC не е успоредна на g.

През един от върховете на ΔABC построяваме права, успоредна на g, която го разделя на два триъгълника, за които е в сила доказаното в I. случай. За лицата S_1 и S_2 на тези триъгълници и съответно лицата S_1' и S_2' на ортогоналните им проекции имаме: $S_1' = S_1 \cos\varphi$ и $S_2' = S_2 \cos\varphi$. Събираме почленно тези две равенства:

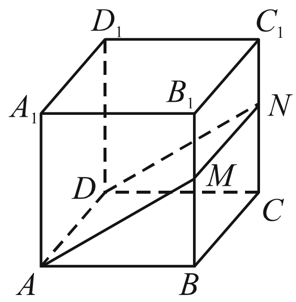
$S_1' + S_2' = S_1 \cos\varphi + S_2 \cos\varphi = \left(S_1 + S_2\right)\cos\varphi$. Окончателно получаваме $S' = S\cos\varphi$.

За произволен многоъгълник теоремата се доказва, като многоъгълникът се раздели на триъгълници и се приложи теоремата за триъгълниците.▲

Твърдението на теоремата може да се запише и така:

$S_{\text{пр}} = S\cos\varphi$, където $S_{\text{пр}}$ е лицето на проекцията на многоъгълника.

4. Да се намери лицето на сечението на куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с равнина α, минаваща през ръба AD и сключваща $30°$ с равнината (ABC), ако ръбът на куба е a.



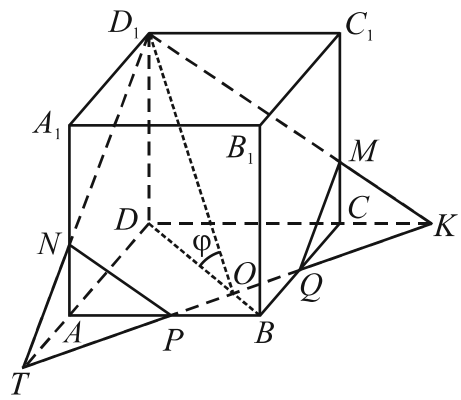
Решение. Нека α пресича ръбовете BB_1 и CC_1 съответно в точки M и N.

Сечението е $AMND$. Неговата ортогонална проекция в (ABC) е квадратът $ABCD$ с лице a^2. От теоремата $S_{\text{пр}} = S_{AMND}\cos\varphi$,

получаваме $a^2 = S_{AMND}\cos 30° \quad \Rightarrow \quad S_{AMND} = \dfrac{2\sqrt{3}a^2}{3}$.▲

5. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб a. Да се намери лицето на сечението на куба с равнина α, определена от върха D_1 и средите P и Q съответно на ръбовете AB и BC.

Решение. Сечението е построено в задача 1 от урока.



Пресечницата на α и (ABC) е PQ.

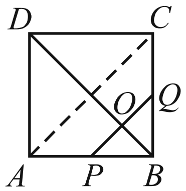
Да означим $\angle(\alpha, ABC) = \varphi$.

Нека $BD \cap PQ = O$, $BD \perp PQ$ и $\Rightarrow$ $DO \perp PQ$.

$DO = \text{пр}D_1O \quad \Rightarrow \quad D_1O \perp PQ$ (по теоремата за трите перпендикуляра) $\Rightarrow \angle D_1OD = \varphi$.

$DO = \dfrac{3}{4}BD = \dfrac{3\sqrt{2}a}{4}$ и $DD_1 = a$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{DD_1}{DO} = \dfrac{4a}{3\sqrt{2}a} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.



От формулата $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ намираме $\cos\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{17}}$ (използвали сме, че φ е остър ъгъл).

Проекцията на сечението върху (ABC) е петоъгълникът $APQCD$ с лице $S_{\text{пр}} = a^2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{2}\dfrac{a}{2} = \dfrac{7}{8}a^2$. От теоремата $S_{\text{пр}} = S_{PQMD_1N}\cos\varphi$, $\Rightarrow S_{PQMD_1N} = \dfrac{7a^2}{8} : \dfrac{3}{\sqrt{17}} = \dfrac{7\sqrt{17}a^2}{24}$.▲

6. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точките M и N са средите съответно на AB и BC. Да се построи и определи видът на сечението на куба с равнина (MNP), където:

а) P е средата на DD_1;
б) P е средата на A_1D_1;
в) P е средата на B_1C_1;
г) P е средата на BB_1.

7. Дадена е правилна триъгълна пирамида $ABCD$ с връх D. Точка $M \in AB$ и $AM : MB = 2:1$, точка $N \in BC$ и $BN : NC = 2:1$ и P е средата на AD. Да се построи сечението на пирамидата с равнината (MNP).

8. Даден е правоъгълен паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M е средата на AB и $O = BC_1 \cap CB_1$. Да се построи сечението на паралелепипеда с равнината (DMO).

9. Дадена правилна четириъгълна призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точките M и N са средите съответно на AB и BC. Да се построи сечението на призмата с равнина, минаваща през точките M и N и успоредна на BD_1.

10. В куб с диагонал 6 cm е прекарана равнина, която минава през основния ръб и образува с равнината на основата $30°$.

а) Определете вида на полученото сечение.

б) Намерете обемите на двете части, на които се разделя кубът от сечението.

11. Основните ръбове на правоъгълен паралелепипед са $a = 4$ cm и $b = 3$ cm и диагоналът му сключва с малката околна стена ъгъл $30°$. Да се намерят обемът на паралелепипеда, лицето на диагоналното сечение и лицето на сечението, което минава през двата малки срещуположни ръба.

12. Основният ръб на правилна триъгълна пирамида е 7 cm и височината ѝ е 28 cm. През основния ръб минава сечение, перпендикулярно на срещуположния околен ръб. Да се намери лицето на сечението.

13. Правоъгълен триъгълник с катети a и b е основа на пирамида. Да се намери обемът на пирамидата, ако околните ѝ ръбове сключват с равнината на основата ъгли, равни на α.

14. През средите на два съседни околни ръба в правилна четириъгълна пирамида е прекарано сечение, перпендикулярно на основата ѝ. Да се намери лицето на това сечение, ако лицето на диагоналното сечение на пирамидата е Q.

15. Двустенният ъгъл между съседните околни стени в правилна четириъгълна пирамида е $120°$ и лицето на сечението, минаващо през диагонал на основата, перпендикулярно на околен ръб, е $6\sqrt{3}$ cm^2. Да се намери обемът на пирамидата.

16. През връх на основата в правилна четириъгълна пирамида е прекарано сечение, перпендикулярно на срещуположния околен ръб. Да се намери лицето на сечението, ако основният ръб е a, а околният ръб сключва с равнината на основата ъгъл $60°$.

17. Основата на една пирамида е равнобедрен триъгълник с бедро a и ъгъл $120°$. Околният ръб на пирамидата, който минава през върха на тъпия ъгъл на основата е перпендикулярен на нея, а другите два околни ръба образуват с основата ъгъл α. Намерете лицето на сечението, което се получава, като пресечем пирамидата с равнина, минаваща през ръба на основата, лежащ срещу $120°$ и през средата на перпендикулярния околен ръб на пирамидата.

18. Основният ръб на правилна триъгълна призма има дължина a. През средите на две от страните на долната основа е прекарана равнина α, образуваща с равнината на основата $60°$, която пресича точно един от околните ръбове и го разделя в отношение $2:3$. считано от равнината на долната основа. Намерете лицето на полученото сечение и околната повърхнина на призмата.

19. Дадена е правилна четириъгълна пирамида $ABCDM$ с връх M. През средите на ръбовете AB, AD и MC е прекарана равнина. В какво отношение тази равнина дели обема на пирамидата?

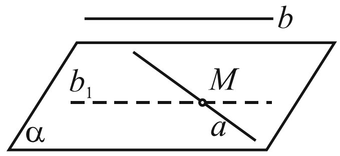
20. В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M с медицентърът на ΔABD. Да се построи сечението на куба с равнината (B_1C_1M) . Да се определи видът на сечението и да се намери лицето му, ако ръбът а кубът е a.

21. В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M с медицентърът на ΔABD. Да се построи сечението на куба с равнината (B_1D_1M) . Да се определи видът на сечението и да се намери лицето му, ако ръбът на кубът е a.

3.8. Ос на кръстосани прави

Да преговорим: две прави в пространството се наричат кръстосани, ако не лежат в една равнина.

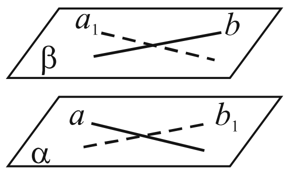
Теорема 1. Да се докаже, че през всяка от две кръстосани прави минава точно една равнина, успоредна на другата.



Доказателство. Нека a и b са две кръстосани прави и точка M е произволна от правата a. През M построяваме права $b_1 \parallel b$ и нека $\alpha = (a, b_1) \Rightarrow \alpha \parallel b$ (защото съдържа права, успоредна на b). Ще докажем, че няма друга равнина, минаваща през a и успоредна на b.

Наистина, ако равнина $\beta \supset a$ и $\beta \parallel b$, тогава a е пресечницата на α и β. От друга страна b е успоредна както на α, така и на β, следователно b е успоредна на тяхната пресечница a. Последното е невъзможно, защото правите a и b са кръстосани и значи равнината α е единствена.▲

Теорема 2. Да се докаже, че за всеки две кръстосани прави съществува единствена двойка успоредни равнини, която ги съдържа.



Доказателство. Според Теорема 1 съществува единствена равнина α, която съдържа a и е успоредна на b: $\alpha \supset a$ и $\alpha \parallel b$.

Също така съществува единствена равнина β, която съдържа b и е успоредна на a: $\beta \supset b$ и $\beta \parallel a$. Равнините α и β са успоредни, защото по начина им на построение всяка от тях съдържа две пресичащи се прави, успоредни на другата равнина.▲

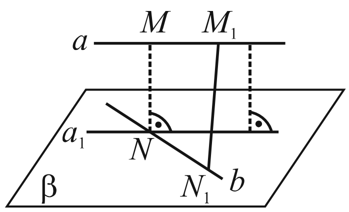
Определение. Правата, която пресича две дадени кръстосани прави под прав ъгъл, се нарича **ос на кръстосаните прави**. Отсечката от оста с краища върху дадените прави се нарича **ос-отсечка** на кръстосаните прави.

Теорема 3. Да се докаже, че за всеки две кръстосани прави съществува единствена ос и оста-отсечка е по-малка от всяка от отсечките с краища върху правите.

Доказателство. Доказателството ще направим в три части.

Нека a и b са кръстосани прави.

1) Ще докажем, че съществува права, която пресича a и b и е перпендикулярна, както на a, така и на b (т.е. оста съществува).



Според Теорема 1 съществува равнина $\beta \supset b$ и $\beta \parallel a$. Нека $a_1 = \text{пр}_\beta a \Rightarrow a_1 \parallel a \Rightarrow a_1 \cap b = N$ (ако $a_1 \parallel b$, ще получим, че $b \parallel a$). Нека $M \in a$, така че $N = \text{пр}_\beta M \Rightarrow MN \perp \beta \Rightarrow MN \perp b$ (защото $b \subset \beta$). Също така $MN \perp a$ (по построение).

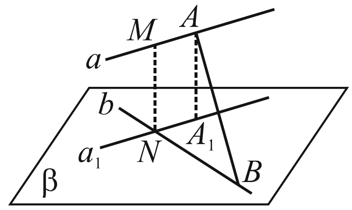
Правата MN е търсената ос – тя пресича и a и b под прав ъгъл.

2) Ще докажем, че правите a и b нямат друга ос. Да допуснем, че съществува друга права M_1N_1 ($M_1 \in a$, $N_1 \in b$, $M_1 \neq M$, $N_1 \neq N$), $M_1N_1 \perp a$ и $M_1N_1 \perp b$. Тъй като $a_1 \parallel a$, то $M_1N_1 \perp a_1$ $\Rightarrow M_1N_1 \perp \beta$ (защото е перпендикулярна на две пресичащи се прави a_1 и b от β).

Получихме, че правите MN и M_1N_1 са перпендикулярни на една и съща равнина β, следователно са успоредни, $MN \parallel M_1N_1$ и значи определят една равнина. Тогава в тази равнина ще лежат и правите a и b (всяка от тях има по две общи точки с тази равнина), което противоречи на условието, че те са кръстосани. Ако $M_1 \equiv M$ или $N_1 \equiv N$, се получават два перпендикуляра през тока към равнина, което също е противоречие.

3) Ще докажем, че отсечката MN е по-малка от всяка от отсечките с краища върху a и b.

Нека $A \in a$ и $B \in b$, като точките A и B е различна съответно от M и N. Нека $A_1 = \text{пр}_\beta A \Rightarrow AA_1 < AB$ (перпендикулярът е по-малък от наклонената) и $AA_1 = MN$ (защото MNA_1A е успоредник) $\Rightarrow$ $MN < AB$. Ако $A \equiv M$ или $B \equiv N$, то AB е хипотенуза, а MN е катет и отново $MN < AB$.▲



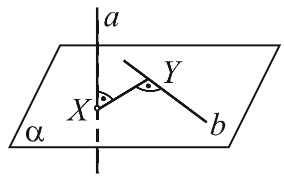
Определение. Разстояние между две кръстосани прави се нарича дължината на оста-отсечка.

1. Ако равнина е перпендикулярна на едната от две кръстосани прави и съдържа другата, то оста-отсечка е перпендикулярът от пробода на първата права до втората.

Решение. Нека a и b са две кръстосани прави, $\alpha \perp a$ и $\alpha \supset b$. Нека $a \cap \alpha = X$ и в равнината α построяваме $XY \perp b$, $Y \in b$.

Също така $XY \perp a$ (защото $a \perp \alpha$ и $XY \subset \alpha$)

$\Rightarrow$ XY е оста-отсечка на a и b.▲



<u>Разстоянието между две кръстосани прави можем да намерим като:</u>

1) дължината на оста-отсечка (задача 2 а),б), в));

2) разстоянието от едната права до равнината, съдържаща другата и успоредна на първата (задача 3);

3) разстоянието между двете успоредни равнини, които съдържат кръстосаните прави (задача 2 д));

4) използваме метода от задача 1 (задача 2 г)).

<u>Забележка</u>. Разстоянието между две успоредни равнини можем да намерим като използваме определението. Тук ще формулираме и друг метод:

Пресичаме успоредните равнини с перпендикулярна на тях равнина. Търсеното разстояние е разстоянието между двете успоредни пресечници.

Ще използваме следните означения:

$d(a,b)$ – разстояние между правите a и b;

$d(a,\alpha)$ – разстояние между правата a и равнината α;

$d(\alpha,\beta)$ – разстояние между равнините α и β;

$d(A,\alpha)$ – разстояние от точката A до равнината α.

2. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб a. Да се намери разстоянието между:

а) ръб и кръстосан с него диагонал на стена, успоредна на ръба;

б) ръб и кръстосан с него диагонал на стена, перпендикулярна на ръба;

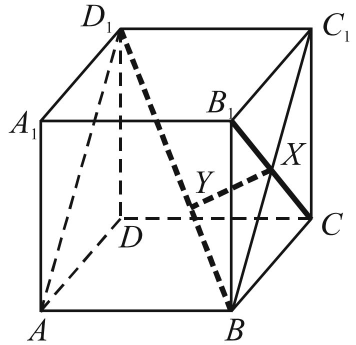
в) ръб и кръстосан с него диагонал на куба;

г) диагонал на стена и кръстосан с него диагонал на куба;

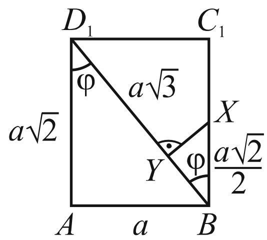
д) два кръстосани диагонала в съседни стени.

Решение. г) Ще намерим $d(CB_1, BD_1)$.

Равнината $(ABC_1D_1) \perp CB_1$ (защото CB_1 е перпендикулярна на две пресичащи се прави BC_1 и AB от равнината), съдържа BD_1 и $CB_1 \cap ABC_1D_1 = X$ където X е пресечната точка на диагоналите в стената BCC_1B_1. Тогава, според задача 1, оста-отсечка е



перпендикулярът от X към BD_1 в равнината (ABC_1D_1) (виж чертежа).



Имаме: $AD_1 = a\sqrt{2}$, $BD_1 = a\sqrt{3}$, $BX = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

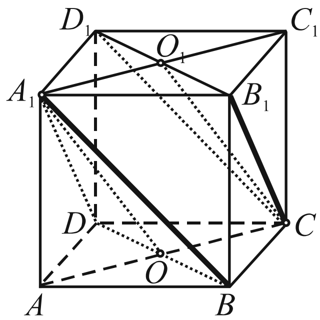
Нека $\varphi = \angle AD_1B = \angle C_1BD_1$, $\sin\varphi = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow XY = BX\sin\varphi = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

д) Ще намерим $d = d(BA_1, CB_1)$. Да означим $\alpha = (DBA_1)$ и $\beta = (CB_1D_1)$.

Имаме: $BA_1 \subset \alpha$ и $\alpha \parallel CB_1$ (от $CB_1 \parallel DA_1$)

$CB_1 \subset \beta$ и $\beta \parallel BA_1$ (от $BA_1 \parallel CD_1$)

$\Rightarrow$ α и β са двойката успоредни равнини, които съдържат BA_1 и CB_1 $\Rightarrow$ $d = d(\alpha, \beta)$.

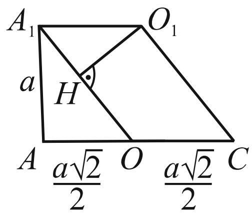


Разстоянието между успоредните равнини α и β намираме по описания вече в горната забележка метод – пресичаме успоредните равнини α и β с перпендикулярна на тях равнина. Търсеното разстояние е разстоянието между двете успоредни пресечници

Равнината $(ACC_1A_1) \perp \alpha$. Наистина, имаме $DO \perp AC$ и $DO \perp AA_1 \Rightarrow DO \perp (ACC_1A_1)$ и понеже α съдържа правата DO, то $\alpha \perp (ACC_1A_1)$. $(ACC_1A_1) \perp \beta$, защото $\alpha \parallel \beta$.

Пресечниците на (ACC_1A_1) с α и β са правите A_1O и O_1C и разстоянието между тях е търсеното разстояние.

В успоредника OCO_1A_1 построяваме $O_1H \perp OA_1 \Rightarrow d = d(\alpha, \beta) = O_1H$.



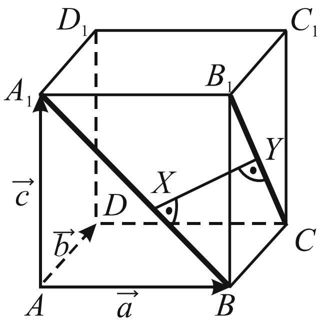
Намирането на дължината на O_1H вече е лесно.

$OA_1 = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ (от питагоровата теорема),

$O_1H.OA_1 = OC.AA_1$ (=лицето на успоредника)

$\Rightarrow \quad O_1H = \dfrac{OC.AA_1}{OA_1} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.▲

Ще решим условие д) по втори начин, като използваме векторния метод.



Нека сега ръба на куба да означим с m.

1) Избираме ортогонална пространствена база $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$ и определяме скаларните произведения на базисните вектори, които са 0 или m^2 (скаларните квадрати).

2) Изразяваме векторите $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{CB_1}$ чрез базата:

$\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1} = -\vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{CB_1} = -\vec{b} + \vec{c}$.

3) Изразяваме $\overrightarrow{XY}$ чрез базата (разположението на X и Y на чертежа е ориентировъчно; не е необходимо да се знае точното им положение).

Тъй като $\overrightarrow{XB}$ е колинеарен с $\overrightarrow{BA_1}$, то съществува единствено число x, така че $\overrightarrow{XB} = x\overrightarrow{BA_1}$. Аналогично съществува единствено число y, така че $\overrightarrow{CY} = y\overrightarrow{CB_1}$.

Сега за $\overrightarrow{XY}$ получаваме:

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XB} + \vec{b} + \overrightarrow{CY} = x\overrightarrow{BA_1} + \vec{b} + y\overrightarrow{CB_1} = x(-\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} + y(-\vec{b} + \vec{c}) = -x\vec{a} + (1-y)\vec{b} + (x+y)\vec{c}.$$

4) Числата x и y намираме, от системата, която изразява, че $XY \perp BA_1$ и $XY \perp CB_1$:

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{XY}\,\overrightarrow{BA_1} = 0 \\ \overrightarrow{XY}\,\overrightarrow{CB_1} = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \left(-x\vec{a}+(1-y)\vec{b}+(x+y)\vec{c}\right)\left(-\vec{a}+\vec{c}\right)=0 \\ \left(-x\vec{a}+(1-y)\vec{b}+(x+y)\vec{c}\right)\left(-\vec{b}+\vec{c}\right)=0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x\vec{a}^{\,2}+(x+y)\vec{c}^{\,2}=0 \\ (y-1)\vec{b}^{\,2}+(x+y)\vec{c}^{\,2}=0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} xm^2+(x+y)m^2=0 \\ (y-1)m^2+(x+y)m^2=0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2x+y=0 \\ x+2y-1=0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3},\ y=\frac{2}{3}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{XY}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c} \quad \Rightarrow |\overrightarrow{XY}|=\sqrt{\overrightarrow{XY}^{\,2}}=\sqrt{\frac{m^2}{9}+\frac{m^2}{9}+\frac{m^2}{9}}=\frac{m\sqrt{3}}{3}.\ \blacktriangle$$

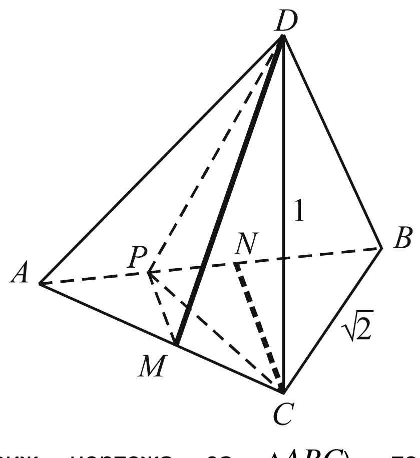
Забележка. С получаването на числата x и y можем да определим точното положение на точките X и Y.

Наистина, имаме $\overrightarrow{XB}=x\overrightarrow{BA_1}$ и $x=-\frac{1}{3}$, т.е. $\overrightarrow{BX}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA_1}$, което означа, че точка X дели отсечката BA_1 в отношение $1:2$ от точка B.

Аналогично $\overrightarrow{CY}=y\overrightarrow{CB_1}$ и $y=\frac{2}{3}$, което означа, че точка Y дели отсечката CB_1 в отношение $2:1$ от точка C.

3. Дадена е триъгълна пирамида $ABCD$ с основа равнобедрен правоъгълен триъгълник с катети $AC=BC=\sqrt{2}$ и околен ръб DC, перпендикулярен на равнината на основата и с дължина 1. Ако M и N са средите съответно на AC и AB, да се намери разстоянието между правите CN и DM.

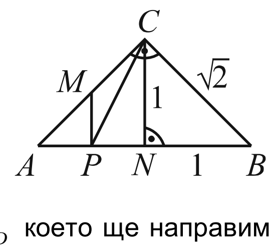
Решение. Построяваме $MP \parallel CN$, $P \in AB$.



Тъй като CN е успоредна на права от равнината (PMD), то $CN \parallel (PMD)$. Така построихме равнина, която съдържа едната от двете кръстосани прави, а именно DM и е успоредна на другата права CN. Тогава разстоянието между двете прави е равно на разстоянието от точка от CN до равнината (PMD).

Избираме точка C, за която да намерим разстоянието ѝ до (PMD). Това ще направим, като пресметнем по два начина обема на пирамидата $PMCD$ – веднъж като пирамида с основа ΔPMC; веднъж като пирамида с основа ΔPMD.

Имаме $V_{PMCD}=\frac{1}{3}.S_{PMC}.DC$ и тъй като $S_{PMC}=\frac{1}{8}$ (виж чертежа за ΔABC), то $V_{PMCD}=\frac{1}{3}.\frac{1}{8}.1=\frac{1}{24}$.



Нека $d(C,PMD)=x$.

Тогава $V_{PMCD}=\frac{1}{3}.S_{PMD}.x$ и за да намерим x, остава да пресметнем S_{PMD} което ще направим по Хероновата формула.

Пресмятаме страните на ΔPMD.

Очевидно $MP=\frac{1}{2}$.

От правоъгълния ΔMCD с катети $DC=1$ и $MC=\frac{\sqrt{2}}{2}$ намираме $DM=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

От правоъгълния ΔPCD с катети $DC=1$ и $PC=\frac{\sqrt{5}}{2}$ (виж чертежа за ΔABC) намираме $DP=\frac{3}{2}$.

$$\Rightarrow\ S_{PMD}=\sqrt{\frac{1}{4}(4+\sqrt{6}).\frac{1}{4}(2+\sqrt{6}).\frac{1}{4}(4-\sqrt{6}).\frac{1}{4}(\sqrt{6}-2)}=\frac{\sqrt{5}}{8}.$$

Окончателно $x=\frac{3V_{PMCD}}{S_{PMD}}=3.\frac{1}{24}.\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.▲

4. Дадена е правилна триъгълна пирамида $ABCM$ с връх M, основен ръб a и околен ръб b. Да се намери разстоянието между правите AM и BC.

5. Околният ръб на правилна четириъгълна пирамида $ABCDM$ с връх M има дължина a и образува с равнината на основата ъгъл α. Да се намери оста-отсечка между правите AM и BD и да се изчисли дължината ѝ.

6. Дадена е правилна четириъгълна пирамида $ABCDM$ с връх M, основен ръб a и двустенен ъгъл между околна стена и основата α. Да се намери разстоянието между правите AB и CM.

7. Дадена е парва четириъгълна призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основа ромб със страна a и $\angle BAD=60°$. Да се намери оста-отсечка между правите BD и CC_1 и да се изчисли дължината ѝ.

8. Четириъгълна пирамида $ABCDM$ има за основа ромб $ABCD$ и ръбът MC е перпендикулярен на основата. Да се намери оста-отсечка между правите AM и BD и да се изчисли дължината ѝ, ако $MC=1$, $BM=2$, $AM=3$.

9. Дадена е правилна триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ с дължина на основния и околния ръб a. Да се намери разстоянието между правите AB и CB_1.

10. Да се намери обемът на правилна триъгълна пирамида, ако околните ръбове образуват с равнината на основата ъгъл α и разстоянието между околен и основен ръб е m.

11. В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб 6 точка M е медицентърът на ΔABD и точка N е медицентърът на ΔBCC_1. Да се намери разстоянието между правите MN и AD.

3.9. Ротационни тела

1) Ротационни тела

Тяло, което се получава при завъртането на равнинна фигура около права от равнината на фигурата, се нарича ротационно тяло. Повърхнината се нарича **ротационна повърхнина**.

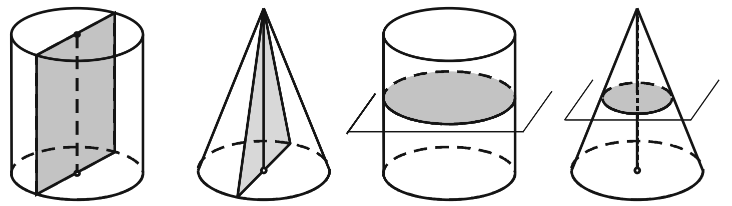
Правата, около която се върти фигурата, се нарича **ос** на ротационното тяло.

Досега сме изучили ротационните тела прав кръгов цилиндър, прав кръгов конус, сфера и кълбо.

Сечението на тялото с равнина през оста на ротационното тяло се нарича **осно сечение.**

Сечението на цилиндър с равнина, успоредна на основите на цилиндър, се нарича **успоредно сечение на цилиндър**. Всички успоредни сечения на цилиндър са кръгове, еднакви на основите.

Сечението на конус с равнина, успоредна на основата му, се нарича **успоредно сечение на конус.**

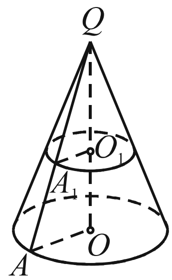


2) Успоредно сечение на конус

Теорема 1. Свойство на успоредните сечения на конус

Успоредното сечение на конус с радиус r и височина h е кръг с радиус r_1. Ако разстоянието от върха на конуса до сечението е h_1, то $\frac{r_1}{r}=\frac{h_1}{h}$ и $\frac{B_1}{B}=\frac{h_1^2}{h^2}$, където B_1 и B са съответно лицето на сечението и лицето на основата на конуса.

Доказателство. Нека QO пресича равнината на сечението в точка O_1, а произволна образуваща QA пресича сечението в точка A_1 (виж чертежа).



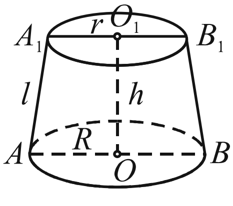
Равнината (AOQ) пресича успоредните равнини на основата и на сечението, следователно пресечниците са успоредни, т.е $OA \parallel O_1A_1$ и следователно $\Delta AOQ \sim \Delta A_1O_1Q$, откъдето намираме $\frac{A_1O_1}{AO}=\frac{QO_1}{QO}$ или $A_1O_1 = AO\frac{QO_1}{QO} = r\frac{h_1}{h}$.

Тъй като $r\frac{h_1}{h}$ е постоянно число, то разстоянието от O_1 до прободната точка на произволна образуваща с равнината на сечението е постоянно число, т.е. равнината на сечението пресича околната повърхнина на конуса в окръжност с център O_1 и радиус $r_1 = r\frac{h_1}{h} \Rightarrow \frac{r_1}{r}=\frac{h_1}{h}$. За лицата намираме $\frac{B_1}{B}=\frac{\pi r_1^2}{\pi r^2}=\frac{r_1^2}{r^2}=\frac{h_1^2}{h^2}$. ▲

3) Прав кръгов пресечен конус

Определение. Тяло, което е част от прав кръгов конус, заключена между основата на конуса и едно негово успоредно сечение, се нарича **пресечен конус.**

Елементи на пресечения конус:



Основи – основата на конуса и успоредното сечение, съответно с радиуси R и r; **ос** – отсечката (правата), която съединява центровете на двете основи; **образуваща** – отсечката от образуващата на конуса, заключена между двете основи; **височина** – разстоянието между равнините на двете основи; **околна повърхнина** – частта от околната повърхнина на конуса между двете основи.

Осно сечение на конуса – сечението на пресечения конус с равнина, минаваща през оста му.

Всяко осно сечение на пресечен конус е равнобедрен трапец с основи, равни на диаметрите $2R$ и $2r$ и бедро – образуващата на пресечения конус.

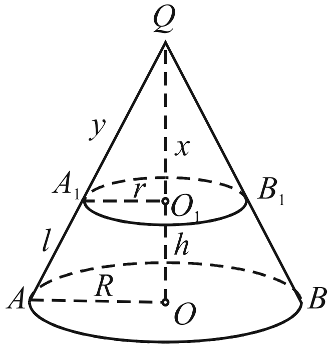
На чертежа осното сечение е трапецът ABB_1A_1

Пресеченият конус е ротационно тяло, защото може да се разглежда, като тяло, получено от въртенето на правоъгълния трапец AOO_1A_1 около перпендикулярното му бедро OO_1.

Теорема 2. Лицето на околната повърхнина на пресечен конус с радиуси на основите R и r и образуваща l е $S=\pi l(R+r)$, а лицето на повърхнината е $S_1=\pi l(R+r)+\pi R^2+\pi r^2$.

Доказателство. Според означенията на чертежа имаме

$$\Delta A_1O_1Q \sim \Delta AOQ \ \Rightarrow\ \frac{y}{l+y}=\frac{r}{R},\quad y=\frac{rl}{R-r}.$$



Изразяваме лицето на околната повърхнина на пресечения конус като разлика от лицата на околните повърхнини на двата конуса:

$$S=\pi R(l+y)-\pi ry=\pi\big(Rl+(R-r)y\big)=\pi\left(Rl+(R-r)\frac{rl}{R-r}\right).$$

Окончателно получаваме $S=\pi l(R+r)$.

Към S прибавяме и лицата на двете основи.

Получаваме $S_1=\pi l(R+r)+\pi R^2+\pi r^2$. ▲.

Теорема 3. Обемът на пресечен конус с радиуси R и r и височина h е $V=\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2)$.

Доказателство. От $\Delta A_1O_1Q \sim \Delta AOQ$ имаме $\frac{r}{R}=\frac{x}{x+h}$ (виж чертежа), $x=\frac{rh}{R-r}$.

За обема V намираме:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2(h+x)-\frac{1}{3}\pi r^2x=\frac{1}{3}\pi\big(R^2h+(R^2-r^2)x\big)=\frac{1}{3}\pi\left(R^2h+(R^2-r^2)\frac{rh}{R-r}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\big(R^2h+(R+r)rh\big)=\frac{1}{3}\pi h\big(R^2+Rr+r^2\big)$$

Окончателно получаваме $V=\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr)$.▲.

4) Сфера и кълбо

Да преговорим.

Нека O е фиксирана точка в пространството и R е положително число. Множеството от точките M в пространството, за които $OM=R$, се нарича **сфера** с център O и радиус R. Означаваме $\sigma(O,R)$.

Множеството от точките X, за които $OX\le R$, се нарича **кълбо** с център O и радиус R.

Отсечка, която свързва две точки от сферата се нарича **хорда**. Хорда, която минава през центъра на сферата, се нарича **диаметър**.

Сферата и кълбото са **ротационни тела**, защото се получават от въртенето на полуокръжност /полукръг около диаметъра.

Лицето на сфера и обемът на кълбо с радиус R се пресмятат съответно по формулите:

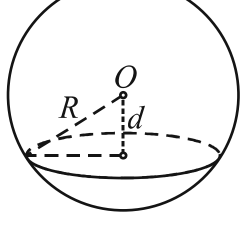
$S=4\pi R^2$ и $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

За сечението на сфера с равнина може да се докаже следната теорема.

Теорема 4. Дадени са сфера с център O и радиус R и равнина α. Нека d е разстоянието от O до α.

а) Ако $d<R$, то равнината α пресича сферата в окръжност, чийто център е ортогоналната проекция на O върху α.

б) Ако $d=R$, то равнината α и сферата имат само една обща точка T и $OT\perp\alpha$.

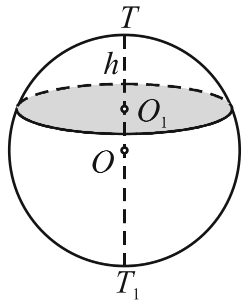


Определение. Равнина, която има само една обща точка със сферата се нарича **допирателна равнина**. Точката се нарича **допирна точка**.

Определение. Сечението на сфера с равнина, минаваща през центъра ѝ, се нарича **голяма окръжност**, а сечението с кълбото – **голям кръг**.

Радиусът на голямата окръжност е R.

Следващите определения за сферичен сегмент и сферичен слой са допълнителни към учебната програма.



Определение. Равнина, пресичаща сфера, разделя сферата на две части, всяка от които се нарича **сферичен сегмент.** Ако равнината минава през центъра на сферата, двете части се наричат **полусфери (полукълба)**.

Нека сферата е пресечена с равнина и перпендикулярът от центъра O към равнината пресича равнината в точка O_1, а сферата в точки T и T_1. Отсечката O_1T (O_1T_1) се нарича **височина на сегмента.**

Частта от сфера (кълбо), заключена между две успоредни равнини, се нарича **сферичен слой**. Разстоянието между равнините се нарича **височина на слоя**.

Сферичен сегмент с височина h има лице $S = 2\pi Rh$ и обем $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$.

1. Намерете лицето на повърхнината на сферичен слой с височина h и радиус на сферата R.

Решение. Лицето S на слоя е разлика от лицата на двата сегмента съответно с височини $h + h_1$ и h_1: $S = 2\pi R(h + h_1) - 2\pi Rh_1 = 2\pi Rh + 2\pi Rh_1 - 2\pi Rh_1 = 2\pi Rh$.▲

Формули за лице на околна повърхнина S, лице на повърхнина S_1 и обем V на цилиндър и конус и за лице на повърхнина на сфера S и обем на кълбо V.

Прав кръгов цилиндър с радиус r: $S = 2\pi rl$, $S_1 = 2\pi r(r + l)$, $V = \pi r^2 h$.

Прав кръгов конус с радиус r: $S = \pi rl$, $S_1 = \pi r(r + l)$, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Прав кръгов пресечен конус с радиуси r и R: $S = \pi l(R + r)$, $S_1 = \pi l(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$, $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$.

Сфера и кълбо с радиус R: $S = 4\pi R^2$**,** $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

<u>Цилиндър</u>

2. Намерете околната повърхнина, повърхнината и обема на цилиндър с осно сечение правоъгълник със страни 8 и 6.

3. Диагоналът на осно сечение на прав кръгов цилиндър с радиус r сключва с равнината на основата ъгъл α. Да се намерят повърхнината и обемът на цилиндъра, ако:

а) $\alpha = 60°$;

б) $\alpha = 45°$.

4. Намерете радиуса на прав кръгов цилиндър, ако лицето на осното му сечение е A и тангенсът на ъгъла между оста на цилиндъра и диагонала на осно сечение на цилиндъра е k, ако:

а) $A = 5$, $k = 1$;

б) $A = \sqrt{3}$, $k = \sqrt{3}$.

5. Да се намери лицето на повърхнината на цилиндър с обем W и лице на осно сечение A.

6. Цилиндър с радиус r и височина h е пресечен с равнина, успоредна на оста му и на разстояние d от нея. Да се намери лицето на сечението.

7. Сечение, успоредно на оста на цилиндър, отсича върху основата му хорда, равна на радиуса и отдалечена от центъра на 5 cm. Да се изчисли лицето на сечението, ако околната повърхнина на цилиндъра е 6π cm^2.

8. Права клечка е разположена в чаша с формата на прав кръгов цилиндър с радиус r и височина h, така че единият край на клечката опира в окръжността на долната основа, а другият – окръжността на горната основа. Да се намери дължината на клечката, ако:
а) клечката пресича оста на цилиндъра;
б) клечката е на разстояние d от оста на цилиндъра.

9. Точките A и B са от окръжностите на двете основи на прав кръгов цилиндър с ос OO_1, радиус 2 и височина 6. Намерете ъгъла между AB и OO_1, ако разстоянието между тях е 1.

10. Нека C_a и C_b са прави кръгови цилиндри с височини съответно a и b. Околните повърхнини на C_a и C_b са правоъгълници със страни a и b. Намерете отношението на лицата, на осните сечения на C_a и C_b.

11. Цилиндър с радиус 3 и височина $2\sqrt{3}$ е пресечен с две успоредни равнини, в едната от които лежи оста на цилиндъра, а другата образува с цилиндъра сечение с лице $4\sqrt{3}$. Намерете ъгъла между диагонал на едното сечение и диагонал на другото.

12. Развивка на околната повърхнина на цилиндър е правоъгълник със страни a и b. Каква част е обемът на този цилиндър от цилиндъра, получен при завъртане на правоъгълник със страни a и b около едната му страна, ако двата цилиндъра имат равни височини?

13. Повърхнината на прав кръгов цилиндър е 24π, а периметърът на осно сечение на цилиндъра е 16. Намерете радиуса и височината на цилиндъра.

<u>Конус</u>

14. За прав кръгов конус с радиус 3 cm и образуваща 5 cm намерете:
а) лицето на околната повърхнина;
б) лицето на повърхнината;
в) обема.

15. Образуващата на прав кръгов конус е l, а радиусът му е два пъти по-дълъг от разстоянието от центъра на основата до образуващата. Да се намери обемът на конуса.

16. Осно сечение на прав кръгов конус е триъгълник с ъгъл $45°$ във върха. Намерете радиуса на конуса, ако околната му повърхнина е $\dfrac{\pi\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$.

17. Косинусът на ъгъла между образуващата и оста на прав кръгов конус е равен на $\frac{5}{7}$. Намерете лицето на основата на конуса, ако околната му повърхнина е $56\sqrt{6}\pi$.

18. Образуващата на прав кръгов конус сключва с равнината на основата му ъгъл $60°$. Намерете обема на конуса, ако повърхнината му е 12π cm^2.

19. Отсечката $AB = a \neq 2$ е хорда в основата на прав кръгов конус с радиус r и връх Q. Намерете синуса на ъгъла между (ABQ) и оста на конуса, ако лицето на ΔABQ е равно на S.

20. При завъртане на ΔABC около страната му AC точка B описва окръжност с радиус r. Намерете обема на полученото ротационно тяло, ако $AC = b$.

21. Околната повърхнина на конус е сектор с централен ъгъл $60°$, изрязан от кръг с лице S. Намерете повърхнината на конуса.

22. Околната повърхнина на конус е полукръг. Намерете ъгъла във върха на осното сечение на конуса.

23. Намерете лицето на осно сечение на конус, на който околната повърхнина е сектор с централен ъгъл $216°$, изрязан от кръг с радиус 5.

24. Околната повърхнина на прав кръгов конус има лице S и е сектор от кръг с централен ъгъл $72°$. Каква част от S е лицето на основата на конуса?

<u>Пресечен конус</u>

25. Прав кръгов пресечен конус има образуваща 7 cm и радиуси 4 cm и 3 cm. Намерете:
а) околната повърхнина;
б) повърхнината;
в) обема на пресечения конус.

26. За прав кръгов пресечен конус намерете лицето на околната повърхнина, лицето на повърхнината и обема, ако радиусите и височината му съответно са:
а) $R = 45$ cm; $r = 15$ cm; $h = 16$ cm;
б) $R = 3$ cm; $r = 1$ cm; $h = 1{,}5$ cm.

27. Конус с обем 264 cm^3 е пресечен с равнина, успоредна на основата му, така че лицето на сечението е четири пъти по-малко от лицето на основата на конуса. Да се намери обемът на получения пресечен конус.

28. Периметърът на осно сечение на прав кръгов пресечен конус е 26 cm. Сечение, успоредно на основите на пресечения конус, което разполовява височината, има обиколка 9π cm.
а) Намерете лицето на околната повърхнина на пресечения конус.
б) Намерете обема на пресечения конус, ако синусът на ъгъла, който образуващата сключва с основата е $\frac{3}{4}$.

Сфера и кълбо

29. Намерете повърхнината на сфера и обема на кълбо с радиус:

а) 7;

б) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

30. Повърхнината на сфера е 24π cm^2. Намерете обема на кълбо със същия радиус.

31. Намерете радиуса и повърхнината на сфера, ако кълбо със същия радиус има обем 12 L. Запишете отговора по два начина – със символ за корен и с десетична дроб с приближение до $0{,}01$. За пресмятане на приближението използвайте електронно приложение за пресмятане (калкулатор или друго).

32. Сфера с радиус R е пресечена с равнина α на разстояние $d < R$ от центъра на сферата. Намерете радиуса на полученото сечение.

33. Отсечката $AB = 2$ е хорда в окръжност с радиус 4. Да се намери дължината на окръжността, описана от точка B при пълно завъртане на окръжността около неин диаметър, на който единият край е точка A.

34. Кълбо е пресечено с равнина, която разделя радиуса на кълбото в отношение $4:1$, считано от центъра. Какво е отношението на лицето на сечението към лицето на големия кръг на кълбото?

35. Сфера е пресечена с равнина, която разделя радиуса ѝ в отношение $1:2$, считано от центъра. Какво е отношението на дължината на окръжността на сечението към дължината на голямата окръжност на сферата?

36. Сфера е пресечена с успоредните равнини α и β и лицата на получените сечения са съответно 49π cm^2 и 225π cm^2. Ако разстоянието между α и β е 4 cm, намерете:

а) разстоянието от центъра на сферата до равнината β;

б) лицето на сечението на сферата с равнина, успоредна на α и β и минаваща през средата на разстоянието между тях.

37. Отсечките AB и CD са пресичащи се хорди в сфера. Ъгълът между AB и CD е $60°$, $AB = CD = 4\sqrt{3}$ cm и най-дългата хорда, на която единият край е A или B, а другият е C или D има дължина 8 cm. Намерете обема на сферата, ако разстоянието от центъра ѝ до равнината $(ABCD)$ е 3 cm.

38. Сфера е пресечена с две перпендикулярни равнини. Получените сечения са кръгове с равни радиуси с дължина r и обща хорда AB. Намерете радиуса на сферата, ако:

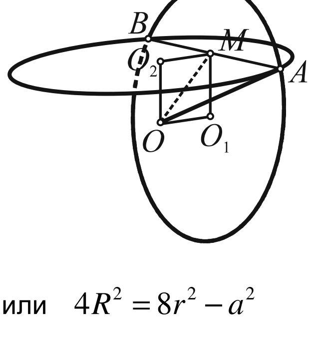
а) $r = 8$; $AB = 2\sqrt{7}$;

б) $r = 4$; $AB = 2\sqrt{7}$;

в) $r = 3$; $AB = 2\sqrt{7}$;

г) $r = 15$; $AB = 6$;

д) $r = \sqrt{5}$; $AB = 2$.



Решение. Да означим радиуса на сферата с R, радиусите на двете окръжности – с r и общата хорда с a. На чертежа $OA = R$, $O_2A = r$, $AB = a$.

Двете окръжности лежат в перпендикулярни равнини и имат равни радиуси, следователно разстоянията от центровете им до общата им хорда са равни и перпендикулярни, $O_1M = O_2M$ и $O_1M \perp O_2M$.

Тогава четириъгълникът OO_1MO_2 е квадрат. Последователно намираме:

$$O_2M^2 = r^2 - \frac{a^2}{4},\ OM^2 = 2\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right),\ R^2 = 2\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right) + \frac{a^2}{4} = 2r^2 - \frac{a^2}{4} \quad \text{или} \quad 4R^2 = 8r^2 - a^2$$

Довършете решението като използвате получената зависимост и интерактивно приложение.

Тест 1
Стереометрия

1. Намерете апотемата на правилна триъгълна пресечена пирамида с височина 1 и основни ръбове 10 и 4.

☒ **А)** $\sqrt{2}$ **Б)** $\sqrt{3}$

В) 2 **Г)** $2\sqrt{2}$

2. Да се намери обемът на правилна четириъгълна пресечена пирамида с основни ръбове 9 и 4 и височина 6.

☒ **А)** 226 **Б)** 266

В) 113 **Г)** 133

3. Правилна четириъгълна призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е пресечена с равнина, минаваща през точките $A,\ C$ и D_1. Равнината разделя призмата на две тела, чиито обеми се отнасят както:

☒ **А)** $\frac{1}{6}$ **Б)** $\frac{1}{5}$

В) $\frac{1}{8}$ **Г)** $\frac{2}{9}$

4. Да се намери разстоянието между два кръстосани ръба на правилен тетраедър с ръб a.

☒ **А)** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **Б)** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

В) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ **Г)** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

5. Прав кръгов цилиндър с радиус 2 е пресечен с равнина, успоредна на оста на цилиндъра и на разстояние $\frac{6}{5}$ от нея. Лицето на полученото сечение е 16. Да се намери тангенсът на ъгъла между оста на цилиндъра и диагонала на сечението.

☒ **А)** 16 **Б)** $\frac{16}{25}$

В) $\frac{8}{5}$ **Г)** $\frac{8}{25}$

6. Да се намери обемът на прав кръгов пресечен конус с образуваща 2 и малък радиус $\sqrt{2}$, ако образуващата сключва с голямата основа ъгъл $45°$.

☒ **А)** $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$ **Б)** $\frac{7\sqrt{2}\pi}{3}$

В) $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$ **Г)** $\frac{14\sqrt{2}\pi}{3}$

7. Сфера е пресечена с равнина, която разделя радиуса ѝ в отношение $3:2$, считано от центъра. Какво е отношението на дължината на окръжността на сечението към дължината на голямата окръжност на сферата?

☒ **А)** $\frac{2}{3}$ **Б)** $\frac{2}{5}$

В) $\frac{4}{5}$ **Г)** $\frac{3}{10}$

Тест 2
Стереометрия

1. Намерете височината на правилна триъгълна пресечена пирамида с апотема 2 и основни ръбове 8 и 2.

☒ **А)** $\sqrt{3}$ **Б)** $1{,}5$

В) $\sqrt{2}$ **Г)** 1

2. Да се намери обемът на правилна четириъгълна пресечена пирамида с височина 9 и основни ръбове 8 и 2.

☒ **А)** 72 **Б)** 84

В) 216 **Г)** 252

3. Триъгълна призма е пресечена с равнина, минаваща през ръб на долната основа и срещулежащ връх на горната основа. Равнината разделя призмата на две тела, чиито обеми се отнасят както:

☒ **А)** $1:2$ **Б)** $2:3$

В) $3:4$ **Г)** $2:5$

4. В права триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ разстоянието от CC_1 до AB е 3. Намерете обема на призмата, ако $S_{ABB_1A_1} = 8$.

☒ **А)** 8 **Б)** 10

В) 12 **Г)** 16

5. Цилиндър и конус имат равни радиуси и равни височини. Лицето на осното сечение на цилиндъра се отнася към лицето на успоредно сечение на конуса, което минава през средата на височината, както $4:\pi$. Намерете височината на цилиндъра, ако обемът му е 108π.

☒ **А)** 2 **Б)** 3

В) 4 **Г)** 6

6. Да се намери обемът на прав кръгов пресечен конус с височина 1, ако образуващата сключва с голямата основа ъгъл от $30°$, а радиусът на долната основа е $2\sqrt{3}$.

☒ **А)** $\dfrac{7\pi}{3}$ **Б)** 7π

В) $\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{3}$ **Г)** $\dfrac{7\pi}{6}$

7. Кълбо е пресечено с равнина, която разделя радиуса на кълбото в отношение $2:1$, считано от центъра. Какво е отношението на лицето на сечението към лицето на големия кръг на кълбото?

☒ **А)** $1:3$ **Б)** $1:2$

В) $\sqrt{5}:3$ **Г)** $5:9$

Проект № 1

Разлагане на вектор като линейна комбинация на векторите от базата

В правоъгълник $ABCD$ Q е средата на AB и $AC \cap DQ = P$. Да се изрази $\overrightarrow{AP}$ като линейна комбинация на векторите от избрана от Вас ортогонална база. Векторите от базата трябва да бъдат с краища в дадените точки.

Следвайте алгоритъма:

1) Въведете подходяща векторна база*.
2) Изразете векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DQ}$ чрез векторната база.
3) Използвайте, че $\overrightarrow{AP}$ е колинеарен с $\overrightarrow{AC}$, тогава $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AC}$.

Изразете $\overrightarrow{AP}$ чрез базата и x.

4) Използвайте, че $\overrightarrow{DP}$ е колинеарен с $\overrightarrow{DQ}$, тогава $\overrightarrow{DP} = y\overrightarrow{DQ}$.

Изразете $\overrightarrow{DP}$ чрез базата и y.

5) Изразете $\overrightarrow{AP}$ по втори начин чрез базата от ΔAPD.
6) Използвайте, че коефициентите пред съответните вектори от базата в двете представяния на $\overrightarrow{AP}$ са равни.

Така ще получите система за x и y.

7) Довършете решението.

Проект № 2

Приложение на скаларното произведение

Диагоналите на правоъгълник $ABCD$ със страни $AB = 4$, $AD = 2$ се пресичат в точка O и M и N са средите съответно на DO и OC. Намерете дължините на AM и BN и ъгъла между тях.

Следвайте алгоритъма:

1) Въведете подходяща* векторна база и определете скаларните произведения на векторите от базата.
2) Изразете $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BN}$ чрез базата.
3) Намерете дължините на $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BN}$.
4) Намерете косинуса на ъгъла между $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BN}$.

---

*Теоретично всеки два линейно независими вектора могат да служат за база и думата "подходяща" е неопределено понятие. Но тук става въпрос за практическа задача и изборът на два перпендикулярни вектора е най-подходящ.

Проект № 3

Уравнение на права

Дадени са три прави с техните общи уравнения:

$$g_1\colon\ 2x-3y-6=0$$
$$g_2\colon\ 2x+2y-4=0$$
$$g_3\colon\ 3x-4y+12=0$$

1) Запишете уравненията им във вида $Ax+By=1$.

g_1:

g_2:

g_3:

2) На три различни координатни системи начертайте графиките на правите.

Отбележете пресечните им точки с координатните оси и запишете техните координати.

Можете ли да направите извод за връзката между коефициентите във вторите уравнения на правите и координатите на пресечните им точки с координатните оси?

3) Дадени са точките $M(-3,0)$ и $N(0,4)$. Нанесете точките върху правоъгълна координатна система.

Уравнението на правата през точките M и N запишете във вида $Ax+By=1$.

4) По аналогия със задачите от 2) и 3) определете кои са пресечните точки с координатните оси на следните прави (без да правите допълнителни изчисления).

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{6}=1$$

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{-7}=1$$

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{-2}=1$$

$$2x+3y=1$$

Проект № 4

Права:
Уравнение – Графика – Уравнение

Учениците се разделят на няколко отбора и отборите се именуват $A, B, C, D, \ldots$. Всеки отбор подготвя по два листа, на които записва името на отбора и ги номерира – лист номер 1 и лист номер 2.

1) На лист номер 1 всеки отбор записва по три (или друг брой по избор на учителя) от дадените уравнения на прави. Учениците избират кои уравнения да запишат. Дават име на всяка права ($p, q, r, m, n, a, b, \ldots$).

2) На лист номер 2 отборът чертае графиките на избраните прави на една или повече декартови координатни системи. За всяка права на чертежа да бъдат означени името ѝ от лист номер 1 и координатите на поне две точки от нея.

3) Всеки отбор предава лист номер 2 на друг отбор. Така всеки отбор получава лист с чертежи от друг отбор.

4) Всеки отбор съставя уравнения на правите от чертежите и ги записва на получения лист номер 2.

5) Събират се лист номер 1 и лист номер 2 на всеки отбор и се проверява дали уравненията на едноименните прави от двата листа са еквивалентни.

$x+2y-5=0$	$x=\frac{3}{4}y+6$	$4x+2,5y=0$
$8x-y=1$	$x=3y-3$	$y=2x+3$
$y=-x-7$	$y=5$	$x-\frac{y}{6}=1$
$x+7=y$	$9x-6y-18=0$	$2x-5y-20=0$
$\frac{x}{2}+y=1$	$y=3x-6$	$y=-2x-3$
$3x-2y+6=0$	$y=-\frac{x}{2}$	$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$
$x-4y-5=0$	$\frac{x}{5}-\frac{y}{7}=1$	$2x-3y-4=0$
$y=-x$	$3x-y+1=0$	$y=\frac{2}{5}x-\frac{4}{5}$
$3x+4y-12=0$	$4x-8y-24=0$	$5x-y-10=0$
$3x-5y-15=0$	$x+y=7$	$-\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$
$y=\frac{3}{8}x+\frac{1}{8}$	$7x+3y-10=0$	$x=5$
$7y-x+7=0$	$2y=-9x$	$x+4y-12=0$
$y-5x+4=0$	$x-3y+1=0$	$x-2y-3=0$
$y=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$	$y=x-7$	$3x+y-6=0$
$y=2x$	$3,5x-y+7=0$	$x+y+5=0$
$\frac{x}{\frac{3}{2}}+\frac{y}{-2}=1$	$x+y+1=0$	$y=-\frac{2x}{3}$
$4x=5y$	$2x-3y+5=0$	$\frac{x}{10}-\frac{y}{8}=1$

Проект № 5

Приложение на векторите в аналитичната геометрия

В правоъгълник $ABCD$ със страни $AB = 4$ и $AD = 2$ точка Q е средата на AB и $AC \cap DQ = P$. Да се намери дължината на AP и ъгълът между правите AP и DP.

Следвайте алгоритъма:

1) Въведете подходяща координатна система.

2) Намерете координатите на точките A, B, C, D и Q.

3) Намерете уравненията на правите AC и DQ.

4) Намерете координатите на точка P.

5) Намерете търсените елементи.

Проект № 6

Окръжност

Дадена е окръжност k с нормално уравнение $k:\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$.

1) Намерете условие за координатите на центъра на k и за дължината на радиуса ѝ, така че окръжността да минава през координатното начало $O(0,0)$.

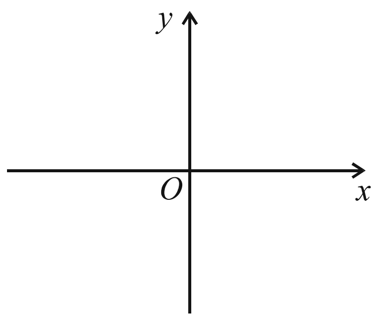
   Намерете цели числа за α, β и R, които изпълняват намереното условие. Трябва да намерите поне три тройки числа. Попълнете резултата в таблицата:

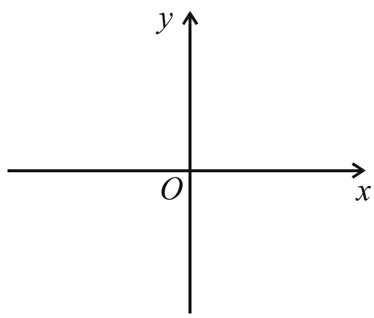
α	β	R	Уравнение на окръжността

Попълнените числа в първите три колони на един ред НЕ трябва да бъдат съответно пропорционални на числата от друг ред на таблицата.

2) Върху всяка от дадените правоъгълни координатни системи начертайте окръжност с център и радиус, равни на числата, попълнени в един от редовете на таблицата.

   Изберете мерна единица на координатната система, която да съобразите с числата от таблицата, за да се събере окръжността на съответния чертеж. За двете координатни системи мерните единици могат да бъдат различни





3) За окръжността на един от чертежите намерете пресечните точки с координатните оси. Покажете геометрично и аналитично решение на задачата.

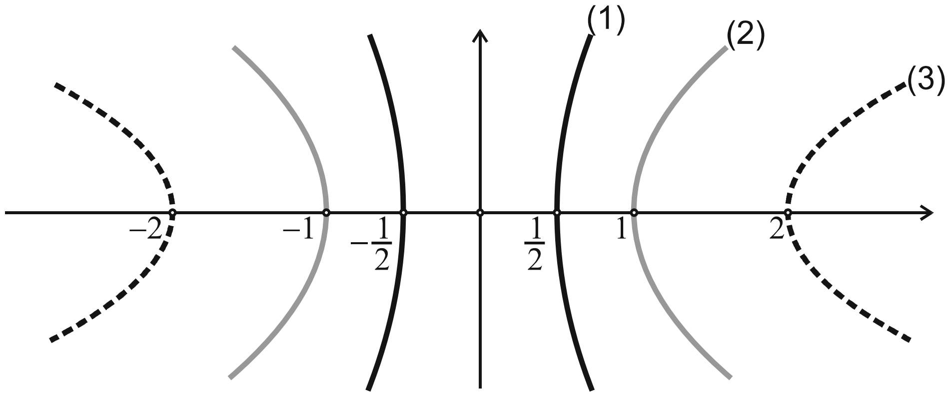
Геометрично решение

Аналитично решение

Проект № 7

Хипербола – графика и коефициенти

1. Всяка от кривите (1), (2) и (3) се задава с някое от уравненията **А)**, **Б)** и **В)**. За всяка крива запишете буквата на уравнението, което я задава.



А) $x^2 - y^2 = 1$

Б) $4x^2 - y^2 = 1$

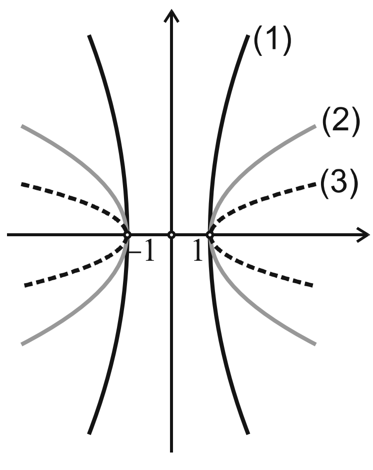
В) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

2. Всяко от уравненията **А)**, **Б)** и **В)** задава някоя от кривите (1), (2) и (3). За всяко уравнение запишете номера на кривата, която то описва.

А) $x^2 - y^2 = 1$

Б) $x^2 - 4y^2 = 1$

В) $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$



Проект № 8

Сечение на многостен с равнина

Използвайте интерактивно приложение в интернет, за да решите следващите задачи.

1) Изследвайте сечението на куб с равнина през две точки, които са средите на два съседни основни ръба на куба.

Изберете третата точка върху
а) срещулежащ околен ръб;
б) ръб на срещулежащата основа;
в) друг ръб.

При какво положение на третата точка сечението ще бъде:
– петоъгълник;
– правилен шестоъгълник;
– правоъгълник;
– равнобедрен трапец;
– триъгълник.

Запишете получените резултати.

Отговорете на въпроса:
Може ли сечението да бъде осмоъгълник?

2) Изследвайте и други сечения. При работата си запишете:
а) вида на многостена, който изследвате;
б) как е определена равнината;
в) какви сечения се получават.

Проект № 9

Векторен метод за намиране на разстоянието между две кръстосани прави

Разгледайте решението на задача 2. д) от урок 3.8.
Напишете алгоритъм за намиране на разстоянието между две кръстосани прави с използване на вектори.
Решете подточка г) на същата задача с векторния метод.

Проект № 10

Ротационни тела

Използвайте интерактивни приложения, за да онагледите успоредни и осни сечения на цилиндър, конус, пресечен конус, сфера и кълбо с равнина. Изберете подходящ начин да представите резултата от изследването си.

Изследвайте и други видове сечения, невключени в учебната програма.

Годишен преговор

Вектори. Векторна база

1. Дадени са неколинеарните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и нека $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$. Да се докаже, че необходимо и достатъчно условие $\vec{p}$ и $\vec{q}$ да са перпендикулярни е $|\vec{a}|=|\vec{b}|$. Да се даде геометрично тълкуване на получения резултат.

2. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, като $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=1$ и $\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$. Да се намери λ, така че векторите $\vec{p}=\lambda\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{q}=-\vec{a}+\vec{b}$ да бъдат перпендикулярни.

3. Да се докаже, че ако един вектор е перпендикулярен на три линейно независими вектора, то той е нулев.

4. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, като $|\vec{a}|=\dfrac{3}{2}$ и $|\vec{b}|=1$. Да се пресметне ъгълът между тях, така че векторите $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$ да образуват ъгъл, равен на $\dfrac{\pi}{3}$.

5. Да се намери скаларното произведение на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако:

а) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=60^\circ$;

б) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=1$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=135^\circ$;

в) $|\vec{a}|=\dfrac{2}{3}$, $|\vec{b}|=5$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=30^\circ$;

г) $\vec{a}=\vec{b}$ и $|\vec{a}|=7$.

6. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуват нормирана база в равнината. Да се намери ъгълът между тях, така че векторът;

а) $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$ да има дължина $\sqrt{3}$;

б) $\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}$ да има дължина $\sqrt{2}$.

7. Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са такива, че $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$ и $\angle(\vec{a};\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$. Намерете дължината на:

а) $\vec{c}$, ако $|\vec{a}|=3$ и $|\vec{b}|=10$;

б) $\vec{a}$, ако $|\vec{b}|=7$ и $|\vec{c}|=13$;

в) $\vec{b}$, ако $|\vec{a}|=5$ и $|\vec{c}|=14$;

г) $\vec{c}$, ако $\vec{a}\vec{b}=20$ и $|\vec{a}-\vec{b}|=7$.

8. За векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от пространствена база е изпълнено $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=1$ $\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle(\vec{b},\vec{c})=\dfrac{\pi}{4}$, $\angle(\vec{a},\vec{c})=\dfrac{\pi}{2}$. Да се намери дължината на вектора:

а) $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$;

б) $\vec{p}=3\vec{a}+\vec{c}$;

в) $\vec{q}=\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{c}$.

9. Дадени са векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, като $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\angle(\vec{b},\vec{c})=\frac{\pi}{3}$, $\angle(\vec{a},\vec{c})=\frac{\pi}{2}$. Да се намери дължината на вектора:

а) $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$;

б) $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}-2\vec{c}$;

в) $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

10. Дадени са векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, като $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\angle(\vec{b},\vec{c})=\frac{\pi}{2}$, $\angle(\vec{a},\vec{c})=\frac{\pi}{3}$. Да се намери косинусът на ъгъла между векторите:

а) $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ и $\vec{q}=\vec{a}+2\vec{b}$;

б) $\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$;

в) $\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ и $\vec{q}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

11. Намерете ъгъла между векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$ и $\vec{a}\vec{b}=-1,5$.

☒ **А)** $60°$ **Б)** $90°$ **В)** $120°$ **Г)** $135°$

12. Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са такива, че $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ и $\angle(\vec{a};\vec{b})=\frac{\pi}{3}$. Скаларното произведение на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е равно на:

☒ **А)** 3 **Б)** $3\sqrt{3}$ **В)** 2π **Г)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$

Вектори. Координати на вектор

13. Дадени са точките $M(2;1)$ и $N(\sqrt{2};-2\sqrt{2})$. Да се намери разстоянието между тях.

14. Дадени са векторите $\vec{a}(-1;0)$ и $\vec{b}(3;2)$ в правоъгълна координатна система. Намерете:

а) $\vec{a}\vec{b}$;

б) $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$;

в) $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$.

15. Точка M е средата на отсечката AB. Да се намерят координатите на точка:

а) M, ако $A(2,1)$ и $B(5,2)$;

б) B, ако $A(4,-3)$ и $M(1,3)$;

16. Дадени са векторите $\vec{a}(2;-1)$, $\vec{b}(-2;1)$ и $\vec{c}(-1;3)$. Да се намерят координатите на вектора:

а) $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$;

б) $\vec{v}=\vec{c}-4\vec{b}$;

в) $\vec{p}=\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$.

Аналитична геометрия

17. Правата g е определена от точките $M_1(0;2)$ и $M_2(2;5)$. Намерете:

а) вектор $\vec{p}$, колинеарен на правата;

б) ъгловия коефициент k.

18. Дадена е права g, определена от ъгловия си коефициент $k=2$ и точка $M(0;-3)$. Намерете вектор $\vec{p}$, колинеарен с правата.

19. Дадена е правата g, определена от $\vec{p}(4;1)$ и $M(0;2)$. Намерете ъгловия коефициент на правата. Намерете декартовото и общото уравнение на правата.

20. Дадени са права g и точка $M \in g$, такава че отношението на разстоянието от точка M до оста Ox към разстоянието от точка M до оста Oy е равно на a. Да се намерят координатите на точка M и да се начертаят M и g, ако:

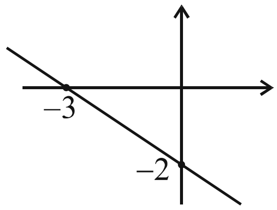
а) $g: 2x-5y-10=0$ и $a=\dfrac{3}{5}$;

б) $g: x+2y+7=0$ и $a=\dfrac{2}{3}$.

21. Дадени са правите $a:\ y=3x$, $b:\ y=3x-1$, $c:\ y=-3x$ и $d:\ y=-\dfrac{x}{3}$. През точките $M(1;3)$ и $N(3;-1)$ минават съответно правите:

☒ **А)** a и b **Б)** c и d **В)** b и c **Г)** a и d

22. Правата от чертежа има уравнение:



☒ **А)** $y=-\dfrac{2}{3}x-2$ **Б)** $y=-\dfrac{3}{2}x-2$

В) $y=-3x-2$ **Г)** $2y=-3x-6$

23. Определете взаимното положение на двойката прави. Ако правите се пресичат, намерете пресечната им точка и косинуса на ъгъла между тях.

а) $2x+2y-5=0$ и $2y=3$;

б) $x+2y-6=0$ и $y=3-\dfrac{x}{2}$;

в) $4x+y-1=0$ и $x-2y+2=0$;

г) $x+3y=0$ и $3x+2y-7=0$.

24. Да се намери разстоянието от точка $A(-2,1)$ до правата $g:\ 2x+y-7=0$.

25. Да се намерят координатите на точка B, симетрична на точка $A(1;-2)$ спрямо права $p:\ 4x-3y+15=0$.

26. Дадени са точките $A(-2;1)$, $B(6;-3)$ и $C(2;4)$. За триъгълник ABC да се намерят:

а) координатите на медицентъра G;

б) координатите на средите M_a, M_b и M_c съответно на страните BC, AC и AB.

в) уравненията на правите a, b и c, на които лежат съответно страните BC, AC и AB на триъгълника;

г) уравненията на правите m_a, m_b и m_c, на които лежат медианите съответно от връх A, B и C.

д) уравненията на правите h_a, h_b и h_c, на които лежат височините съответно от A, B и C.

е) координатите на H_a, H_b и H_c – петите на височините съответно от A, B и C.

ж) периметърът на ΔABC;

з) лицето на ΔABC.

Стереометрия

27. Прав кръгов конус има ъгъл при върха на осното сечение, равен на 2α и сума от дължините на височината и образуващата, равна на a. Намерете повърхнината и обема на конуса. (Резултатът да се приведе във вид на произведение.)

28. Височината на правилна четириъгълна пирамида е h и големината на ъгъла между два съседни околни ръба е α. Да се намерят околната повърхнина и обемът на пирамидата. (Получените изрази да се приведат във вид на произведение.)

29. Околните ръбове и ръбовете на горната основа на правилна четириъгълна пресечена пирамида са равни. Периметърът на околна стена на пресечената пирамида е 26 cm. Намерете височината и околната повърхнина на пресечената пирамида, ако апотемата ѝ е 4 cm.

30. В правилна триъгълна пирамида големината на ъгъла между два пресичащи се ръба – околен и основен, е α. Радиусът на вписаната в основата окръжност е r. Намерете повърхнината на пирамидата. (Резултатът да се приведе във вид на произведение.)

31. В правилна четириъгълна пирамида двустенният ъгъл между две съседни околни стени е α. Да се определи косинусът на ъгъла β между два съседни околни ръба.

32. Прав кръгов цилиндър има обем a m^3, околна повърхнина $3a$ m^2 и повърхнина $5a$ m^2. Намерете a, радиуса и височината на цилиндъра.

33. Правоъгълен триъгълник с катети $a=3$ cm, $b=4$ cm е завъртян около хипотенузата. Да се намерят обемът и повърхнината на полученото тяло.

34. Околната повърхнина на конус K е полукръг с радиус, равен на радиуса на друг конус K_1. Колко пъти лицето на околната повърхнина на K_1 е по-голямо от лицето на околната повърхнина на K, ако височините им са равни?

35. Околните ръбове на една пирамида имат дължина l. Основата ѝ е правоъгълник, два съседни околни ръба сключват помежду си ъгъл α, а другите два – ъгъл 2α. Да се намери обемът на пирамидата.

36. Радиусите на основите на прав кръгов пресечен конус са 13 cm и 20 cm, а образуващата му е 25 cm. С равнина, успоредна на оста и на разстояние 12 cm от нея, е построено сечение на конуса. Да се намери лицето на сечението.

37. През средите на два основни ръба в правилна триъгълна пирамида е прекарано сечение, успоредно на височината ѝ. Да се намери обемът на пирамидата, ако височината на сечението е h и околна стена образува с основата ъгъл α.

38. Кълбо е пресечено с равнина, която разполовява радиуса му и е перпендикулярна на него. Да се намери повърхнината на кълбото, ако лицето на сечението е Q.

39. Двустенният ъгъл при основата на правилна четириъгълна пирамида е α, а основният ѝ ръб има дължина a. Да се намери лицето на сечението, което минава през основния ръб и образува с равнината на основата ъгъл $30°$.

40. Диагоналът d на правоъгълен паралелепипед образува с двете съседни околни стени ъгли, всеки от които е равен на β. Да се намерят обемът на паралелепипеда и ъгълът φ, образуван от общия ръб на тези стени и отсечката, съединяваща общия връх на тези ъгли с центъра на срещуположната основа.

41. Права триъгълна призма има за основа равнобедрен триъгълник с ъгъл при върха β и основа, равна на b. Намерете обема на призмата, ако диагоналът на една от еднаквите околни стени образува с равнината на основата ъгъл α.

42. В правилна триъгълна пирамида е прекарана равнина през средите на два основни ръба и перпендикулярна на равнината на основата. Да се намери обемът на отсечената пирамида, ако основният ръб на дадената пирамида е a и двустенният ъгъл при основата ѝ е $30°$.

43. Околната повърхнина на прав кръгов пресечен конус е S, а образуващата сключва с оста му ъгъл α. Да се намерят радиусите на пресечения конус, ако отношението им е $2:3$.

44. Правоъгълен триъгълник с хипотенуза 5 cm е завъртян около ос в равнината на триъгълника, която минава през единия край на хипотенузата и е перпендикулярна на нея. Да се намерят обемът и повърхнината на образуваното тяло, ако катетът, който минава през същия край на хипотенузата, е 3 cm.

45. Обемът на триъгълна пирамида е V, а две от околните ѝ стени са равнобедрени правоъгълни триъгълници, чиито хипотенузи са равни и образуват помежду си ъгъл α. Да се намери дължината на хипотенузата.

46. Височината на правилна триъгълна призма е h, а правата, минаваща през центъра на горната основа и средата на страна на долната основа, образува с равнината на долната основа ъгъл α. Намерете повърхнината на призмата.

47. В правилна четириъгълна призма са дадени основният ръб a и ъгъл α между телесния диагонал и диагонала на околна стена (който лежи в диагоналното сечение на телесния диагонал). Намерете обема на призмата. (Изразът да се приведе във вид на произведение.)

48. Обемът на правилна четириъгълна пирамида е равен на V, а ъгълът между околната стена и основата е равен на α. Намерете повърхнината на пирамидата.

49. Основата на правоъгълен паралелепипед е вписана в окръжност с радиус r. Прилежащата дъга от окръжността на малката страна на основата е 2α. Да се намери обемът на паралелепипеда, ако околната му повърхнина е S. (Резултатът да се приведе във вид на произведение.)

50. Прав кръгов цилиндър е пресечен с равнина, успоредна на височината му, която разделя окръжността на основата, така че по-малката дъга е α. Диагоналът на полученото сечение е d и сключва $60°$ с равнината на основата на цилиндъра. Да се намери обемът на цилиндъра.

51. При завъртане на квадрат около една от страните му се получава цилиндър с обем 8. Намерете обема на цилиндър, на който осното сечение е същият квадрат.

52. В правилна триъгълна призма два върха на горната основа са съединени със средите на срещуположните им ръбове на долната основа. Ъгълът между получените отсечки, обърнат с отвора си към равнините на основите, е α, а основният ръб на призмата е a. Да се намери обемът на призмата. (Резултатът да се приведе във вид на произведение.)

53. Основата на права призма е правоъгълен триъгълник с хипотенуза c и остър ъгъл α. През хипотенузата на долната основа и върха на правия ъгъл на горната основа е прекарана равнина, която образува с долната основа ъгъл β. Намерете обема на триъгълната пирамида, отсечена от призмата.

54. През един основен ръб на правилна триъгълна призма е прекарана равнина, минаваща през средата на срещуположния околен ръб и образуваща с равнината на основата ъгъл α. Намерете лицето на сечението и околната повърхнина на призмата, ако основният ѝ ръб е a.

55. Основата $ABCD$ на пирамидата $ABCDF$ е ромб, за който $\angle BAD = 60°$. Ортогоналната проекция O на върха F върху равнината на основата е центърът на вписаната в ΔABD окръжност с радиус r. Ако острият ъгъл, който равнината (BDF) сключва с равнината на основата, е два пъти по-голям от ъгъла, който FC сключва с основата, да се намери обемът на пирамидата.

Модул II
Елементи на математическия анализ

1. Полиноми на една променлива

1.1. Определение. Операции с полиноми

1) Определение

В предходните класове вече сте се запознали с понятията едночлен, подобни едночлени и полином (многочлен) като сбор на краен брой едночлени.

Сега ще разглеждаме полиноми, в които участва само една променлива и ще предполагаме, че в представянето на полинома няма подобни едночлени.

Определение. Изразът $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, (1)

където $a_0 \neq 0$, $a_1, a_2, ..., a_n$ са числа, n е цяло неотрицателно число, се нарича **полином** от степен n на променливата x.

Числата $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ се наричат **коефициенти**; a_0 е **старши коефициент**, a_n е **свободен член.**

Константите, без нулата, са полиноми от нулева степен или още се наричат **константен полином.**

Числото 0 се нарича **нулев полином**.

Когато степента на полинома се подразбира, ще пишем $P(x)$.

Ако на x дадем конкретна стойност x_0, то числото $P_n(x_0)$ се нарича стойност на полинома $P_n(x)$ при $x = x_0$.

Два полинома се наричат **равни**, ако имат равни стойности за всяка стойност на променливата.

Нулевият полином има стойност 0 за всяко x.

Следващата теорема ще приемем без доказателство.

Теорема 1. (Принцип за сравняване на коефициентите)

Ако два полинома от степен n на променливата x имат равни стойности за $n+1$ различни стойности на x, то двата полинома са равни.

Оттук може да се покаже, че представянето на полинома във вида (1) е еднозначно. Това представяне се нарича нормален вид на полинома.

2) Събиране, изваждане и умножение на полиноми

1. Да се намери сборът, разликата и произведението на полиномите $P(x) = x^2 + 2$ и $G(x) = x^4 - 3x^2 + 1$.

Решение. $P(x) + G(x) = (x^2 + 2) + (x^4 - 3x^2 + 1) = x^4 - 2x^2 + 3$.

$P(x) - G(x) = (x^2 + 2) - (x^4 - 3x^2 + 1) = -x^4 + 4x^2 + 1$.

$P(x).G(x) = (x^2 + 2).(x^4 - 3x^2 + 1) = x^2(x^4 - 3x^2 + 1) + 2(x^4 - 3x^2 + 1) = x^6 - x^4 - 5x^2 + 2$.▲

Ясно е, че полиноми се събират (изваждат), като се съберат коефициентите пред съответните степени на x и се умножават, като с всеки едночлен на единия полином умножим всички едночлени на другия полином и направим приведение на подобните едночлени.

3) Деление на полиноми

Всеки две цели числа можем да разделим с частно и остатък. Например, при деление на 35 с 8 се получава частно 4 и остатък 3, което записваме така $35 = 8.4 + 3$ или $\frac{35}{8} = 4 + \frac{3}{8}$.

За деление на полиноми може да се докаже следната теорема.

Теорема 2. (Теорема за деление с частно и остатък)

Нека $P(x)$ и $G(x) \neq 0$ са два полинома. Тогава съществува единствена двойка полиноми $Q(x)$ и $R(x)$, такива че

$$P(x) = G(x).Q(x) + R(x) \qquad (2)$$

и степента на $R(x)$ е по-малка от степента на $G(x)$.

Полиномът $Q(x)$ се нарича **частно**, полиномът $R(x)$ – **остатък**, а $P(x)$ и $G(x)$ са съответно делимо и делител.

Когато $R(x) = 0$, казваме че полиномът $G(x)$ дели полинома $P(x)$. Тогава $P(x) = G(x)Q(x)$.

С пример ще покажем как на практика се извършва делението на два полинома.

2. Да се намерят частното и остатъкът при делението на полинома $P(x) = 2x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 4x + 1$ на полинома $G(x) = x^3 - 2x$.

Решение.

$$\begin{array}{lll}
-\ 2x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 4x + 1 & \big|\ \underline{x^3 - 2x} & \\
\quad \underline{2x^5 - 4x^3} & 2x^2 + 3x - 2 \to \text{частно} & \\
\quad -\ 3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 4x + 1 & \longleftarrow & 3x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 4x + 1 - (-4x^3) \\
\quad\quad \underline{3x^4 - 6x^2} & & \\
\quad\quad -\ -2x^3 + 4x^2 + 4x + 1 & \longleftarrow & -2x^3 - 2x^2 + 4x + 1 - (-6x^2) \\
\quad\quad\quad \underline{-2x^3 + 4x} & & \\
\quad\quad\quad\quad 4x^2 + 1 & \longleftarrow & 4x^2 + 4x + 1 - (4x) \\
\quad\quad\quad\quad \downarrow & & \\
\quad\quad\quad\quad \text{остатък} & &
\end{array}$$

$$\Rightarrow P(x) = 2x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 4x + 1 = (x^3 - 2x)(2x^2 + 3x - 2) + 4x^2 + 1 \ \blacktriangle$$

4) Метод на неопределените коефициенти

Методът на неопределените коефициенти се използва при решаване на различни задачи за полиноми. Ще покажем неговата същност чрез решението на една задача за деление на полиноми.

3. Да се намерят частното и остатъкът при делението на полинома $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ на полинома $x^2 + 1$.

Решение. Делимото е полином от степен 4, а делителят е полином от степен 2. Следователно частното е полином от степен 2 и остатъкът е полином от степен най-много 1. Записваме частното и остатъка с неопределени коефициенти.

Нека частното и остатъкът съответно са $Q(x) = ax^2 + bx + c$ и $R(x) = dx + e$. Тогава равенство (2) от теоремата за деление с частно и остатък е:

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 5 = (x^2 + 1)(ax^2 + bx + c) + dx + e.$$

Разкриваме скобите и записваме полинома вдясно по степените на x и получаваме:

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 5 = ax^4 + bx^3 + (a + c)x^2 + (b + d)x + c + e.$$

Полиномите от двете страни на знака „=” имат равни стойности за всяка стойност на променливата x, следователно двата полинома са равни (принцип за сравняване на коефициентите), което означава, че коефициентите им пред съответните степени на x са равни. Така за a, b, c, d и e получаваме системата:

$$\left| \begin{array}{l} a=1 \\ b=-3 \\ a+c=2 \\ b+d=-3 \\ c+e=5 \end{array} \right.$$, откъдето намираме $c=1,\ d=0,\ e=4 \ \Rightarrow\ Q(x)=x^2-3x+1$ и $R(x)=4$.▲

4. Да се намерят частното и остатъкът при делението на полинома $P(x)$ на полинома $G(x)$, ако:

а) $P(x)=x^4+x^3+2x^2+7x+4$, $G(x)=x^2-x+3$;

б) $P(x)=x^5+x^4-6x^3+6x^2+3x-3$, $G(x)=x^3-2x^2+x+1$;

в) $P(x)=x^4+5x^3-8x^2-10x+16$; $G(x)=x^2-2$;

г) $P(x)=x^5-x^4-7x^3+6x^2-11x+4$, $G(x)=x-3$.

5. Извършете делението и намерете частното $Q(x)$ и остатъка $R(x)$.

а) $(3x^4-2x^3+5x^2-3x+5):(x^2+1)$;

б) $(6x^4+6x^3-6x^2+3x+6):(3x+3)$;

в) $(2x^5-x^4-2x^3+3x^2-3x+5):(2x-1)$;

г) $(x^4-x^2+5x-6):(x^2-x+2)$;

д) $(2x^4+7x^3-13x^2+4x+6):(2x^3-3x^2+x+1)$;

е) $(5x^4-x^3+10x^2-7x+2):(x^3+2x-1)$;

ж) $(x^5-4x^4+3x^3-12x^2+2x-10):(x-4)$;

з) $(x^6-2x^4-2x^3+3x^2+2x-3):(x^2-2)$;

и) $(12x^5-3x^4+4x^3-x^2):(4x^3-x^2)$;

к) $(10x^5+10x^3-3x^2+x-3):(5x^3-2)$;

л) $(-2x^7+8x^6-2x^3+9x^2-4x):(-x^2+4x)$.

6. Да се намерят стойностите на a и b, за които полиномите са равни.

а) $P(x)=x^4-2x^3+x-a$ и $G(x)=x^4-(b-3)x^3+x-2a+b$;

б) $P(x)=x^3+(a+1)x^2+bx+2$ и $G(x)=bx^3+bx+2$;

в) $P(x)=2x(x+a)-x$ и $G(x)=x(2x+b)-b+3$.

1.2. Теорема на Безу. Схема на Хорнер

Ще покажем метод за деление на полином, когато делителят е двучлен.

Теорема на Безу. Остатъкът от делението на полинома $P_n(x)$ на двучлена $x-x_0$ е равен на $P_n(x_0)$ (стойността на полинома при $x=x_0$).

Теоремата може да се запише и така: $P_n(x)=(x-x_0)Q_{n-1}(x)+P_n(x_0)$.

Доказателство. От теоремата за деление на полиноми имаме

$$P_n(x)=(x-x_0)Q_{n-1}(x)+R(x), \qquad (1)$$

където степента на $R(x)$ е по-малка от степента на делителя $(x-x_0)$, т.е. степента на $R(x)$ е по-малка от 1. Следователно $R(x)$ е полином от нулева степен, което означава, че той е число (константа), $R(x)=R$.

Нека в (1) заместим x с x_0, тогава $P_n(x_0)=(x_0-x_0)Q_{n-1}(x)+R \Rightarrow P_n(x_0)=R$, т.е.

$P_n(x)=(x-x_0)Q_{n-1}(x)+P_n(x_0)$.▲

Нека полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ от теоремата на Безу имат съответно вида:

$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ и $Q_{n-1}(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+...+b_{n-2}x+b_{n-1}$.

След заместване в равенството (1) и като използваме принципа за сравняване на коефициентите, ще получим следните формули за коефициентите на $Q_{n-1}(x)$:

$b_0=a_0$

$b_1=x_0b_0+a_1$

$b_2=x_0b_1+a_2$

$b_3=x_0b_2+a_3$

…

$b_{n-1}=x_0b_{n-2}+a_{n-1}$

$P_n(x_0)=R=x_0b_{n-1}+a_n$

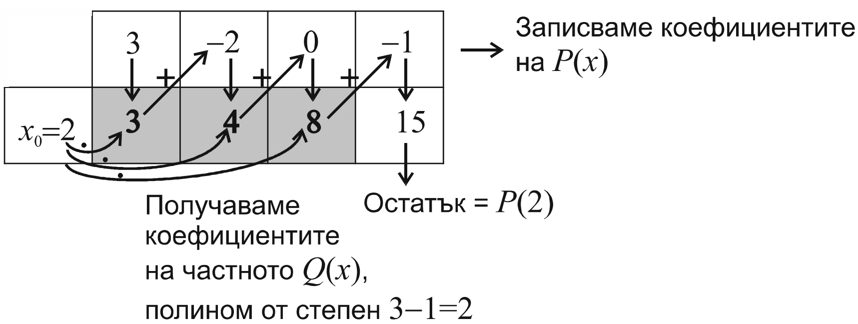
Да обърнем внимание, че старшият коефициент на частното $Q_{n-1}(x)$ е точно a_0.

Пресмятането на коефициентите $b_1, b_2,...,b_{n-1}$ и R се извършва по-лесно, като попълним таблица, наречена **схема на Хорнер.**

	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
x_0	$b_0=a_0$	$b_1=x_0b_0+a_1$	$b_2=x_0b_1+a_2$		$b_{n-1}=x_0b_{n-2}+a_{n-1}$	$P_n(x_0)=R=x_0b_{n-1}+a_n$

1. Да се раздели полиномът $P(x)=3x^3-2x^2-1$ на двучлена $x-2$ по схемата на Хорнер.

Решение.



$\Rightarrow P(x)=3x^3-2x^2-1=(x-2)(3x^2+4x+8)+15$ и $P(2)=15$.▲

Ще използваме теоремата на Безу, за да намираме стойност на полином при конкретна стойност на променливата.

Според теоремата, стойността $P_n(x_0)$ на полинома $P_n(x)$ при $x = x_0$ е равна на остатъка при делението на полинома с двучлена $x - x_0$. А този остатък получаваме по схемата на Хорнер.

2. Разделете полинома $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 4$ на всеки от двучлените $M(x) = x + 3$ и $N(x) = x - 4$ и намерете $P(-3)$ и $P(4)$.

Решение. Ще разделим $P(x)$ на M и N по схемата на Хорнер.

	2	**2**	**0**	**–4**
–3	2	–4	12	–40
4	2	10	40	156

$\Rightarrow\ 2x^3 + 2x^2 - 4 = (2x^2 - 4x + 12)(x+3) - 40 \quad \Rightarrow \quad P(-3) = -40$ и

$2x^3 + 2x^2 - 4 = (2x^2 + 10x + 40)(x-4) + 156 \quad \Rightarrow \quad P(4) = 156$.▲

3. Намерете стойностите на полинома $P(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + 5x + 6$ при $x = 2$, $x = -3$, $x = -4$ и $x = 1$.

Решение.

	1	**1**	**–5**	**5**	**6**	
2	1	3	1	7	20	$P(2) = 20$
–3	1	–2	1	2	0	$P(-3) = 0$
–4	1	–3	7	–23	98	$P(-4) = 98$
1	1	2	–3	2	8	$P(1) = 8$

▲

Обърнете внимание

Стойността на полинома при $x = 1$ е точно сборът от коефициентите на полинома.

Превръщане на число от p-ична бройна система в десетична

Познатата ни 10-тична бройна система използва цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, с които се записва всяко число по степените на числото 10. Например числото 375 802 се записва така:

$375\ 802 = 3.10^5 + 7.10^4 + 5.10^3 + 8.10^2 + 0.10^1 + 2.10^0$.

Така всяко естествено число n може да се запише във вида:

$n = a_0 10^{\kappa} + a_1 10^{\kappa-1} + ... + a_{k-1}10 + a_k$, където $a_0, a_1, ..., a_k$ са някои от цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Числото 10 се нарича основа на бройната система.

В практиката се използват и други бройни системи.

Двоична бройна система с основа $p = 2$ и цифри 0 и 1. Всяко естествено число се записва с 0 и 1. Например:

$11010_{(2)} = 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 0 = 26_{(10)}$ (Индексът в скобите показва основата на бройната система.)

Осмична бройна система с основа $p = 8$ и цифри 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Например:

$3470_{(8)} = 3.8^3 + 4.8^2 + 7.8 + 0 = 1848_{(10)}$.

Шестнадесетична бройна система с основа $p=16$.

Когато цифрите са повече от 10, те се записват с букви. Така например цифрите на 16-тична бройна система са $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}$.

Цифрите $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}$ са съответно числата $10, 11, 12, 13, 14, 15$.

Например. $\mathrm{2A2F}=2.16^3+\mathrm{A}.16^2+2.16+\mathrm{F}=2.16^3+10.16^2+2.16+15=10799_{(10)}$.

***p*-ична бройна система** с основа естественото число p.

Нека $n=\overline{a_0a_1...a_{k-1}a_k}_{\,(p)}$, т.е. $n=a_0p^k+a_1p^{k-1}+...+a_{k-1}p+a_k$.

Да разгледаме полинома, чиито коефициенти са цифрите в p-ичния запис на числото n:

$$P(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+...+a_{k-1}x+a_k.$$

Тъй като $P(p)=a_0p^k+a_1p^{k-1}+...+a_{k-1}p+a_k$, получихме, че

$$n=P(p).$$

И така, ако едно число е записано в p-ична бройна система, то за да намерим десетичния му запис трябва да намерим стойността $P(p)$, където $P(x)$ е полином с коефициенти, равни на цифрите в p-ичния запис на числото.

За намирането на $P(p)$ ще използваме схемата на Хорнер.

4. Намерете десетичния запис на числото.

а) $101101_{(2)}$;

б) $\mathrm{21B3}_{(12)}$.

Решение.

а) Полиномът, чиито коефициенти са цифрите в 2-ичния запис на числото е:

$$P(x)=1.x^5+0.x^4+1.x^3+1.x^2+0.x+1.$$

Тогава десетичният запис на числото е стойността $P(2)$.

	1	0	1	1	0	1
2	1	2	5	11	22	45

$\Rightarrow\ P(2)=45\ \Rightarrow\ 101101_{(2)}=45_{(10)}$.

б) Цифрите в 12-тична бройна система са $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathrm{A}, \mathrm{B}$, където A и B съответстват на 10 и 11. Тогава полиномът, чиито коефициенти са цифрите в 12-тичния запис на числото е: $P(x)=2.x^3+1.x^2+11.x+3$. Десетичният запис на числото е стойността $P(12)$.

	2	1	11	3
12	2	25	311	3735

$\Rightarrow\ P(12)=3735\ \Rightarrow\ \mathrm{21B3}_{(12)}=3735_{(10)}$.▲

5. Намерете десетичния запис на числото.

а) $10111_{(2)}$; б) $12012_{(3)}$; в) $12003_{(4)}$; г) $2034_{(5)}$;

д) $31501_{(6)}$; е) $20603_{(7)}$; ж) $1074_{(8)}$; з) $3108_{(9)}$;

и) $129A_{(11)}$; к) $92E_{(16)}$; л) $6B6_{(16)}$; м) $FF03_{(16)}$.

6. Намерете стойността на полинома $P(x)=2x^4-x^3+3x+2$ при $x=2$, $x=-2$, $x=3$, $x=-3$, $x=4$, $x=-4$.

7. Намерете стойността на полинома $6x^5-13x^4-35x^3+132x^2-104x+24$ при x равно на -3, 3, 2, -2, $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$.

8. Намерете стойността на полинома $x^5+x^4-25x^3-25x^2+144x+144$ при x равно на -4; -3; -1; 1; 3 и 4.

9. Намерете стойността на полинома $2x^3+9x^2+7x-6$ при x равно на -3; -2; $\frac{1}{2}$ и 2.

10. За коя от следните стойности на x: -4; -1; 1; 2 и 3 стойността на полинома $x^4-2x^3-13x^2+38x-22$ е равна на 2.

11. Намерете сбора от коефициентите на полинома.

а) $P(x)=(3x^2-2x)^5+x+4$;

б) $P(x)=7x^7-6x^6+5(x+2)^2-8$.

1.3. Нули на полиноми

Определение. Числото x_1 се нарича **нула (корен)** на полинома $P_n(x)$, когато $P_n(x_1)=0$.

Също така ще казваме, че x_1 е корен на уравнението $P_n(x)=0$.

От теоремата на Безу имаме $P_n(x)=(x-x_1)Q_{n-1}(x)+P_n(x_1)$ и понеже x_1 е корен на полинома, т.е. $P_n(x_1)=0$, получаваме $P_n(x)=(x-x_1)Q_{n-1}(x)$.

Ако полиномът $Q_{n-1}(x)$ има корен x_2, по същия начин ще получим, че $Q_{n-1}(x)=(x-x_2)Q_{n-2}(x)$ и за полинома $P_n(x)$ ще имаме $P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)Q_{n-2}(x)$.

Продължавайки по този начин ще получим, че ако $x_1,x_2,...,x_s$ са всички корени на $P_n(x)$, то $P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_s)Q_{n-s}(x)$.

Определение. Ако за някой корен x_0 имаме $P_n(x)=(x-x_0)^k Q_{n-k}(x)$, където $Q_{n-k}(x_0)\neq 0$, то x_0 се нарича ***к*-кратен корен** на полинома $P_n(x)$.

Теорема 1. Един полином от степен n може да има най-много n корена, броени с техните кратности.

Ако $P_n(x)$ има n корена $x_1,x_2,...,x_n$, то полиномът се разлага на множители по следния начин $P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$.

Теорема 2. Всеки полином от нечетна степен има поне един корен.

Нека $P_n(x)$ е полином от степен $n\geq 2$ и x_0 е негов корен. Както вече показахме, $P_n(x)=(x-x_0)Q_{n-1}(x)$. Понеже $n\geq 2$, то $Q_{n-1}(x)$ е най-малко от първа степен. Така $P_n(x)$ се представя като произведение на два неконстантни полинома. Изобщо, полином, който се представя като произведение на два неконстантни полинома от по-ниска степен, се нарича **разложим**. В противен случай се нарича **неразложим**.

Очевидно всеки полином от първа степен е неразложим. Може да се докаже, че единствените неразложими полиноми са полиномите от първа степен и полиномите от втора степен с отрицателни дискриминанти. Тези полиноми ще наричаме **прости множители** в разлагането на един полином.

1. Да се докаже, че x_1 и x_2 са корени на уравнението $P(x)=0$ и да се разложи на прости множители полиномът $P(x)$, ако:

а) $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{2}$, $P(x)=2x^4+7x^3+4x^2+2x-3$;

б) $x_1=-1$, $x_2=2$, $P(x)=2x^4-4x^3-42x^2+44x+80$.

Решение. Намираме стойностите $P(x_1)$ и $P(x_2)$ по схемата на Хорнер.

а)

	2	**7**	**4**	**2**	**–3**
–3	2	1	1	–1	0

Получихме, че $P(-3)=0$ и следователно -3 е корен на уравнението.

Продължаваме проверката по схемата на Хорнер, но за полинома, получен след разделянето с $x+3$, т.е. пресмятанията извършваме с коефициентите, получени в реда, в който сме открили, че -3 е корен (В показаното решение сме направили втора таблица, за да проверим, че $\frac{1}{2}$ е корен).

	2	**1**	**1**	**–1**
$\frac{1}{2}$	2	2	2	0

Получихме, че числата -3 и $\frac{1}{2}$ са корени на уравнението $P(x)=0$, следователно $P(x)=(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x+2)$.

Това е и разлагането на полинома $P(x)$ на прости множители, защото квадратният тричлен $2x^2+2x+2$ има отрицателна дискриминанта.

б) Прилагаме схемата на Хорнер за числото -1.

След като получим, че -1 е корен, продължаваме пресмятанията по схемата на Хорнер, но, както казахме в решението на подусловие а), вече използваме коефициентите в последния получен ред. За удобство записваме изчисленията в една таблица.

	2	**–4**	**–42**	**44**	**80**
–1	**2**	**–6**	**–36**	**80**	0
2	2	–2	–40	0	

Получихме, че $P(x)=(x+1)(x-2)(2x^2-2x-40)$.

Корените на квадратния тричлен $2x^2-2x-40$ са -4 и 5, тогава
$P(x)=2(x+1)(x-2)(x-5)(x+4)$.▲

2. Кои от числата -3; -2; -1; 3; 2 и 1 са корени на уравнението $x^4-x^3-3x^2-3x-18=0$?
Решение. Пресмятанията извършваме по схемата на Хорнер.

	1	**–1**	**–3**	**–3**	**–18**
–3	1	–4	9	–30	72
–2	**1**	**–3**	**3**	**–9**	0
–1	1	–4	7	–16	
3	**1**	**0**	**3**	0	
2	1	2	7		
1	1	1	4		

Числата -2 и 3 са корени на уравнението.▲

<u>Обърнете внимание.</u> При проверка със схемата на Хорнер дали число е корен на даден полином, редът, в който получим 0 вдясно, става първи ред за следващите пресмятания по тази схема, до получаване на нова 0 вдясно.

3. Кои от числата -3;-2; 4; 3; 2 и 1 са корени на полинома $x^5+4x^4+x^3-6x^2$?

4. Кои от числата -4; -3; -3; 3; 2 и 4 са корени на уравнението $x^4+x^3-12x^2-9x+27=0$?

5. Докажете, че полиномът $x^5-6x^4+14x^3-20x^2+24x-16$ има 3-кратен корен $x=2$ и го разложете на прости множители.

1.4. Рационални корени на уравнение с цели коефициенти

Както знаем, за решаването на линейни и квадратни уравнения има формули, които изразяват корените им чрез коефициентите на уравнението. Подобни формули има и за уравнения от трета и четвърта степен, но поради тяхната сложност трудно се прилагат на практика. За уравнения от степен 5 и по-висока такива формули няма, което е доказано от норвежкия математик Абел, който е използвал теорията на Галоа.

Ето защо се търсят други методи за намиране корените на уравнение. Ще разгледаме такива методи за някои специални видове уравнения.

Първият метод, с който ще се запознаем, показва как да търсим рационални корени на уравнения с цели коефициенти.

Теорема. Ако рационалното число $x_0 = \dfrac{p}{q}$ ($\dfrac{p}{q}$ – несъкратима дроб) е корен на уравнението

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$, където $a_0, a_2, ..., a_n$ са цели числа, то числото p дели свободния член a_n, а числото q дели старшия коефициент a_0.

Доказателство. Тъй като $x_0 = \dfrac{p}{q}$ е корен на уравнението $P_n(x) = 0$, то $a_0\dfrac{p^n}{q^n} + a_1\dfrac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + ... + a_{n-1}\dfrac{p}{q} + a_n = 0$. След освобождаване от знаменателя, получаваме $a_0p^n + a_1p^{n-1}q + ... + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0$. Следователно p дели a_nq^n и q дели a_0p^n. Тъй като $\dfrac{p}{q}$ е несъкратима дроб, то p дели a_n и q дели a_0.▲

Ясно е, че ако $a_0 = 1$ и ако уравнението $P_n(x) = 0$ има рационални корени, то те са само цели числа – делители на a_n.

1. Да се реши уравнението $x^4 - x^3 - 11x^2 - x - 12 = 0$.

Решение. Старшият коефициент е 1 и свободният член е -12, следователно, ако уравнението има рационални корени, те са измежду делителите на -12.

Делителите на 12 са $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.

За числата ± 1 директно се проверява, че не са корени на уравнението.
За останалите числа проверката ще извършим по схемата на Хорнер.
Числата 2, -2 и 3 не са корени (2-ри, 3-ти и 4-ти ред на таблицата).

	1	**–1**	**–11**	**–1**	**–12**
2	1	1	–9	–19	–50
–2	1	–3	–5	9	–30
3	1	2	–5	–16	–60
–3	**1**	**–4**	**1**	**–4**	0
4	1	0	1	0	

Получихме, че -3 е корен на уравнението (5-ти ред на таблицата).

Тогава уравнението има вида $(x+3)(x^3 - 4x^2 + x - 4) = 0$.

Сега търсим рационални корени на уравнението $x^3 - 4x^2 + x - 4 = 0$, които може да бъдат сред числата $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. За $\pm 1, \pm 2$ вече сме проверили, че не са корени и за тях повече проверки не правим. Остава да проверим за 4 и -4. Оказва се, че 4 е корен (6-ти ред на таблицата).

И така, числата -3 и 4 са корени и $x^4-x^3-11x^2-x-12=(x+3)(x-4)(x^2+1)$. Тъй като $x^2+1=0$ няма реални корени, то корените на уравнението са числата -3 и 4.▲

2 Да се реши уравнението $6x^6-25x^5-9x^3+80x^2+76x+16=0$.

Решение. Ако уравнението има рационални корени, то те са от вида $\frac{p}{q}$, където p е делител на 16, а q е делител на 6. $\Rightarrow$ p е някое от числата $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16$, а q е някое от числата $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.

Директно се проверява, че ±1 не са решения на уравнението. За останалите възможности проверяваме по схемата на Хорнер.

	6	**–25**	**0**	**–9**	**80**	**76**	**16**
2	**6**	**–13**	**–26**	**–61**	**–42**	**–8**	0
2	6	–1	–28	–117	–276	–560	
–2	6	–25	24	–109	176	360	
4	**6**	**11**	**18**	**11**	**2**	0	
$-\frac{1}{2}$	**6**	**8**	**14**	**4**	0		
$-\frac{1}{2}$	6	5	$\frac{23}{2}$	$-\frac{7}{4}$			
$-\frac{1}{3}$	6	6	12	0			

Започваме проверката с 2 и получаваме, че $x=2$ е корен. Сега трябва да търсим рационални корени $\frac{p}{q}$ на уравнението $6x^5-13x^4-26x^3-61x^2-42x-8=0$, където p е някое от числата $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$, q някое от числата $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.

Трябва отново да проверим за числото 2, защото може да е 2-кратен корен.

Проверяваме, че 2 не е 2-кратен корен и че -2 не е корен. За тези числа повече проверки не правим.

Намираме, че $x=4$ е корен.

Следователно търсим рационални корени $\frac{p}{q}$ на уравнението $6x^4+11x^3+18x^2+11x+2=0$.

За това уравнение ще направим следното допълнително наблюдение:

Всички коефициенти на това уравнение са положителни, следователно, ако има корен, той **трябва да е отрицателен**. Това съображение важи и за следващите уравнения, които ще получим по схемата на Хорнер.

И така, p е някое от числата $\pm1, \pm2$, а q е някое от числата $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ и числото $\frac{p}{q}$ е отрицателно.

Получаваме, че $x=-\frac{1}{2}$ е корен. Сега търсим отрицателни рационални корени на уравнението $6x^3+8x^2+14x+4=0$, от вида $\frac{p}{q}$, където p е някое от числата $\pm1, \pm2, \pm4$, а q някое от числата $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.

Проверяваме, че $-\frac{1}{2}$ не е двукратен корен и че $x=-\frac{1}{3}$ е корен. Остава уравнението $6x^2+6x+12=0$, което няма реални корени.

Корените на уравнението са числата $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 2, 4$.▲

3. Да се намерят корените на уравнението.

а) $4x^3-21x^2+29x-6=0$;

б) $15x^3-61x^2+52x-12=0$;

в) $30x^3-17x^2-8x+4=0$;

г) $45x^3-63x^2+28x-4=0$;

д) $15x^5-61x^4+97x^3-195x^2+156x-36=0$;

е) $12x^4+31x^3-2x^2-61x+30=0$;

ж) $36x^5-27x^4+8x^3-34x^2+29x-6=0$;

з) $x^3-2x^2-5x+6=0$;

и) $x^5-3x^3-x^2+6x-3=0$;

к) $x^4+4x^3+x^2-12x-12=0$;

л) $2x^4-10x^3+4x^2+30x-18=0$.

4. Да се реши уравнението:

а) $x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108=0$;

б) $x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1=0$;

в) $x^5-12x^4+57x^3-134x^2+156x-72=0$

г) $x^4-8x^3+24x^2-32x+16=0$;

д) $x^5-12x^4+48x^3-64x^2=0$;

е) $x^6+4x^5+7x^4+8x^3+7x^2+4x+1=0$.

5. Да се реши уравнението.

а) $2x^4+11x^3+18x^2+4x-8=0$;

б) $x^5-6x^4+8x^3+16x^2-48x+32=0$;

в) $9x^4+30x^3+13x^2-20x+4=0$;

г) $2x^4+11x^3+16x^2+x-6=0$;

д) $9x^5-39x^4+43x^3+7x^2-16x-4=0$;

е) $x^5+x^4-23x^3-47x^2+42x+90=0$.

1.5. Решаване на уравнения и неравенства от по-висока степен

1) Реципрочни уравнения

Определение. Полиномът $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ се нарича **реципрочен**, ако коефициентите му, които са равноотдалечени от краищата, са равни, т.е. $a_0=a_n$, $a_1=a_{n-1},...,a_k=a_{n-k},...$

Уравнението $P_n(x)=0$ се нарича **реципрочно уравнение.**

Ако едно реципрочно уравнение е от нечетна степен, то има корен $x=-1$, което лесно следва от определението. Тогава полиномът $P_n(x)$ е произведение от $(x+1)$ и полином от четна степен, който е реципрочен.

Нека реципрочното уравнение е от четна степен $n=2k$.

Разделяме уравнението на x^k ($x=0$ очевидно не е корен), групираме едночлените с равни коефициенти и полагаме $x+\dfrac{1}{x}=y$. Използваме, че

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=y^2-2 \qquad \text{и} \qquad x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=y^3-3y.$$

Така ще получим уравнение от по-ниска степен, което решаваме.

Ще покажем метода с конкретен пример.

1. Да се реши уравнението $x^7+2x^6-5x^5-13x^4-13x^3-5x^2+2x+1=0$.

Решение.

1) Уравнението е реципрочно от нечетна степен. Следователно $x_1=-1$ е корен.

2) Разделяме полинома на $x+1$.

	1	2	−5	−13	−13	−5	2	1
−1	1	1	−6	−7	−6	1	1	0

$P(x)=(x+1)(x^6+x^5-6x^4-7x^3-6x^2+x+1)$.

Полиномът $Q(x)=x^6+x^5-6x^4-7x^3-6x^2+x+1$ е реципрочен полином от четна (шеста) степен.

3) Делим уравнението $Q(x)=0$ на x^3

$$\frac{x^6}{x^3}+\frac{x^5}{x^3}-\frac{6x^4}{x^3}-\frac{7x^3}{x^3}-\frac{6x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^3+x^2-6x-7-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0$$

4) Представяме $Q(x)$ във вида $\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-6\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-7=0$.

5) Полагаме $x+\dfrac{1}{x}=y \quad \Rightarrow \quad x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2; \quad x^3+\dfrac{1}{x^3}=y^3-3y$.

6) Решаваме уравнението $y^3-3y+y^2-2-6y-7=0$, което е от трета степен.

$$y^3+y^2-9y-9=0 \qquad (1)$$

Очевидно лявата страна се разлага на множители.

$y^2(y+1)-9(y+1)=0$

$(y+1)(y-3)(y+3)=0 \Rightarrow y_1=-1;\ y_2=-3;\ y_3=3$.

7) Намираме корените на първоначалното уравнение:

$x+\dfrac{1}{x}=-1, \qquad x^2+x+1=0,$ няма реални корени;

$x+\dfrac{1}{x}=-3$, $\quad x^2+3x+1=0$, $\quad x_{2,3}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$;

$x+\dfrac{1}{x}=3$, $\quad x^2-3x+1=0$, $\quad x_{4,5}=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

8) Корените на уравнението са $x_1=-1$, $x_{2,3}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$, $x_{4,5}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.▲

Забележка: Уравнението (1) успяхме да разложим на множители. Ако това не се получи, трябва да търсим рационален корен по схемата на Хорнер.

2. – 8. Да се реши уравнението

2. $x^4+4x^3+5x^2+4x+1=0$.

3. $2x^4-5x^3+6x^2-5x+2=0$.

4. $x^5-5x^3-5x^2+1=0$.

5. $x^5+6x^4+7x^3+7x^2+6x+1=0$.

6. $x^5-9x^4+16x^3+16x^2-9x+1=0$.

7. $x^6-36x^4+70x^3-36x^2+1=0$.

8. $6x^6-31x^5+75x^4-101x^3+75x^2-31x+6=0$.

2) Общи задачи за уравнения и неравенства от по-висока степен

При решаване на уравнения от по-висока степен използваме следните методи:

- разлагаме полинома на множители чрез методите за разлагане на цели изрази или по метода на неопределените коефициенти;
- правим подходящо полагане, например, при биквадратни и реципрочни уравнения;
- търсим рационален корен по схемата на Хорнер (ако уравнението е с цели коефициенти), за да намалим степента с 1 и за получения полином отново прилагаме някои от тези методи.

9. Да се реши уравнението $x^4-25x^2-10x-1=0$

Решение. Разлагаме полинома по следния начин

$$x^4-25x^2-10x-1=x^4-(5x+1)^2=(x^2-5x-1)(x^2+5x+1).$$

Намираме корените на двата квадратни тричлена, които са и корените на даденото уравнение: $x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$; $x_{3,4}=\dfrac{5\pm\sqrt{29}}{2}$.▲

10. Да се реши уравнението $x^4+5x^3+8x^2+7x+3=0$.

Решение. Тъй като старшият коефициент на уравнението е 1, то рационални корени на уравнението могат да бъдат числата ±1 и ±3. Директно проверяваме, че 1 не е корен, а -1 е корен. Записваме изчисленията за -1 по схемата на Хорнер. Правим проверка и за 2-кратен корен.

	1	**5**	**8**	**7**	**3**
–1	**1**	**4**	**4**	**3**	0
–1	1	3	1	2	
–3	1	1	1	0	

Числата -1 и -3 са корени и разлагаме уравнението $(x+1)(x+3)(x^2+x+1)=0$. Квадратният тричлен има отрицателна дискриминанта и корените на уравнението са $x_1=-3$, $x_2=-1$.▲

11. Да се реши уравнението $x^4+2x^3-11x^2-6x+2=0$.

Решение. Ако уравнението има рационални корени, то те са числата ±1 или ±2. Директно проверяваме, че ±1 не са корени. Правим проверка за ±2.

	1	**2**	**–11**	**–6**	**2**
2	1	4	–3	–12	–22
–2	1	0	–11	16	–30

Следователно уравнението няма рационални корени.

С метода на неопределените коефициенти ще проверим дали уравнението се разлага в произведение на два квадратни тричлена с цели коефициенти, т.е. търсим представяне на полинома на уравнението във вида:

$x^4+2x^3-11x^2-6x+2=(x^2+ax+b)(x^2+mx+n)$. Разкриваме скобите:

$x^4+2x^3-11x^2-6x+2=x^4+(a+m)x^3+(n+b+am)x^2+(an+bm)x+bn$.

Коефициентите пред съответните степени на x са равни. Получаваме системата:

$$\left|\begin{array}{l} a+m=2 \\ n+b+am=-11 \\ an+bm=-6 \\ bn=2 \end{array}\right.$$

За да решим тази система разсъждаваме така: b и n са цели числа и $bn=2$, следователно за b и n има следните четири възможности

$b=1$, $n=2$ или $b=2$, $n=1$ или $b=-1$, $n=-2$ или $b=-2$, $n=-1$.

Последователно проверяваме дали в някой от тези случаи ще успеем да решим системата.

I. случай. $b=1, n=2$. Имаме системата:

$$\left|\begin{array}{l} a+m=2 \ \ /.(-2) \text{ и прибавяме към третото уравнение} \\ am=-14 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , \\ 2a+m=-6 \end{array}\right.$$

Получаваме $m=10$, $a=-8$, откъдето $am=-80$, което не е възможно, защото $am=-14$, следователно този случай не е възможен.

II. случай. $b=-1, n=-2$. Получаваме системата:

$$\begin{vmatrix} a+m=2 \\ am=-8 \\ -2a-m=-6 \end{vmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a=4,\ m=-2 \text{ (проверяваме, че } am=-8 \text{)} \ \Rightarrow \ b=-1,\ n=-2.$$

В този случай системата има решение. Тогава полиномът на уравнението се представя във вида $x^4+2x^3-11x^2-6x+2=(x^2+4x-1)(x^2-2x-2)$.

Остава да намерим корените на двата квадратни тричлена.

$x^2+4x-1=0$, $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{5}$, и $x^2-2x-2=0$, $x_{3,4}=1\pm\sqrt{3}$.

Корените на даденото уравнението са $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{5}$, $x_{3,4}=1\pm\sqrt{3}$.▲

12. – 21. Решете уравнението.

12. $x^5+3x^4-2x^3-6x^2+x+3=0$.

13. $x^5-5x^4-2x^3+10x^2+x-5=0$.

14. $2x^3-11x^2+7x-1=0$.

15. $3x^3-13x^2+x+1=0$.

16. $x^4+2x^3-12x^2-18x+27=0$.

17. $x^4+5x^3+2x^2-20x-24=0$.

18. $x^4-5x^3+7x^2-5x+6=0$.

19. $x^4+5x^3+7x^2+5x+6=0$.

20. $x^3-10x^2+22x-7=0$.

21. $x^3-2x^2-14x+3=0$.

При решаване на неравенства от по-висока степен, разлагаме полинома на неравенството на множители по изучените методи, след което по метода на интервалите определяме решението.

22. – 28. Решете неравенството.

22. $x^5+3x^4+2x^3-x^2-3x-2<0$.

23. $x^5-2x^4-4x^3+4x^2-5x+6>0$.

24. $-x^4-3x^3+2x^2+2x-12>0$.

25. $2x^4-x^3-12x^2-2x+4>0$.

26. $x^4-5x^3-4x^2+44x-48<0$;

27. $x^4-x^3-10x^2+4x+24>0$;

28. $x^5-5x^4+3x^3+11x^2-6x-4<0$.

29. Решете уравнението $x^4+2x^3-7x^2+3=0$ чрез метода на неопределените коефициенти.

Тест 1
Полиноми на една променлива

1. Частното при деление на полинома $3x^5-2x^4-6x^2+4x$ на полинома $3x^2-2x$ е равно на:

☒ **А)** x^3-x+1 **Б)** x^3+2x **В)** x^2-2x **Г)** x^3-2

2. За полинома $P(x)=2x^3-3x^2+x-4$ попълнете празните места, така че равенствата да са верни.

а) $P(2)=$ ___________

б) $P(5)=$ ___________

в) $P(-4)=$ ___________

г) $P(-3)=$ ___________

3. Намерете десетичния запис на числото $23A4_{(11)}$

☒ **А)** 3135 **Б)** 3139 **В)** 3275 **Г)** 3289

4. На празното място запишете разлагането на полинома $P(x)=x^4-3x^3+x^2+4$ на прости множители.

____

На задачи 5 и 6 напишете на допълнителен лист решението с необходимите обосновки.

5. Да се реши уравнението $x^4+3x^3-8x^2-32x-24=0$.

6. Да се реши уравнението $x^6+4x^5+4x^4+2x^3+4x^2+4x+1=0$

Тест 2
Полиноми на една променлива

1. Частното при делението на полинома $6x^6-7x^4+6x^3-3x^2+2x$ на полинома $3x^3+x$ е равно на:

☒ **А)** $2x^3-x^2+2x$ **Б)** $2x^3-x^2$ **В)** $2x^3-3x+2$ **Г)** $2x^3-2x+2$

2. За полинома $P(x)=2x^3-2x^2-2x+1$ попълнете празните места, така че равенствата да са верни.

а) $P(2)=$ ___________

б) $P(5)=$ ___________

в) $P(-4)=$ ___________

г) $P(-3)=$ ___________

3. Намерете десетичния запис на числото $31B4_{(12)}$.

☒ **А)** 5124 **Б)** 5265 **В)** 5318 **Г)** 5464

4. На празното място запишете разлагането на полинома $2x^5+5x^4-x^3-x^2+8x-4$ на прости множители.

____

На задачи 5 и 6 напишете на допълнителен лист решението с необходимите обосновки.

5. Да се реши уравнението $x^4-4x^3-6x^2+35x-30=0$.

6. Да се реши уравнението $x^6-x^5-x^4+2x^3-x^2-x+1=0$.

2. Числови редици

2.1. Метод на математическата индукция

Методът на математическата индукция се основава на следната аксиома.

Аксиома. Ако едно твърдение е вярно за $n=1$ и от предположението, че е вярно за $n=k$, следва, че е вярно за $n=k+1$, то твърдението е вярно за всяко естествено число n.

За да докажем с метода на математическата индукция, че едно твърдение е вярно, постъпваме така:

1) Доказваме, че твърдението е вярно за $n=1$ (основа на индукцията).
2) Допускаме, че твърдението е вярно за $n=k$ (индукционно предположение).
3) Доказваме, че твърдението е вярно за $n=k+1$ (индукционна стъпка).
4) Правим извода, че твърдението е вярно за всяко естествено число n.

Възможно е твърдението да не е вярно за $n=1,2,3,\dots,m-1$, но да е вярно за $n=m$. Тогава за основа на индукцията избираме $n=m$, предполагаме, че твърдението е вярно за $n=k$ ($k>m$), доказваме, че е вярно за $n=k+1$ и правим извода, че е вярно за всички естествени числа, по големи или равни на m.

1. Да се докаже, че равенството $1^2+2^2+\dots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ е вярно за всяко естествено число n.

Решение.

1) Нека $n=1$. Имаме $1^2=\dfrac{1(1+1)(2.1+1)}{6}=\dfrac{1.2.3}{6}=1$. Следователно равенството е вярно за $n=1$.

2) Да допуснем, че равенството е вярно при $n=k$:

$$1^1+2^2+\dots+(\kappa-1)^2+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}. \qquad (1)$$

3) Ще докажем, че равенството е вярно за $n=k+1$, тоест

$$1^2+2^2+\dots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Последователно преобразуваме:

$$\underbrace{1^2+2^2+\dots+k^2}+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=$$

Използвали сме индукционното предположение.

$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Получихме, че равенството е вярно за $n=k+1$.

4) Следователно равенството е вярно за всяко естествено число n.▲

2. Неравенство на Бернули

Да се докаже неравенството $(1+x)^n \geq 1+nx$ за $x \geq -1$ и n естествено число.

Решение. При $n=1$ имаме $1+x \geq 1+x$.

Нека неравенството е вярно за n, ще докажем, че е вярно и за $n+1$.

Вярното неравенство $(1+x)^n \geq 1+nx$ умножаваме по $(1+x)>0$:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \ / \ .(1+x)>0, \qquad (1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+\underbrace{nx^2}_{nx^2\geq 0} \geq 1+(n+1)x.$$

Получихме, че неравенството е вярно за $n+1$. От Аксиомата за математическата индукция следва, че неравенството е вярно за всяко естествено число n.▲

3. Да се докаже с метода на математическата индукция равенството:

а) $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

б) $1^3+2^3+...+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

в) $1^4+2^4+...+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

4. Да се докаже неравенството $2^n > 2n+1$ за всяко естествено число $n \geq 3$.

5. За кои n е изпълнено неравенството $n! > 2^n$?

2.2. Нютонов бином

1) Биномни коефициенти

Формулата за пресмятане на комбинациите на n елемента от k–ти клас, която знаем от 8. клас, е:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!},\ k \le n$$

Тези числа се наричат **биномни коефициенти** и се означават $\binom{n}{k}$ – четем „n над k ", тоест

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!},\quad n = 0,1,2,...;\quad k = 0,1,2,...,n\,.$$

Ще разгледаме някои свойства на биномните коефициенти.

Свойство 1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, което следва непосредствено от определението (и да припомним, че $0! = 1$).

Свойство 2. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},\quad n = 0,1,2,...;\quad k = 0,1,2,...,n\,.$

Доказателство. Ще използваме, че

$$(k+1)! = 1.2...k\,(k+1) = k!\,(k+1)\,, \qquad (1)$$

$$(n-k)! = 1.2...(n-k-1)(n-k) = (n-k-1)!\,(n-k)\,. \qquad (2)$$

Последователно преобразуваме:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$$

Записали сме формулата за биномите коефициенти.

$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} =$$

Използвали сме равенствата (1) и (2).

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}.\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) =$$

Изнесли сме общ множител $\frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}$.

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}.\frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)} = \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n-k-1)!\,(n-k)(k+1)} =$$

Преобразували сме израза в скобите.

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} =$$

За да получим следващото равенство, ще представим $(n-k)$ така: $n-k = n+1-(k+1)$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.\blacktriangle$$

Свойство 3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},\quad n = 0,1,2,...;\quad k = 0,1,2,...,n\,.$

Доказателство. $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-n+k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.\blacktriangle$

2) Триъгълник на Паскал

Да пресметнем числата $\binom{n}{k}$ за някои n и $k=0,1,2,...,n$ и да подредим резултатите така:

n	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k}$	Колона k	Колона $k+1$
$n=0$	1	1		
$n=1$	1 1	1 1		
$n=2$	1 2 1	1 2 1		
$n=3$	1 3 3 1	1 3 3 1		
$n=4$	1 4 6 4 1	1 4 **6** **4** 1	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1}$
$n=5$	1 5 10 10 5 1	1 5 10 **10** 5 1		$\binom{n+1}{k+1}$

Да разгледаме получените фигури в колони 2 и 3.

Първото и последното число на всеки ред е 1, което изразява **Свойство 1**. Числата, симетрични спрямо средата, са равни **(Свойство 3)**.

Сборът на числата, които стоят на n–тия ред в k–та и в $(k+1)$–ва колона е равен на числото на долния $(n+1)$–ви ред и $(k+1)$–ва колона **(Свойство 2)**. Това свойство се онагледява по-добре на втората фигура (в колона 3). Всяка от фигурите се нарича **триъгълник на Паскал**.

3) Нютонов бином

Да разгледаме триъгълника на Паскал. Забелязваме, че числата на първите редове са точно коефициентите във формулите за съкратено умножение:

$n=2 \quad (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$n=3 \quad (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^3+b^3$

$n=4 \quad (a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$ – след разкриване на скобите привеждаме в нормален вид и получаваме: $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

и така нататък.

Предполагаме, че е вярна формулата

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + ... + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n .$$

Тази формула се нарича **бином на Нютон**. Ще докажем верността ѝ по индукция, но преди това да направим още няколко наблюдения.

Отляво на знака равно стои двучлен (на латински „бином") на числата a и b на степен n. Дясната страна е полином на a и b като коефициентите са числата $\binom{n}{k}$, които поради тази причина се наричат биномни коефициенти. Всеки едночлен е от степен n, т.е. сборът от степента на a и степента на b е n.

В първото събираемо a е от степен n и степените на a намаляват с единица във всяко следващо събираемо до степен 0, а степените на b растат от 0 в първото събираемо до n в последното.

Теорема. Да се докаже формулата

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + ... + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n , \qquad (3)$$

където $n=0,1,2,...;\quad k=0,1,2,...,n$.

Доказателство. Ще докажем формулата по индукция.

1) Основата на индукцията вече е проверена с формулите за $n=2,3,4$.

2) Допускаме, че формулата (3) е вярна за n. Ще докажем, че тя е вярна за $n+1$.

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)^n(a+b)=$$

$$=\left[\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n\right](a+b)=$$

$$=\binom{n}{0}a^{n+1}+\binom{n}{1}a^nb+\binom{n}{2}a^{n-1}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}a^2b^{n-1}+\binom{n}{n}ab^n+$$

$$+\binom{n}{0}a^nb+\binom{n}{1}a^{n-1}b^2+\binom{n}{2}a^{n-2}b^3+\ldots\ldots+\binom{n}{n-1}ab^n+\binom{n}{n}b^{n+1}$$

Събираме коефициентите пред подобните едночлени, като използваме **Свойство 2)**:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{1},\qquad \binom{n}{1}+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{2},\qquad \ldots,\qquad \binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n},$$

а коефициентите $\binom{n}{0}$ и $\binom{n}{n}$ заместваме съответно с $\binom{n+1}{0}$ и $\binom{n+1}{n+1}$, които по **Свойство 1)** са равни на 1. Получаваме:

$$(a+b)^{n+1}=\binom{n+1}{0}a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^nb+\binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2+\ldots+\binom{n+1}{n}ab^n+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1},$$

с което формулата е доказана.▲

Ако в нютоновия бином заместим b с $-b$, ще получим формулата за $(a-b)^n$, като знаците пред коефициентите се сменят алтернативно:

$$(a-b)^n=\binom{n}{0}a^n-\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}b^n.$$

Ако в нютоновия бином заместим $a=b=1$, ще получим

$(1+1)^n=2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}$ – сборът от биномните коефициенти е равен на 2^n.

1. Напишете развитието на нютоновия бином $(a+b)^5$ и $(a-b)^6$.

2. Намерете седмото събираемо в развитието на бинома $(1+\sqrt{2})^{10}$.

3. Намерете петото събираемо в развитието на бинома $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^6$.

4. Да се намери коефициентът пред x^5 в нормалния вид на полинома $(1+x)^7$.

5. Да се намери коефициентът пред x^4 в нормалния вид на полинома $(x-2)^7$.

6. Сборът $\binom{12}{7}+\binom{12}{8}$ е равен на: ☒ **А)** $\binom{12}{9}$ **Б)** $\binom{15}{12}$ **В)** $\binom{13}{8}$ **Г)** $\binom{13}{9}$

7. Сборът $\binom{7}{2}+\binom{7}{6}$ е равен на: ☒ **А)** $\binom{7}{4}$ **Б)** $\binom{8}{4}$ **В)** $\binom{8}{6}$ **Г)** $\binom{8}{7}$

8. Пресметнете:

а) $\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$;

б) $\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}$;

в) $\binom{6}{2}+\binom{6}{3}-\binom{7}{4}$;

г) $\binom{9}{4}+\binom{7}{0}-\binom{10}{6}+\binom{9}{3}$.

2.3. Числови редици

1) Определение и монотонни редици (преговор)

Нека $f(n)$ е функция, дефинирана в множеството на естествените числа $\mathbb{N}$.

Стойностите на функцията $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$, ... се наричат **безкрайна числова редица**, $f(n)$ се нарича общ член на редицата.

Ако f е дефинирана в първите n естествени числа, редицата $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$ се нарича **крайна числова редица**.

Ние ще разглеждаме безкрайни числови редици и обикновено ще казваме само „редица”.

Прието е членовете на редицата да се записват с една и съща буква с индекс. Ако означим $f(1)=a_1$, $f(2)=a_2,\ldots, f(n)=a_n,\ldots$, то редицата записваме така:

$a_1, a_2, ..., a_n, ...$ или $\{a_n\}$, и a_n е общият член на редицата.

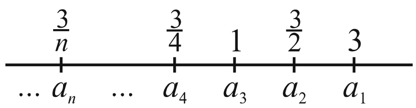
Една редица може да бъде зададена чрез:

– формула за общия член. Например $a_n = 2n+1$.

– рекурентна формула. Например $a_1 = 5$, $a_n = a_{n-1} + 2$.

Изобразяване върху числовата ос.

Например редицата $a_n = \dfrac{3}{n}$ се изобразява така:



<u>Монотонни редици.</u>

Редицата $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ се нарича:

– **монотонно растяща**, ако $a_n \le a_{n+1}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Ако $a_n < a_{n+1}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, редицата е **строго растяща**.

– **монотонно намаляваща**, ако $a_n \ge a_{n+1}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Ако $a_n > a_{n+1}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, редицата е **строго намаляваща**.

– **монотонна**, ако е (монотонно) растяща или (монотонно) намаляваща.

За да изследваме монотонността на една редица сравняваме разликата $a_n - a_{n+1}$ с числото 0 или, ако $a_n > 0$ (за всяко n), може да сравним частното $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ с числото 1.

1. Да се докаже, че редицата с общ член $a_n = \dfrac{1}{n}$ е монотонно намаляваща.

Решение. Разглеждаме разликата $a_n - a_{n+1} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)} > 0 \quad \Rightarrow \quad a_n > a_{n+1}$ и редицата е монотонно намаляваща.

Тъй като $a_n > 0$, то, може да разгледаме и частното $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} > 1 \quad \Rightarrow \quad a_n > a_{n+1}$.▲

2) Ограничени редици

Определение. Редицата $\{a_n\}$ се нарича:

– **ограничена отдолу**, ако съществува число A, такова че $A \le a_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$;

– **ограничена отгоре**, ако съществува число B, такова че $a_n \le B$ за всяко $n \in \mathbb{N}$;

– **ограничена**, ако съществуват две числа A и B, такива че $A \le a_n \le B$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Ако редицата не е ограничена, тя се нарича **неограничена**.

Очевидно, че ако една редица е монотонно растяща тя е ограничена отдолу от първия си член, защото $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \le ...$ и ако е монотонно намаляваща, тя е ограничена отгоре от първия си член, защото $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \ge ...$.

2. Да се провери дали редицата с общ член a_n е ограничена или неограничена.

а) $a_n = \dfrac{1}{n}$;

б) $a_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n}$.

Решение.

а) Тъй като $n \geq 1$, то $\dfrac{1}{n} > 0$ и $\dfrac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{n} \leq 1$.

Редицата е ограничена отдолу от числото 0, а отгоре от числото 1.

б) Да запишем първите няколко члена на редицата: $1; \dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{5}; \dfrac{3}{5}; \ldots$

Забелязваме, че $a_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n} = \begin{cases} \dfrac{3}{n}, \text{ при } n \text{ четно} \\ \dfrac{1}{n}, \text{ при } n \text{ нечетно} \end{cases}$.

Както вече видяхме $0 < \dfrac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{3}{n} \leq 3$. Тогава за a_n получаваме $0 < a_n \leq 3$.▲

3. Напишете общия член на редицата, за която

$a_1 = \sqrt{5}$

$a_2 = \sqrt{5+\sqrt{5}}$

$a_3 = \sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5}}}$

$a_4 = \sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5}}}}$

...

И докажете, че тя е ограничена отгоре от числото $\sqrt{5}+1$.

Решение. Имаме

$a_1 = \sqrt{5}$,

$a_2 = \sqrt{5+\sqrt{5}} = \sqrt{5+a_1}$,

$a_3 = \sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5}}} = \sqrt{5+a_2}$, изобщо $a_n = \sqrt{5+a_{n-1}}$, $n \geq 2$.

Доказателството за ограничеността на редицата ще направим по индукция.

Очевидно $a_1 = \sqrt{5} < \sqrt{5}+1$.

Нека $a_n < \sqrt{5}+1$, тогава за a_{n+1} получаваме

$$a_{n+1} = \sqrt{5+a_n} < \sqrt{5+\sqrt{5}+1} < \sqrt{5+\sqrt{5}+1+\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = \sqrt{5}+1$$

$\Rightarrow$ $a_{n+1} < \sqrt{5}+1$ и по метода на математическата индукция заключаваме, че твърдението е изпълнено за всяко $n \in \mathbb{N}$, т.е. $a_n < \sqrt{5}+1$.▲

Примери за редици:

Редицата с общ член $a_n = \dfrac{1}{n}$ е монотонно намаляваща и ограничена.

Редицата с общ член $a_n = 2n+1$ е монотонно растяща, но е неограничена.

Редицата $3;-2;3;-2;3;-2;\ldots$ е ограничена, но не е монотонна.

Редицата $1;\ 2;\ 3;\ 2;\ 5;\ 2;\ 7;\ 2;\ 9,\ldots$ нито е ограничена, нито е монотонна. Общият член на тази редица е $a_n = \begin{cases} 2, \text{ при } n \text{ четно} \\ n, \text{ при } n \text{ нечетно} \end{cases}$.

4. За редицата с общ член a_n проверете дали е монотонна и дали е ограничена.

а) $a_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$;

б) $a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$;

в) $a_n = \dfrac{1}{n+1} + 1$;

г) $a_n = \dfrac{n+1}{n^2}$.

5. Проверете монотонна ли е редицата, зададена с рекурентната формула:

а) $a_1 = 3,\ a_n = a_{n-1} - 2,\ n \geq 2$;

Решение. За a_{n+1} имаме $a_{n+1} = a_n - 2$. Тогава разликата $a_{n+1} - a_n = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} < a_n$ и следователно редицата е монотонно намаляваща.▲

б) $a_1 = 2,\ a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2},\ n \geq 2$;

в) $a_1 = 1,\ a_n = 2a_{n-1},\ n \geq 2$;

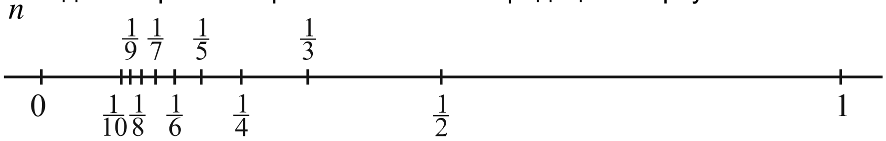
г) $a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} - n,\ n \geq 2$.

2.4. Теореми за граници на редици

1) Граница на редица

Да разгледаме следния пример.

Нека $a_n = \dfrac{1}{n}$ и да изобразим първите 10 члена на редицата върху числовата ос.



Виждаме, че членовете на редицата стават с много малки стойности и се „сгъстяват" към точката 0. Те се доближават произволно близо до нулата в следния смисъл: ако изберем едно произволно малко число $\varepsilon > 0$ (ε – епсилон, буква от гръцката азбука), то за „почти всички" членове на редицата **разстоянието от** a_n **до** $\mathbf{0}$ **става по-малко от ε.** По-точно:

Нека $\varepsilon = 2$, то $\left|\dfrac{1}{1} - 0\right| < 2 = \varepsilon$, $\left|\dfrac{1}{2} - 0\right| < 2 = \varepsilon$ ... $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < 2 = \varepsilon$ за всяко n.

Нека $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, то $\left|\dfrac{1}{3} - 0\right| < \dfrac{1}{2} = \varepsilon$, $\left|\dfrac{1}{4} - 0\right| < \dfrac{1}{2} = \varepsilon$ ... $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \dfrac{1}{2} = \varepsilon$ за всяко $n > 2 = \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Нека $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, то $\left|\dfrac{1}{11} - 0\right| < \dfrac{1}{10} = \varepsilon$, $\left|\dfrac{1}{12} - 0\right| < \dfrac{1}{10} = \varepsilon$ ... $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \dfrac{1}{10} = \varepsilon$ за всяко $n > 10 = \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Нека $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$, то $\left|\dfrac{1}{1001} - 0\right| < \dfrac{1}{1000} = \varepsilon$ ... $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \dfrac{1}{1000} = \varepsilon$ за всяко $n > 1000 = \dfrac{1}{\varepsilon}$.

…

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно число, тогава е изпълнено $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ за всяко $n > N = \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Или – всички членове от някой номер (по-голям от реципрочното число на епсилон) нататък са отдалечени от нулата на разстояние по-малко от ε. На по-голямо разстояние от нулата са само краен брой членове.

И така за всяко $\varepsilon > 0$ намерихме номер $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$, така че за всички членове $a_n = \dfrac{1}{n}$, чийто номер n е по-голям от N, е изпълнено $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Числото 0 е граница на редицата с общ член $a_n = \dfrac{1}{n}$.

Определението за граница на произволна редица е следното.

Определение. Числото α се нарича **граница на редицата** $\{a_n\}$, ако за всяко число $\varepsilon > 0$ съществува номер N, така че за всички членове a_n, които имат номер $n > N$, е изпълнено $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Фактът, че α е граница на редицата a_n означаваме по някой от следните начини:

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \alpha$ – четем „лимес a_n е равно на α при n, клонящо към безкрайност" или „границата на редицата $\{a_n\}$ е равна на α при n, клонящо към безкрайност"

или само $\lim a_n = \alpha$ – „лимес a_n е равно на α" или „границата на a_n е равна на α"

или $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha$ – „a_n клони към α при n, клонящо към безкрайност"

или $a_n \to \alpha$ – „a_n клони към α".

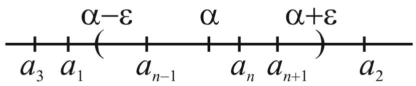
Ако една редица има граница, тя се нарича **сходяща**. Ако няма граница, се нарича **разходяща**.

Може да се докаже , че:

Теорема 1. Всяка сходяща редица има точно една граница.

Според определението, разгледания пример показва, че редицата с общ член $a_n = \dfrac{1}{n}$ е сходяща и има граница 0, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ или $\dfrac{1}{n} \to 0$.

Изобразяване върху числовата ос.



Знаем, че $|a_n - \alpha| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon < a_n - \alpha < \varepsilon$.

Последното равенство е еквивалентно на $\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$.

Коментар: колкото и малко число ε да вземем, то всички a_n от някой номер нататък попадат в интервала $(\alpha-\varepsilon;\ \alpha+\varepsilon)$ – извън него остават **краен брой членове** на редицата. Ясно е, че всички членове на редицата попадат в краен интервал, което означава, че всяка **сходяща редица е ограничена.**

Да обърнем внимание, че определението за граница на редица включва две неща:

– редицата е сходяща

– и α е нейната граница.

Сходимостта на една редица може да бъде установена и по друг начин.

Теорема 2. (Теорема на Вайерщрас) Всяка монотонна и ограничена редица е сходяща.

Както показахме, всяка монотонно растяща редица е ограничена отдолу от първия си член, а всяка монотонно намаляваща редица е ограничена отгоре от първия си член, то на практика теоремата на Вайерщрас се използва в следния вариант.

Всяка монотонно растяща и ограничена отгоре редица е сходяща и всяка монотонно намаляваща и ограничена отдолу редица е сходяща.

1. Да се докаже, че редицата с общ член $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ е сходяща.

Решение.

1) Ще докажем, че редицата е монотонно растяща.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \ \Rightarrow\ a_{n+1} > a_n.$$

2) Ще докажем, че редицата е ограничена отгоре.

Тъй като $0 < n < n+1$, то и $\dfrac{n}{n+1} < 1$ за всяко n, т.е. $a_n = \dfrac{n}{n+1} < 1$.

От теоремата на Вайерщрас заключаваме, че редицата е сходяща (но не знаем нейната граница).▲

Теоремата на Вайерщрас доказва сходимостта на една редица, но не дава начин за намиране на границата ѝ.

Сега ще разгледаме теореми за граници, които улесняват намирането на границата.

Теорема 3. (Граничен преход в равенство)

Ако за сходящите редици $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ е изпълнено $a_n = b_n$ за всяко n, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Теорема 4. (Граничен преход в неравенство)

Ако за сходящите редици $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ е изпълнено $a_n \le b_n$ за всяко n, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Теорема 5. (Граничен преход в неравенства)

Ако редиците $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ са сходящи и имат обща граница α, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$

и редицата $\{c_n\}$ е такава, че $a_n \le c_n \le b_n$ за всяко n, то редицата $\{c_n\}$ е сходяща и границата ѝ е α, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$.

Схематично тези три теореми записваме така:

Т3.

$$\begin{array}{ll} a_n = b_n, & \forall n \\ \downarrow & \downarrow \\ a & b \end{array}$$
$$\Rightarrow a = b$$

Т4.

$$\begin{array}{ll} a_n \le b_n, & \forall n \\ \downarrow & \downarrow \\ a & b \end{array}$$
$$\Rightarrow a \le b$$

Т5.

$$\begin{array}{lll} a_n \le c_n \le & b_n, & \forall n \\ \downarrow & \downarrow & \\ \alpha & \alpha & \end{array}$$
$$\Rightarrow c_n \to \alpha$$

2) Действия със сходящи редици

Теорема 6. (Действия със сходящи редици)

Ако редиците $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ са сходящи, то са сходящи и редиците с общи членове $a_n + b_n$, $a_n - b_n$, $a_n b_n$ и $\dfrac{a_n}{b_n}$ и:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \text{ при } b_n \ne 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} b_n \ne 0.$$

Теоремата може да се обобщи за сбор и произведение на краен брой сходящи редици.

Може да се докаже, че, ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$.

Примери:

1) Нека $a_n = c = \text{const} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

2) Знаем, че $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(c.\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} c . \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$, тъй като

$$\begin{array}{ccccc} -\dfrac{1}{n} & \le & \dfrac{(-1)^n}{n} & \le & \dfrac{1}{n} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & & & & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$, тъй като

$$\begin{array}{ccccc} -\dfrac{1}{n} & \le & \dfrac{\sin n}{n} & \le & \dfrac{1}{n} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & & & & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 2 + 0 = 2$.

6) Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 5$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2a_n + 1}{3a_n . b_n} - \frac{a_n}{5}\right) = \frac{2\lim\limits_{n\to\infty} a_n + 1}{3\lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n} - \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{5} = \frac{2.3+1}{3.3.5} - \frac{3}{5} = -\frac{20}{45} = -\frac{4}{9}.$$

Казваме, че сме направили граничен преход и ще записваме по-кратко така:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2a_n + 1}{3a_n b_n} - \frac{a_n}{5}\right) = \frac{2.3+1}{3.3.5} - \frac{3}{5} = -\frac{20}{45} = -\frac{4}{9}.$$

7) Да се намери границата $\lim\limits_{a_n\to 2}\dfrac{3a_n-6}{a_n^{\,2}-4}$

Решение. При граничен преход получаваме граница 0 в знаменател. Числителят също има граница 0. Казваме, че това е неопределеност от вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Трябва да извършим някои преобразувания, за да се освободим от тази неопределеност:

$$\lim_{a_n\to 2}\frac{3a_n-6}{a_n^{\,2}-4}=\lim_{a_n\to 2}\frac{3(a_n-2)}{(a_n-2)(a_n+2)}=\lim_{a_n\to 2}\frac{3}{a_n+2}=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}.\blacktriangle$$

2. Да се намери границата.

а) $\lim\limits_{a_n\to 2}\dfrac{3a_n+1}{5-a_n}$; б) $\lim\limits_{a_n\to 3}\dfrac{a_n^{\,2}+2}{a_n+1}$;

в) $\lim\limits_{a_n\to 5}(\sqrt{a_n-1}+2a_n)$; г) $\lim\limits_{a_n\to 1}(\sqrt{a_n+1}-\sqrt{a_n})$.

3. Да се намери границата.

а) $\lim\limits_{a_n\to -1}\dfrac{a_n^{\,2}+4a_n+3}{a_n^{\,2}-a_n-2}$; б) $\lim\limits_{a_n\to 4}\dfrac{a_n^{\,2}-16}{a_n^{\,2}-2a_n-8}$;

в) $\lim\limits_{a_n\to 2}\dfrac{a_n^{\,3}-8}{2a_n^{\,2}-5a_n+2}$; г) $\lim\limits_{a_n\to \sqrt{3}}\dfrac{(a_n-\sqrt{3})(a_n-\sqrt{2})}{a_n^{\,2}-3}$.

4. Да се намери границата.

а) $\lim\limits_{a_n\to 0}\dfrac{\sqrt{a_n+2}-\sqrt{2}}{a_n}$; б) $\lim\limits_{a_n\to 2}\dfrac{\sqrt{3a_n+2}-\sqrt{a_n+6}}{\sqrt{a_n+2}-\sqrt{2a_n}}$; в) $\lim\limits_{a_n\to 3}\dfrac{\sqrt{a_n^{\,2}+3}-2\sqrt{a_n}}{a_n-3}$.

5. Като използвате определението за граница на редица, докажете, че:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n-2}=2$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n}=\dfrac{2}{3}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+5}{5n-50}=\dfrac{1}{5}$.

6. Като използвате теоремата на Вайерщрас, че всяка монотонна и ограничена редица, е сходяща, докажете, че редицата с общ член a_n е сходяща.

а) $a_n=\dfrac{(n+1)(n+3)}{n^2}$; б) $a_n=\dfrac{n+2}{n-1}$;

в) $a_n=1-\dfrac{1}{n+1}$; г) $a_n=\dfrac{n-2}{n+2}$.

7. Докажете, че рекурентната редица е сходяща и намерете границата ѝ.

а) $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{n+2}$, $a_1=2$; б) $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+1$, $a_1=1$;

в) $a_{n+1}=a_n(2-a_n)$, $a_1=\dfrac{1}{2}$; г) $a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}$, $a_1=\sqrt{3}$.

3) Редици, клонящи към безкрайност

Определение. Редицата a_n клони към $+\infty$, ако за всяко число $B > 0$ съществува номер N такъв, че за всички членове a_n, които имат номер $n > N$, е изпълнено $a_n > B$.

Пишем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ или $a_n \to +\infty$.

Членовете на редицата, които са по-малки от B, са краен брой.

$$\underbrace{a_1\ a_3\ a_2\ \dots\ a_{N-1}}_{\text{Краен брой}}\ \ B\ \ a_N\ \dots\ a_n\ \dots$$

Аналогично е определението:

Определение. Редицата a_n клони към $-\infty$, ако за всяко число $A < 0$ съществува номер N, такъв, че за всички членове a_n, които имат номер $n > N$, е изпълнено $a_n < A$.

Пишем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ или $a_n \to -\infty$.

Членовете на редицата, които са по-големи от A, са краен брой.

$$\dots\ a_n\ \dots\ a_N\ \ A\ \ \underbrace{a_{N-1}\ \dots\ a_3\ \ a_2\ \ a_1}_{\text{Краен брой}}$$

Ще отбележим, че със символите $+\infty$ и $-\infty$ не може да извършваме действия, както с границите на сходящите редици.

Следващата теорема дава връзка между редиците, клонящи към 0 и редиците, клонящи към безкрайност.

Теорема 7. Ако $a_n > 0$ за всяко n и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = +\infty$.

И обратно: Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

Доказателство. 1) Нека $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Нека $B > 0$ е произволно число. Избираме $\varepsilon = \dfrac{1}{B} > 0$.

Сега от определението за граница на редица следва, че съществува номер N, така че за всяко $n > N$ е изпълнено $|a_n - 0| < \varepsilon = \dfrac{1}{B}$, т.е. $|a_n| < \varepsilon = \dfrac{1}{B}$.

Тъй като $a_n > 0$, то $|a_n| = a_n \ \Rightarrow\ a_n < \dfrac{1}{B}$ за всяко $n > N$.

Като вземем реципрочните стойности получаваме $\dfrac{1}{a_n} > B$ за всяко $n > N$.

И така – за произволно число $B > 0$ съществува номер N, така че за всяко $n > N$ е изпълнено $\dfrac{1}{a_n} > B$, което означава, че $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = +\infty$.

2) Нека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Ще считаме, че всички членове на редицата са положителни.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно число.

Избираме $B = \dfrac{1}{\varepsilon} > 0 \ \Rightarrow$ съществува номер N, така че за всяко $n > N$ е изпълнено $a_n > B = \dfrac{1}{\varepsilon} > 0 \ \Rightarrow\ \dfrac{1}{a_n} < \varepsilon$ или $\left|\dfrac{1}{a_n} - 0\right| < \varepsilon$, което означава, че $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.▲

Примери:

1) Тъй като $\lim_{n\to\infty} n^k = +\infty$, от теорема 7 следва $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k} = 0$.

2) Граница на редица с общ член частно на два полинома $a_n = \frac{P_m(n)}{P_k(n)}$ при $n \to \infty$. Намирането на границата на такава редица ще изясним със следващата задача.

8. Да се намери границата на редицата $\{a_n\}$ при $n \to \infty$.

а) $a_n = \frac{3n^5 - 2n^3 + 7}{8n^5 + 3n^4 + n}$;

Решение. При граничен преход границата на израза в числителя и на израза в знаменателя е ∞. Казваме, че има неопределеност от вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

За да се освободим от тази неопределеност, в числителя и в знаменателя изнасяме пред скоби най-високата степен на n. Получаваме:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^5 - 2n^3 + 7}{8n^5 + 3n^4 + n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^5\left(3 - \frac{2}{n^2} + \frac{7}{n^5}\right)}{n^5\left(8 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^4}\right)} = \frac{3-0+0}{8+0+0} = \frac{3}{8}.\blacktriangle$$

б) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4 - 3n^3}{5n^6 + 1}$;

Решение. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4 - 3n^3}{5n^6 + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{n^4\left(2 - \frac{3}{n}\right)}{n^6\left(5 + \frac{1}{n^6}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}.\left(\frac{2 - \frac{3}{n}}{5 + \frac{1}{n^6}}\right) = 0.\frac{2}{5} = 0.\blacktriangle$

в) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^6 + 2n^5}{4n^4 - 7}$; **Решение.** $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^6 + 2n^5}{4n^4 - 7} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{n^6\left(3 + \frac{2}{n}\right)}{n^4\left(4 - \frac{7}{n^4}\right)} = \lim_{n\to\infty} n^2.\frac{3}{4} = \infty.\blacktriangle$

г) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^6 - 2n^4}{-5n^5 + n^4}$; **Решение,** $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^6 - 2n^4}{-5n^5 + n^4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{n^6}{n^5}\left(\frac{3 - \frac{2}{n^2}}{-5 + \frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} n.\left(-\frac{3}{5}\right) = -\infty.\blacktriangle$

От тези примери можем да направим извода:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + \ldots}{b_0 n^k + b_0 n^{k-1} + \ldots} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, \text{ при } m = k \\ 0, \text{ при } m < k \\ \infty, \text{ при } m > k \text{ и } a_0 \text{ и } b_0 \text{ с еднакви знаци} \\ -\infty, \text{ при } m > k \text{ и } a_0 \text{ и } b_0 \text{ с различни знаци} \end{cases}$$

9. Да се намери границата.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-3})$;

Решение.

Тъй като $\sqrt{n+1}\to\infty$ и $\sqrt{n-3}\to\infty$, казваме, че има неопределеност от вида $[\infty-\infty]$.

За да се освободим от тази неопределеност, рационализираме израза:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-3})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-3})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n+3}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-3}}=0\,.\blacktriangle$$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{2n-3})$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{2n-3})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{2n-3})(\sqrt{n+1}+\sqrt{2n-3})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{2n-3}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-2n+3}{\sqrt{n+1}+\sqrt{2n-3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n+4}{\sqrt{n+1}+\sqrt{2n-3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(-1+\frac{4}{n}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{3}{n}}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}.\left(\frac{-1}{1+\sqrt{2}}\right)=-\infty\,.\blacktriangle$$

10. – 30. Да се намери границата.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2n^3+5n^2}{4n^3+1}$ **11.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^5+3n^3+2}{3n^5}$ **12.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{14n^4-1}{15n^5+1}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-14n^5+7}{15n^4-7}$ **14.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^6-5}{n^2-3}$ **15.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-3n+n^2}{n^2+3n-5}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-9}{n-3}$ **17.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}}{\sqrt{n+5}}$ **18.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n}}{3n+\sqrt{n^2+1}}$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-3}+4}{-2\sqrt{n^2-n}}$ **20.** $\lim\limits_{a_n\to 0}\dfrac{\sqrt{2+a_n}-\sqrt{2a_n+2}}{1-\sqrt{a_n+1}}$ **21.** $\lim\limits_{a_n\to 0}\dfrac{3a_n{}^2+1}{5a_n{}^2-1}$

22. $\lim\limits_{a_n\to -2}\dfrac{a_n{}^2-4}{a_n+2}$ **23.** $\lim\limits_{a_n\to 1}\dfrac{2a_n{}^3-5}{3a_n+2}$ **24.** $\lim\limits_{a_n\to 1}\dfrac{a_n{}^2-1}{a_n-1}$

25. $\lim\limits_{a_n\to 3}\dfrac{\sqrt{a_n}-\sqrt{3}}{a_n{}^2-9}$ **26.** $\lim\limits_{a_n\to 2}\dfrac{\sqrt{a_n}-\sqrt{2}}{a_n{}^2-4}$ **27.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{5n}-\sqrt{n+5}\right)$

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n+3}-2\sqrt{n}+\dfrac{5}{n^2+1}\right)$ **29.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{5n-1}-\sqrt{4n+1}}{\sqrt{7n+7}-\sqrt{4n-3}}$ **30.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{4n^3-2}-\sqrt{n}}{\sqrt{9n^3-2}-\sqrt{n^3-9}}+\dfrac{4n^3-2}{9n^3-2}\right)$

4) Неперово число

Да разгледаме редицата с общ член $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Ще докажем, че тя е сходяща.

Доказателство. Записваме a_n във вида $a_n = \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{n}}$. Редицата $\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}$ има граница 1.

Остава да докажем, че редицата с общ член $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ е сходяща.

Тъй като $b_n > 0$, то $\{b_n\}$ е ограничена отдолу от числото 0. Ще докажем, че тя е намаляваща. Образуваме частното

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}.\frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} =$$

$$= \frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}. \quad (1)$$

Тъй като $\dfrac{1}{n^2+2n} > 0$, то можем да приложим неравенството на Бернули: (урок 2.1., задача 2.)

$\left(1+\dfrac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \geq 1+(n+1)\dfrac{1}{n^2+2n}$. Заместваме в (1) и получаваме:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} \geq \frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right) = \frac{n+1}{n+2}.\frac{n^2+3n+1}{n^2+2n} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} = 1+\frac{1}{n^3+4n^2+4n} > 1.$$

$\Rightarrow$ $b_n > b_{n+1}$ и редицата е намаляваща, следователно е сходяща (понеже е и ограничена).

Така получихме, че редицата с общ член a_n е сходяща. Границата ѝ се означава с e. ▲

Определение. Границата на редицата $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ се нарича **неперово число** и се означава с e,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Може да се докаже, че e е ирационално число.

2.5. Сума на безкрайно намаляваща геометрична прогресия

1) Граница на редицата q^n при $|q|<1$.

Теорема 1. Ако $-1<q<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Доказателство.

1. случай. Нека $0<q<1$.

Тъй като $0<q<1$, то $q^n > q^{n+1}$, което означава, че q^n е намаляваща редица. Тя е ограничена отдолу от числото 0 ($q^n > 0$). Следователно тя е сходяща.

Нека $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \alpha$.

Правим граничен преход в равенството $q^{n+1} = q.q^n$ и получаваме $\alpha = q\alpha$, откъдето $\alpha(1-q)=0$, $\alpha = 0$ (защото $q \neq 1$) и в този случай $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

2. случай. Нека $-1<q<0$.

Тогава $0<|q|<1$ и от случай 1. $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = 0$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно число. Следователно съществува число N, така че за всяко $n>N$ $\left| |q|^n - 0 \right| < \varepsilon$. Последователно имаме: $\left| |q|^n \right| < \varepsilon$, $|q|^n < \varepsilon$, $|q^n| < \varepsilon$, $|q^n - 0| < \varepsilon$. Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

3. Случаят $q=0$ е очевиден. ▲

2) Сума на безкрайно намаляваща геометрична прогресия

Нека $a_1, a_1q, a_1q^2, ..., a_1q^n, ...$ е безкрайна геометрична прогресия.

От формулата за сума на крайна геометрична прогресия имаме $S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Определение. Границата на редицата S_n, (ако съществува) се нарича **сума на безкрайна геометрична прогресия**.

Определение. Безкрайна геометрична прогресия, за която $|q|<1$, се нарича **безкрайно намаляваща геометрична прогресия**.

Теорема 2. Сумата на безкрайно намаляваща геометрична прогресия с първи член a_1 и частно $|q|<1$ е $S = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Доказателство.

Нека $a_1, a_1q, a_1q^2, ..., a_1q^n, ...$ е безкрайно намаляваща геометрична прогресия с частно $|q|<1$.

Имаме $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} = a_1 \dfrac{1-\lim\limits_{n\to\infty} q^n}{1-q} = a_1 \dfrac{1}{1-q}$.▲

Сумата на безкрайно намаляваща геометрична прогресия с първи член a_1 и частно $|q|<1$ записваме така:

$$S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^n + ... = \frac{a_1}{1-q}, \quad |q|<1$$

1. Да се намери сумата на безкрайната геометрична прогресия:

а) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$;

б) $3-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\dots$.

2. Да се намери сумата на безкрайна геометрична прогресия, ако:

а) $a_1=2\sqrt{3}$, $q=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

б) $a_1=\sqrt{2}$, $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. За безкрайно намаляваща геометрична прогресия са дадени:

а) $q=\frac{1}{4}$, $S=20$, намерете a_1;

б) $q=\frac{3}{7}$, $S=\frac{2}{3}$, намерете a_1;

в) $a_1=1\frac{2}{3}$, $S=5$, намерете q;

г) $a_1=0,7$, $S=3\frac{1}{3}$, намерете q.

4. Сумата на безкрайна геометрична прогресия е 2, а частното ѝ е $\frac{1}{2}$. Намерете втория член на прогресията.

5. Сумата на безкрайно намаляваща геометрична прогресия е 4, а сумата на първите ѝ три члена е $3{,}5$. Намерете първия член и частното на прогресията.

6. Намерете частното на безкрайно намаляваща геометрична прогресия, на която всеки член е два пъти по-голям от сумата на всички членове след него.

7. Първият член на безкрайно намаляваща геометрична прогресия е 1. Всеки от останалите членове е $2\frac{1}{2}$ пъти по-малък от сбора на съседните му. Намерете сумата на тази прогресия.

Тест 1
Числови редици

1. Сборът $\binom{12}{8}+\binom{12}{9}$ е равен на:

☒ **А)** $\binom{24}{17}$ **Б)** $\binom{13}{9}$ **В)** $\binom{13}{8}$ **Г)** $\binom{12}{10}$ ч

2. Сборът $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$ е равен на:

☒ **А)** 125 **Б)** 64 **В)** 32 **Г)** 16

3. Границата $\lim\limits_{a_n\to 3}\dfrac{a_n^{\,2}-1}{a_n+3}$ е равна на:

☒ **А)** $\dfrac{8}{9}$ **Б)** $\dfrac{3}{2}$ **В)** $\dfrac{2}{3}$ **Г)** $\dfrac{4}{3}$

4. Границата $\lim\limits_{a_n\to -2}\dfrac{a_n^{\,2}+3a_n+2}{a_n^{\,2}-4}$ е равна на:

☒ **А)** $-\dfrac{3}{4}$ **Б)** 0 **В)** $\dfrac{3}{4}$ **Г)** $\dfrac{1}{4}$

5. Границата $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^4-2}{2n^4-3}+\dfrac{2n^2}{3n^3-3}\right)$ е равна на:

☒ **А)** $\dfrac{13}{6}$ **Б)** 1 **В)** $\dfrac{5}{3}$ **Г)** $\dfrac{3}{2}$

6. Колко е сумата на безкрайна геометрична прогресия, за която $a_1=3$ и $q=\dfrac{1}{3}$?

☒ **А)** $\dfrac{9}{2}$ **Б)** $\dfrac{2}{3}$ **В)** $\dfrac{1}{2}$ **Г)** $\dfrac{1}{3}$

7. Намерете първия член на безкрайна геометрична прогресия със сума $\dfrac{2}{3}$ и частно $\dfrac{1}{4}$.

☒ **А)** 2 **Б)** $\dfrac{3}{2}$ **В)** $\dfrac{1}{2}$ **Г)** $\dfrac{1}{3}$

На задачи 8 и 9 напишете на допълнителен лист решението с необходимите обосновки.

8. Да се намери границата $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{n^2+2}\right)$.

9. Да се намери границата $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-3}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{4n-3}}$.

Тест 2
Числови редици

1. Петият член в развитието на бинома $(1+x)^8$ е:

☒ **А)** $70x^5$ **Б)** $56x^5$ **В)** $70x^4$ **Г)** $56x^4$

2. Границата $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^7-2n^2+1}{4n^7+2}$ е равна на:

☒ **А)** $\dfrac{3}{4}$ **Б)** 1 **В)** $\dfrac{2}{3}$ **Г)** $\dfrac{1}{6}$

3. Границата $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{5n^2}}{2n+1}$ е равна на:

☒ **А)** $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$ **Б)** $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ **В)** $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}$ **Г)** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

4. Границата $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3n^3+2n}-\sqrt{2n^3})$ е равна на:

☒ **А)** $\propto$ **Б)** 0 **В)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **Г)** 1

5. Границата $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+4}}$ е равна на:

☒ **А)** 1 **Б)** $\sqrt{2}$ **В)** 2 **Г)** $\propto$

6. Колко е сумата на безкрайна геометрична прогресия, за която $a_1=5$ и $q=\dfrac{1}{4}$?

☒ **А)** 10 **Б)** $\dfrac{20}{3}$ **В)** $\dfrac{15}{4}$ **Г)** $\dfrac{5}{4}$

7. Намерете частното на безкрайно намаляваща геометрична прогресия, за която $a_1=\dfrac{2}{3}$ и $S=1$.

☒ **А)** $\dfrac{2}{3}$ **Б)** $\dfrac{1}{2}$ **В)** $\dfrac{1}{3}$ **Г)** $\dfrac{1}{4}$

На задачи 8 и 9 напишете на допълнителен лист решението с необходимите обосновки.

8. Да се намери границата $\lim\limits_{a_n\to 1}\dfrac{2a_n{}^2-a_n-1}{a_n{}^2-1}$.

9. Да се намери границата $\lim\limits_{a_n\to -3}\dfrac{5a_n}{\sqrt{a_n{}^2+3}+\sqrt{3a_n{}^2}}$.

3. Функции. Непрекъснатост и диференцируемост

3.1. Функция. Начини на задаване

1) Функция. Монотонна функция

Определение. Казваме, че е дадена **функция**, ако на всяко x от дадено множество D се съпоставя (по определено правило) единствено число y. Означаваме $y = f(x)$, $x \in D$.

D се нарича **дефиниционна област**, x се нарича **независима променлива** (аргумент), а y се нарича **зависима променлива** (функция, функционална стойност).

Примери.

1) $f(x) = 3x + 2$

Функцията $f(x) = 3x + 2$ е дефинирана за всяко реално число x ($x \in \mathbb{R}$) и функционалните ѝ стойности също са реални числа, $f(x) \in \mathbb{R}$.

2) $f(x) = \sqrt{x}$

Функцията $f(x) = \sqrt{x}$ е дефинирана само за неотрицателни числа и приема неотрицателни стойности.

3) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

$f(x)$ е дефинирана за всички x, различни от -1 и приема реални стойности.

Определение. Множеството от точки в равнината с координати $(x,\ f(x))$ се нарича **графика** на функцията $f(x)$.

Една функция най-често се задава с формула, описателно, с графика или таблично. Ние ще разглеждаме предимно функции, зададени с формула.

Определение. Нека $f(x)$ е дефинирана в областта D и нека $M \subset D$, $x_1 \in M$, $x_2 \in M$.

Ако $x_1 \le x_2$ и $f(x_1) \le f(x_2)$, то $f(x)$ се нарича **монотонно растяща в множеството** M.

Ако $x_1 \le x_2$ и $f(x_1) \ge f(x_2)$, то $f(x)$ се нарича **монотонно намаляваща в множеството** M.

Ако неравенствата са строги, $f(x)$ се нарича **строго растяща (намаляваща) в** M.

Ако $M \equiv D$, то $f(x)$ е растяща (намаляваща) в цялата си дефиниционна област.

Примери.

1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ е строго намаляваща в интервала $(-\infty, 2]$ и растяща в интервала $[2, +\infty)$.

Функцията е дефинирана за всички реални числа, но в цялата си дефиниционна област $D = (-\infty, +\infty)$ тя не е нито растяща, нито намаляваща.

2) $f(x) = 2^x$ е растяща в цялата си дефиниционна област $(-\infty, +\infty)$, както и във всеки интервал.

2) Ограничена и неограничена функция

Нека $f(x)$ е дефинирана в областта D и $M \subset D$.

$f(x)$ се нарича **ограничена отгоре в** M, ако съществува число B, такова че за всяко $x \in M$ е изпълнено $f(x) \le B$.

$f(x)$ се нарича **ограничена отдолу в** M, ако съществува число A, такова че за всяко $x \in M$ е изпълнено $f(x) \geq A$.

Една функция се нарича **ограничена в множеството** M, ако е ограничена отгоре и отдолу.
Ако функцията не е ограничена, тя се нарича **неограничена**.

Примери.

1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ е ограничена отдолу в $(-\infty, +\infty)$, защото $f(x) \geq f(2) = -1$ за всяко $x \in \mathbb{R}$, но $f(x)$ не е ограничена отгоре, т.е. **неограничена отгоре.**

2) $f(x) = 2^x$ в $(-\infty, +\infty)$ е неограничена отгоре и е ограничена отдолу, защото $2^x > 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

3) $f(x) = \sin x$ е ограничена в $(-\infty, +\infty)$, защото $-1 \leq \sin x \leq 1$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

4) $f(x) = x^3$ е ограничена в интервала $[1, 2]$, защото $1 \leq x^3 \leq 8$ за всяко $x \in [1, 2]$, но е неограничена в $(-\infty, +\infty)$.

3) Четна и нечетна функция

Нека $f(x)$ е дефинирана в областта D.

$f(x)$ се нарича **четна** в D, ако за всяко $x \in D$ числото $-x \in D$ и $f(-x) = f(x)$.

$f(x)$ се нарича **нечетна** в D, ако за всяко $x \in D$ числото $-x \in D$ и $f(-x) = -f(x)$.

Примери.

1) $f(x) = x^2$ е четна в $\mathbb{R}$, защото $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

2) $f(x) = x^3$ е нечетна в $\mathbb{R}$, защото $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

Ако $f(x)$ е четна функция, то точките $(x, f(x))$ и $(-x, f(-x) = f(x))$ лежат на графиката ѝ, което означава, че графиката на функцията е симетрична относно ординатната ос Oy.

Ако $f(x)$ е нечетна функция, то точките $(x, f(x))$ и $(-x, f(-x) = -f(x))$ лежат на графиката ѝ, което означава, че графиката на функцията е симетрична относно координатното начало O.

4) Периодична и непериодична функция

Нека $f(x)$ е дефинирана в областта D. Функцията $f(x)$ се нарича **периодична**, ако съществува число $t \neq 0$, такова че за всяко $x \in D$ числото $x + t \in D$ и $f(x + t) = f(x)$ (1).

Най-малкото положително число t_0 (ако съществува), за което е изпълнено (1), се нарича **период на функцията.**

Примери.

1) Тригонометричните функции $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$ са периодични с период 2π, а функциите $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ и $f(x) = \operatorname{cotg} x$, $x \neq k\pi$ са периодични с период π.

2) $f(x) = \text{const}$ е периодична. Наистина, нека t е произволно число, тогава $f(x + t) = \text{const} = f(x)$, но тъй като няма най-малко реално число, то $f(x)$ няма период.▲

1. Докажете, че функцията $f(x) = x^2 + 3$ е четна.

2. Докажете, че функцията $f(x) = x^3 + x$ е нечетна.

3. Определете четна или нечетна е функцията.

а) $f(x) = -x^4 - x^2$;

б) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 1$;

в) $f(x) = 12 - (x+1)^3$;

г) $f(x) = (x+1)^2 - x^2$.

3.2. Съставна функция

1) Съставна функция

Да разгледаме функцията $g(y)=2y^3$, дефинирана за всяко y от интервала $(-\infty,+\infty)$ и функцията $y=f(x)=\sqrt{x}$, дефинирана за $x\in[0,+\infty)$. Стойностите на функцията $y=\sqrt{x}$ са неотрицателни числа и значи попадат в дефиниционната област на $g(y)$. Това означава, че можем да намерим $g(y)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=2(\sqrt{x})^3$.

Така получихме нова функция $\varphi(x)=g(f(x))$ или $\varphi(x)=2(\sqrt{x})^3$, дефинирана само за $x\in[0,+\infty)$.

Функцията $\varphi(x)=g(f(x))$ се нарича **съставна функция** (сложна функция или функция от функция). Също така казваме, че $\varphi(x)$ е суперпозиция на $g(y)$ и $f(x)$.

Нека подчертаем: стойностите на функцията $f(x)$ трябва да бъдат от дефиниционното множество на функцията $g(y)$.

1. Да се състави сложна функция от дадените функции и да се определи дефиниционната ѝ област.

а) $g(y)=y^2$ и $y=\sin x$;

б) $g(y)=\log_a y$ и $y=2^x+\sqrt{x}$, $a\neq 1,\ a>0$;

в) $g(y)=\dfrac{1}{y}$ и $y=\log_a x$, $a\neq 1,\ a>0$;

г) $g(y)=\sin y$ и $y=2^{x^2}$;

д) $g(y)=2^y$, $y=z^2$ и $z=\sin x$;

е) $g(y)=\sqrt{y}$, $y=5x$, $x=\sin z$ и $z=t^2$.

2. От кои функции е съставена дадената сложна функция?

а) $g(x)=(2x+1)^2$;

б) $g(x)=\mathrm{tg}7x$;

в) $g(x)=\cos^2\sqrt{x}$;

г) $g(x)=\sqrt{\cos 3x}$;

д) $g(x)=\sqrt[3]{1+\log_a 2x}$.

2) Елементарни функции

Основни елементарни функции наричаме функциите:

– Степенна функция $f(x)=x^\alpha$, където α е реално число.

– Показателна функция $f(x)=a^x$, $a\neq 1,\ a>0$, $x\in\mathbb{R}$.

– Логаритмична функция $f(x)=\log_a x$, $a\neq 1,\ a>0$, $x>0$.

– Тригонометричните функции $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\,x$, $\mathrm{cotg}\,x$.

Елементарни функции наричаме основните елементарни функции и онези, които се получават от тях чрез четирите аритметични действия и образуването на сложна функция, приложени краен брой пъти.

3.3. Граница на функция

Нека $f(x)$ е функция, дефинирана за $x \in D$.

Да предположим, че има редица от D, която е сходяща: $x_1, x_2, ..., x_n, ... \to a$, $x_i \in D,\ i = 1, 2, ...$.

Тогава можем да образуваме редицата от функционалните стойности:

$$f(x_1),\ f(x_2), ..., f(x_n), ...$$

Дали тази редица е сходяща?

Определение. Казваме, че функцията $f(x)$, $x \in D$ има **граница** A при x, клонящо към a, ако за всяка редица $\{x_n\}$, клоняща към a със стойности от D и различни от a, редицата $\{f(x_n)\}$ е сходяща и има граница A.

Означаваме $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Четем: „Границата на $f(x)$ при x клонящо към a е A" или „$f(x)$ клони към A, когато x клони към a". Ще използваме и означението $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$.

<u>Обърнете внимание</u>: Числото a може да не принадлежи на D.

Примери.

1) Да се докаже, че функцията $f(x) = 2x + 1$ има граница при $x \to 3$.

Решение. Нека $\{x_n\}$ е произволна редица, клоняща към 3, $x_n \to 3$. Трябва да проверим дали редицата $f(x_n) = 2x_n + 1$ има граница при $x_n \to 3$. От теоремите за граници на редици имаме:

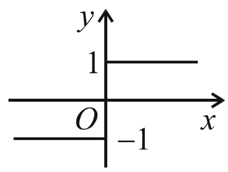
$$\lim_{x_n \to 3} f(x_n) = \lim_{x_n \to 3} (2x_n + 1) = 7 .$$

Следователно функцията $f(x) = 2x + 1$ има граница при $x \to 3$ и $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 7$.▲

2) Да се докаже, че функцията $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ няма граница при x, клонящо към 0.

Решение. Да запишем $f(x)$ във вида:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x} = -1, & \text{при } x < 0 \\ \dfrac{x}{x} = 1, & \text{при } x > 0 \end{cases}$$, при $x = 0$ функцията не е дефинирана.



Нека редицата $x_n \to 0$ и $x_n < 0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x_n \to 0 \\ x_n < 0}} f(x_n) = \lim\limits_{\substack{x_n \to 0 \\ x_n < 0}} (-1) = -1$.

Нека редицата $x_n \to 0$ и $x_n > 0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x_n \to 0 \\ x_n > 0}} f(x_n) = \lim\limits_{\substack{x_n \to 0 \\ x_n > 0}} (1) = 1$.

И така, намерихме две редици, които клонят към 0, но редиците от функционални стойности не клонят към едно и също число, което показва, че функцията $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ няма граница при x клонящо към 0.▲

В пример 2) видяхме, че функцията $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ има граница при x, клонящо към 0 със стойности по-малки от 0 и също така има граница при x, клонящо към 0 със стойности по-големи от 0. Ще дадем следното определение.

Определение. Казваме, че функцията $f(x)$, $x \in D$ има **лява граница** A при x клонящо към a, ако за всяка редица $\{x_n\}$, $x_n \in D$, клоняща към a със стойности по-малки от a ($x_n < a$), редицата от функционални стойности $f(x_n)$ е сходяща и има граница A.

Означаваме $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = A$ или $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$.

Аналогично се дефинира и **дясна граница**: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = B$ или $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = B$.

Теорема. Функцията $f(x)$ има граница при x клонящо към a точно когато $f(x)$ има лява и дясна граница при x клонящо към a и е изпълнено $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$.

1. Да се докаже, че функцията $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \le 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$ има граница при $x \to 1$ и да се намери тази граница.

Решение. Нека редицата $x_n \to 1$ и $x_n < 1 \Rightarrow f(x_n) = 2x_n$ и $\lim\limits_{\substack{x_n \to 1 \\ x_n<1}} f(x_n) = \lim\limits_{\substack{x_n \to 1 \\ x_n<1}} (2x_n) = 2.1 = 2$.

Нека редицата $x_n \to 1$ и $x_n > 1 \Rightarrow f(x_n) = x_n + 1$ и $\lim\limits_{\substack{x_n \to 1 \\ x_n>1}} f(x_n) = \lim\limits_{\substack{x_n \to 1 \\ x_n>1}} (x_n + 1) = 1 + 1 = 2$.

Получихме, че лявата и дясната граница при $x \to 1$ съществуват и са равни. Следователно функцията $f(x)$ има граница при $x \to 1$ и $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.▲

2. Има ли граница функцията $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x < 2 \\ 4, & x \ge 2 \end{cases}$ при $x \to 2$?

3. Има ли граница функцията $f(x) = \begin{cases} x^2+3, & x < 3 \\ 3x+2, & x \ge 3 \end{cases}$ при $x \to 3$?

4. За коя стойност на a функцията $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{3}, & x \le 3 \\ \dfrac{(x-a)^2}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$ има граница при $x \to 3$?

5. Да се намери границата на функцията $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{x}, & 0 \le x \le 5 \\ 1{,}5(x-3) - \sqrt{5}, & x > 5 \end{cases}$ при $x \to 5$.

3.4. Теореми за граници на функции

1) Действия с граници на функции

Теорема 1. (Действия с граници на функции)
Ако $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то

а) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \pm B$;

б) $\lim\limits_{x\to a}(f(x).g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x) = A.B$;

в) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B},\ \ g(x) \neq 0,\ B \neq 0$.

Доказателство. Ще докажем а). Аналогично се доказват б) и в).
Нека $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. От теоремите за действия със сходящи редици имаме

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n) \pm g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \pm \lim_{n\to\infty} g(x_n) = A \pm B = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)\ .\blacktriangle$$

2) Граница на съставна функция

Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана за $x \in D$ и приема стойности в множеството D_1, т.е. $f(x) \in D_1$. Нека функцията $g(y)$ е дефинирана за всяко $y \in D_1$. Тогава е определена съставната функция $\varphi(x) = g(f(x))$.

Теорема 2. (Граница на съставна функция)
Ако $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$, то $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = B$.

Доказателство. Нека $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, $x_n \in D$ и тъй като $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то от определението за граница на функция имаме $\lim\limits_{x_n\to a} f(x_n) = A$, като $y_n = f(x_n) \in D_1$. Получихме редица в D_1, която е сходяща към A и тъй като $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$, то $\lim\limits_{y_n\to A} g(y_n) = B$.

$\Rightarrow\ \lim\limits_{x_n\to a} \varphi(x_n) = \lim\limits_{x_n\to a} g(f(x_n)) = \lim\limits_{y_n\to A} g(y_n) = B$, което, според определението за граница на функция, означава, че $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = B$.▲

Техниката за намиране граница на функция е подобна на техниката за намиране на граница на редица.

1. Да се намери границата.

а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2 + x - 1}{3x^2 - 1}$; б) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 3x + 2}$; в) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x^2 + x - 1}$; г) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{3 - x}$;

2. Да се намери границата.

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt[3]{x+8} - 2}$; в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{\sqrt[3]{x^3 + 7} - 2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{2x} - 2}$; д) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-2 + \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x+2} - 2}$; е) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{3x^2 + 5} - 2}{x^2 + 2x - 3}$.

3) Граничен преход в неравенства

От теоремите за граничен преход в неравенства на числови редици и от определението за граница на функция, следват теоремите.

Теорема 3. (Граничен преход в неравенство)

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в областта D и $f(x) \le g(x)$ за всяко $x \in D$. Ако $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$, т.е. $A \le B$.

Теорема 4. (Граничен преход в неравенства)

Нека $f(x) \le g(x) \le h(x)$ за всяко x от общата им дефиниционна област D. Ако $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, то функцията $g(x)$ има граница при $x \to a$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Може да направим следния схематичен запис на двете теореми.

Теорема 3. $\begin{array}{ccc} f(x) & \le & g(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & & B \end{array}$ $\Rightarrow A \le B$

Теорема 4. $\begin{array}{ccccc} f(x) & \le & g(x) & \le & h(x) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ A & & & & A \end{array}$ $\Rightarrow g(x) \to A$

4) Разширяване на понятието граница на функция

Досега разгледахме граници на функции, при които аргументът клони към крайно число и функцията също клони към крайно число. Сега ще дадем определения за граница на функция при следните случаи:

$x \to \pm\infty$, $f(x) \to$ крайно число ;

$x \to$ крайно число , $f(x) \to \pm\infty$;

$x \to \pm\infty$, $f(x) \to \pm\infty$.

Определение. Казваме, че функцията $f(x)$, $x \in D$ **има граница** A при x, клонящо към $+\infty$, ако за всяка редица $\{x_n\}$, $x_n \in D$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, редицата от функционални стойности $\{f(x_n)\}$ е сходяща и има граница A. Записваме $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Аналогично се дава и определението $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

Определение. Казваме, че функцията $f(x)$, $x \in D$ **клони към безкрайност** при x, клонящо към a (при x, клонящо към $+\infty$ или към $-\infty$), ако за всяка редица $\{x_n\}$, $x_n \in D$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$), редицата от функционални стойности $\{f(x_n)\}$ клони към безкрайност.

Записваме: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Когато границата при x, клонящо към $+\infty$ и $-\infty$ е една и съща, ще записваме $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$.

Може да се докаже, че $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ и $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

3. Да се намери границата $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right) = 2+0 = 2$.▲

4. Проучете внимателно следните граници.

а) Примери, в които аргументът клони към $+\infty$ или $-\infty$ и функцията клони към $+\infty$ или $-\infty$.

а1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$;

а2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (-x^2) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^3) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^3) = +\infty$;

б) Примери, в които аргументът клони към $+\infty$ или $-\infty$, а функцията клони към крайно число.

б1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$;

б2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+3}{x-4} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{4}{x}\right)} = 1$; $\quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x+3}{x-4} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x\left(-1+\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{4}{x}\right)} = -1$.

в) Примери, в които аргументът клони към крайно число, а функцията клони към $+\infty$ или $-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$;

5. Намерете границата.

а) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^5-3x^2+1}{3x^5+2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^4+2x}{2x^4+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^4+x+1}{x^2+x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^5+x+1}{x^2+x}$;

д) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^5+x+1}{x^2+x}$; е) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^5+2x}{x^2-1}$; ж) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^5+2x}{x^2-1}$.

6. Намерете границата.

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+3x}-\sqrt{3x+2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-\sqrt{x^2+3}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+4}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{2x+1}}$; е) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\right)$; з) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{3x+2}}\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)$.

7. Намерете границата.

а) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{5x+1}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{4}{6-x-x^2}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{-3x}{3x-x^2-2}$;

г) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} \dfrac{x+1}{x-3}$; д) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \dfrac{x+1}{x-3}$; е) $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}} \dfrac{1-x}{x-4}$; ж) $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}} \dfrac{1-x}{x-4}$.

8. Намерете границата $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^4-3x^3+4x^2-9x-6}{x^2-x-2}$.

Решение. При директно заместване на x с 2 получаваме 0 в числителя и в знаменателя. Разлагаме знаменателя на множители $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$. За да разложим числителя на множители, ще използваме схемата на Хорнер.

	2	–3	4	–9	–6
2	2	1	6	3	0

Следователно $2x^4-3x^3+4x^2-9x-6=(x-2)(2x^3+x^2+6x+3)$.
Сега за търсената граница получаваме.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^4-3x^3+4x^2-9x-6}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x^3+x^2+6x+3)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x^3+x^2+6x+3}{x+1}=\frac{35}{3}.$$

9. Намерете границата.

а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+2x^2-2x+3}{x^2+5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^4-3x^3+5x^2-6x+2}{2x^2+3x-2}$.

10. – 15. Намерете границата.

10. а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-4}{x-2}+\dfrac{4-x^2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}+\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}}{x-1}\right)$.

11. а) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+2x}+\dfrac{2x+1}{2x^2+1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}+\dfrac{3x^2-1}{3x-1}\right)$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x^3-x}{2x}+\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{2x+1}}{2-\sqrt{x+4}}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^4+2x^3-2x^2+2x-3}{x^2-x}+\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^2-1}\right)$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2x^2-6}{x^2-3x}-\dfrac{x+1}{x-3}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-8}{x^2-4}+\dfrac{1}{x-2}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2+9}{x^2-1}+\dfrac{5}{x+1}\right)$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}}{\sqrt{3x}-\sqrt{x+2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{2x+1}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}+\dfrac{\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x-2}}{x-2}\right)$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{2-x-x^2}-(x+\sqrt{2})\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$;

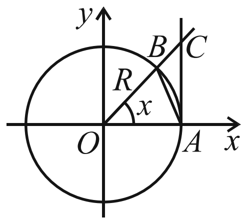
3.5. Основни граници

В този урок ще се запознаем с някои много използвани граници на функции.

Теорема 1. Да се докаже, че $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Доказателство. Предварително ще докажем неравенствата $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ (1).

Нека $\angle AOB = x$, измерен в радиани, е централен ъгъл в окръжност с радиус R (виж чертежа). Тогава $\dfrac{AC}{R}=\operatorname{tg} x$ или $AC = R\operatorname{tg} x$. Тъй като ΔOAB се съдържа в сектора OAB, то очевидно, че



$S_{OAB}<$ лицето на сектор $OAB < S_{OAC}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{R^2\sin x}{2}<\dfrac{\pi R^2 x}{2\pi}<\dfrac{R.R\operatorname{tg} x}{2}$

$\Rightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Разделяме последните неравенства на $\sin x>0$ и получаваме $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$

$\Rightarrow$ $1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$. Тези неравенства умножаваме по -1 и прибавяме 1. Последователно получаваме: $-1<-\dfrac{\sin x}{x}<-\cos x$, $0<1-\dfrac{\sin x}{x}<1-\cos x$.

Като използваме формулата $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$ и първото от вече доказаните неравенства (1), имаме $0<1-\dfrac{\sin x}{x}<2\sin^2\dfrac{x}{2}<2.\dfrac{x}{2}.\dfrac{x}{2}$ или $0<1-\dfrac{\sin x}{x}<\dfrac{x^2}{2}$ (2).

Последните неравенства са изпълнени и при $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$, защото $\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin(-x)}{-x}$ и $x^2=(-x)^2$.

Извършваме граничен преход в неравенствата (2), следователно $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{\sin x}{x}\right)=0$. Сега от теоремата за действия с граници на функции окончателно намираме $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.▲

При изучаването на сходящите редици, определихме числото e като граница на редица: $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Сега ще докажем по-общ резултат.

Теорема 2. Да се докаже, че: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$.

Доказателство. а) Ще използваме, че за всяко реално положително число x можем да намерим естествено число n, така че $n\le x<n+1$. Преобразуваме тези неравенства така:

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}\quad\Leftrightarrow\quad 1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\le 1+\frac{1}{n},$$

откъдето $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ или $\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)}<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Нека $x \to \infty$, което означава, че и $n \to \infty$. Правим граничен преход в последните неравенства и използваме че $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$, получаваме $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, с което а) е доказано.

б) Нека сега $x \to -\infty$. Да положим $y = -x$, тогава $y \to +\infty$. Последователно имаме:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y = \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) \xrightarrow[x\to-\infty]{y\to+\infty} e.1 = e.$$

в) Нека $x \to 0$ с положителни или отрицателни стойности (но различни от 0). Да положим $y = \frac{1}{x}$, y ще клони към $\pm\infty$. От а) и б) на теоремата имаме:

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$ и $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$, което означава, че

$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.▲

1. Да се намери границата.

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}$. **Решение.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$.▲

б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x}{x}$. **Решение.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x}{x} = \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 7x}{7x}.7\right) = 1.7 = 7$.▲

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x\cos x}{3x}$. **Решение.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x\cos x}{3x} = \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}.\frac{\cos x}{3}\right) = 1.\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.▲

г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{3}\sin 6x}{x^2}$. **Решение.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{3}\sin 6x}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}.\frac{1}{3}.\frac{\sin 6x}{6x}.6\right) = 1.\frac{1}{3}.1.6 = 2$.▲

д) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos x}$. **Решение.** Прилагаме формулата $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ и получаваме:

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{x\sin 2x}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.\frac{\sin 2x}{2x}.\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.4\right) = 4.▲$$

е) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-\cos 3x}{x^2} - \frac{\sin x\cos x - \sin 2x}{x}\right)$.

Решение. Като използваме формулите $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ и $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

търсената граница се представя във вида $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2} + \frac{\sin x\cos x}{x}\right) = \frac{2.9}{4} + 1 = \frac{11}{2}$.▲

2. – 10. Да се намери границата.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cos x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\sin\frac{x}{2}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}\cos 3x}{5x}$: г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg}4x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\operatorname{tg}\beta x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\alpha x}{x^2}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 5x\sin 3x}{x(1-\cos 2x)}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x-\cos x}{x\sin x}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{\operatorname{tg}^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x\operatorname{tg}x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{\operatorname{tg}^2 15x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}3x}{\sin^2\frac{x}{3}}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2 2x}{x^2\cos x}+\dfrac{2\sin^2 x\ \operatorname{tg}x}{3x^2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{\sqrt{2}x}{2}\cos\frac{\sqrt{2}x}{2}-2x}{x}+\dfrac{1-\cos 3x}{\operatorname{tg}2x}\right)$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x\sin 3x}{\operatorname{tg}^2 6x}+\dfrac{3x\sin 4x}{\operatorname{tg}^2 12x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}}+\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg}\frac{x}{3}}\right)$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{1-\cos 4x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}(\operatorname{tg}x-\sin x)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^3}\left((1-\cos x)\sin x-\sin^3\dfrac{x}{2}\right)\right)$.

3.6. Непрекъснатост

1) Определение

Да разгледаме функцията $f(x)=x^2$, която е дифинирана за всяко x. Да изберем едно число от дефиниционния ѝ интервал, например числото 2. Имаме

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} x^2=4=f(2)$, т.е границата на функцията в точката 2 е равна на стойността на функцията в тази точка. Казваме, че функцията е непрекъсната в точката 2. По-точно ще дадем следното определение.

Определение. Нека $f(x)$ е дефинирана в област D и $a\in D$. Казваме, че $f(x)$ е **непрекъсната в точката** a, ако $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Ако $f(x)$ е непрекъсната във всяка точка от D, казваме, че $f(x)$ е **непрекъсната в множеството** D.

Ако $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$, казваме, че $f(x)$ е **прекъсната в точката** a.

Ако $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=f(a)$, $f(x)$ се нарича непрекъсната **отляво** в точка a, а ако $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=f(a)$, $f(x)$ се нарича непрекъсната **отдясно** в точка a.

Като непосредствено следствие от теоремите за граници на функции и от определението за непрекъснатост, са следните теореми.

Теорема 1. Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в точката $x=a$, то функциите $f(x)\pm g(x)$, $f(x).g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при $g(a)\neq 0$) са непрекъснати в точката a.

Теорема 2. (Непрекъснатост на съставна функция)

Ако функцията $y=f(x)$ е непрекъсната при $x=a$, а функцията $g(y)$ е непрекъсната за $y=b=f(a)$, то функцията $\varphi(x)=g(f(x))$ е непрекъсната при $x=a$.

2) Непрекъснатост на тригонометричните функции

Теорема 3. Функциите $y=\sin x$ и $y=\cos x$ са непрекъснати.

Доказателство. Първо ще установим верността на неравенството $|\sin x|<|x|$ за всяко x.

Използваме неравенството $\sin x<x$ (1), което доказахме за $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Нека $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right) \Rightarrow -x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin(-x)<-x,\quad -\sin x<-x,\quad x<\sin x<0$ (2).

Неравенствата (1) и (2) можем да запишем като $|\sin x|<|x|$ и понеже $\sin 0=0$,то $|\sin x|\leq|x|$ е изпълнено за $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Тъй като $|\sin x|\leq 1$, то неравенството е вярно и за $x>1$ и значи $|\sin x|\leq|x|$ за всяко x.

Сега ще докажем, че $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$ и $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

От формулите за сбор и разлика на тригонометричните функции имаме:

$0\leq|\sin x-\sin a|=2|\sin\dfrac{x-a}{2}|.|\cos\dfrac{x+a}{2}|\leq 2.\dfrac{|x-a|}{2}.1$ или $0\leq|\sin x-\sin a|\leq|x-a|$.

Нека $x\to a$ и да направим граничен преход в последните неравенства и като използваме, че $\lim\limits_{x\to a}|x-a|=0$, получаваме $\lim\limits_{x\to a}|\sin x-\sin a|=0$, което означава, че $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.

Аналогично се доказва, че $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.▲

И така, функциите $\sin x$ и $\cos x$ са непрекъснати в дефиниционната си област. От Теорема 1 получаваме, че $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ и $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $x \neq k\pi$ са непрекъснати функции.

Теорема 4. Една функция е непрекъсната в точката a от дефиниционната си област точно когато е непрекъсната отляво и отдясно в точката a.

Доказателството на тази теорема следва непосредствено от теоремата за лява и дясна граница на функция.

Пример. Да разгледаме функцията $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} & 0 \le x < 2 \\ \dfrac{\sqrt{2}(x-2)}{x^2-4} & x > 2 \end{cases}$.

Функцията е дефинирана за $x \ge 0$ и $x \neq 2$. Тя не е дефинирана при $x = 2$, но можем да намерим лявата и дясната граница при x, клонящо към 2:

$$\lim_{x_n \to 2-} f(x) = \lim_{x_n \to 2-} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \lim_{x_n \to 2-} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} . \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \lim_{x_n \to 2-} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

и $\displaystyle\lim_{x_n \to 2+} f(x) = \lim_{x_n \to 2+} \frac{\sqrt{2}(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x_n \to 2+} \frac{\sqrt{2}}{x+2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{x_n \to 2-} f(x) = \lim_{x_n \to 2+} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Лявата и дясната граница в точката $x = 2$ съществуват и са равни, но за непрекъснатост на $f(x)$ в точката $x = 2$ не може да се говори, защото тя не е дефинирана там. Тогава да дефинираме $f(2) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Получаваме нова функция, дефинирана при $x \ge 0$:

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}, & 0 \le x < 2 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}, & x = 2 \\ \dfrac{\sqrt{2}(x-2)}{x^2-4}, & x > 2 \end{cases}$$

, която е непрекъсната във всяка точка и в частност при $x = 2$.

Казваме, че сме додефинирали функцията $f(x)$ за $x = 2$, така че да е непрекъсната в тази точка.▲

1. Да се докаже, че функцията $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x \le 1 \\ x^2+1 & x > 1 \end{cases}$ е непрекъсната при $x = 1$.

2. Да се намерят стойностите на a, така че функцията $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-2)}{x-2}, & x < 2 \\ 2a-5, & x \ge 2 \end{cases}$ да е непрекъсната при $x = 2$.

3. Да се намерят стойностите на a, така че функцията $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{ax}, & x < 0 \\ a\cos 3x, & x \ge 0 \end{cases}$ да е непрекъсната при $x = 0$.

4. В кои точки е непрекъсната и в кои прекъсната функцията?

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{5}, & x<3\\ 4-x, & x\geq 3\end{cases}$; б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$;

в) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\in[-1,1)\\ 2x-1, & x\in[1,2]\end{cases}$.

5. Дадена е функцията

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{при } x<2\\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{при } x>2\end{cases}$$

Дефинирайте нова функция $g(x)$, която да е дефинирана за всяко x, при $x\neq 2$ да съвпада с дадената функция и да е непрекъсната за всяко x.

6. Функцията $f(x)$ е дефинирана с равенствата $f(x)=\dfrac{x+a}{x-2}$ при $x\neq 2$ и $f(2)=a$. За кои стойности на a функцията е непрекъсната в точката $x=2$?

7. Какви трябва да бъдат стойностите на функцията $f(x)=\dfrac{3(x-1)^2(x-2)^2}{x^2-3x+2}$, $x\neq 1$, $x\neq 2$, за да бъде непрекъсната при $x=1$ и $x=2$?

8. В кои точки е непрекъсната и в кои е прекъсната функцията:

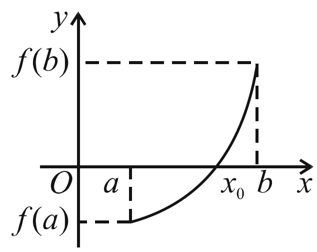
а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-3)^2}{x-3}, & x<3\\ -6, & x=3\\ \dfrac{x-3}{x^2-9}, & x>3\end{cases}$; б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}, & x<0\\ \dfrac{x^2-5x+4}{1-x}, & 0\leq x<1\\ \dfrac{1-7x^2}{x-3}, & x\geq 1,\ x\neq 3\end{cases}$;

в) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}, & x<0\\ 6.\dfrac{\sqrt{4-x}-1}{6x^2-19x+3}, & 0\leq x<3,\ x\neq\dfrac{1}{6}\\ \dfrac{3(x-2)}{6x-1}, & x\geq 3\end{cases}$.

9. Намерете a, така че функцията $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ да е непрекъсната.

3.7. Теореми за непрекъснатост

Без доказателство ще приемем следната теорема.



Теорема 1. (Теорема на Болцано)

Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a,b]$ и в краищата на интервала приема различни знаци, то съществува точка x_0 от отворения интервал (a,b), за която $f(x_0)=0$.

Теоремата на Болцано непосредствено се обобщава от следната теорема (също на Болцано).

Теорема 2. (Теорема за междинните стойности)

Ако $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a,b]$ и $f(a)\neq f(b)$, то за всяко число c между стойностите $f(a)$ и $f(b)$ съществува число x_0 от отворения интервал (a,b), така че $f(x_0)=c$.

Доказателство. Нека, за определеност, $f(a)<c<f(b)$. Да разгледаме функцията $\varphi(x)=f(x)-c$, която е непрекъсната в $[a,b]$, $\varphi(a)=f(a)-c<0$ и $\varphi(b)=f(b)-c>0$. Тогава от теоремата на Болцано следва, че съществува число x_0 от отворения интервал (a,b), така че $\varphi(x_0)=0$ или $f(x_0)-c=0$, $f(x_0)=c$.▲

Ще приемем без доказателство и следната теорема за най-голямата и най-малката стойност на функция.

Теорема 3. (Теорема на Вайерщрас)

Ако една функция е непрекъсната в краен и затворен интервал, то тя достига в него най-голямата си и най-малката си стойност.

Нека $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a,b]$. Теоремата твърди, че измежду стойностите на функцията има една най-малка и една най-голяма, т.е. че съществуват числа $x_1\in[a,b]$ и $x_2\in[a,b]$, такива, че неравенствата $f(x_1)\leq f(x)$ и $f(x)\leq f(x_2)$ са изпълнени за всяко $x\in[a,b]$.

1. Докажете, че уравнението $2x^4-3x^3+7x-1=0$ има корен в интервала $(0,\ 1)$.

Решение. Функцията $f(x)=2x^4-3x^3+7x-1$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[0,1]$, $f(0)=-1<0$ и $f(1)=5>0$. От теоремата на Болцано следва, че съществува число $x_0\in(0,1)$, така че $f(x_0)=0$. Очевидно, x_0 е и корен на уравнението.▲

<u>Обърнете внимание.</u> Теоремата на Болцано твърди, че съществува число $x_0\in(0,1)$, но не посочва неговата стойност.

2. Да се докаже, че уравнението има поне един корен.

а) $x^4-5x-1=0$;

б) $x^5+x^4+x^2-1=0$.

3. Докажете, че уравнението $x^4-2x^3-4x-4=0$ има положителен корен.

Решение. Нека $f(x)=x^4-2x^3-4x-4$. Пресмятаме $f(0)=-4<0$, $f(1)=-9<0$. По схемата на Хорнер ще намерим и други стойности на полинома.

	1	–2	0	–4	–4
2	1	0	0	–4	–12
3	1	1	3	5	11

Получихме, че $f(2)=-12<0$ и $f(3)=11>0$.

Следователно, като използваме теоремата на Болцано, получаваме, че уравнението има положителен корен в интервала $(2,3)$.▲

4. Докажете, че уравнението $x^4-3x^3+3x^2-6x+2=0$ има два корена.

5. Докажете, че съществува число $x_0\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, за което функцията $f(x)=\operatorname{tg}(\pi-x)+\cos x$ приема стойност 0.

6. Докажете, че уравнението $3\log_2 x-x=0$ има два корена в интервала $(1, 20)$.

7. Докажете, че уравнението $2^x-(x^2+1)=0$ има корен в интервала $\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right)$.

8. Докажете, че уравнението $\sqrt{x+1}-x=0$ има корен, заключен между две цели последователни числа.

9. Между кои две цели последователни числа се намира числото, за което функцията $f(x)=2^x$ приема стойност $7{,}76$?

Решение. Да отбележим, че $f(x)=2^x$ е непрекъсната навсякъде в дефиниционната си област $(-\infty,+\infty)$ и да пресметнем някои стойности на $f(x)$:

$f(1)=2^1=2$, $f(2)=2^2=4$, $f(3)=2^3=8$. Тъй като е $4<7{,}76<8$, то $f(2)<7{,}76<f(3)$ и по теоремата за междинните стойности следва, че съществува число $x_0\in(2,3)$, така че $f(x_0)=7{,}76$.

Забележка. Задачата може да бъде формулирана и така:

Между кои две цели последователни числа се намира числото, за което уравнението $2^x-7{,}76=0$ има корен?

Решението, на така формулираната задача, записваме по познатия вече начин.

Нека $\varphi(x)=2^x-7{,}76$. Пресмятаме $\varphi(2)=4-7{,}75<0$ и $\varphi(3)=8-7{,}76>0$. И сега, прилагайки теоремата на Болцано, получаваме, че в интервала $(2,3)$ съществува число x_0, така че $2^{x_0}-7{,}76=0$, т.е. $f(x_0)=2^{x_0}=7{,}76$.▲

10. Между кои две четни последователни числа се намира числото, за което функцията $f(x)=\log_2 x$ приема стойност $1{,}022$?

11. В кой от интервалите уравнението $3x^3-2x^2-x+1=0$ има корен?

☒ **А)** $(-3,-2)$ **Б)** $(-2,-1)$ **В)** $(-1,0)$ **Г)** $(0,1)$

12. В кой от интервалите уравнението $2^x-x^3=0$ има корен?

☒ **А)** $(2,3)$ **Б)** $(3,4)$ **В)** $(5,6)$ **Г)** $(9,10)$

13. Дадена е функцията $f(x)=x^2-2$. В кой от интервалите има число x_0, така че $f(x_0)=-\sqrt{2}$?

☒ **А)** $(-1,0)$ **Б)** $(1,2)$ **В)** $(3,4)$ **Г)** $(5,6)$

14. Дадена е функцията $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$. В кой от интервалите има число x_0, така че $f(x_0)=\frac{\sqrt{5}}{5}$?

☒ **А)** $(-3,-2)$ **Б)** $(-2,-1)$ **В)** $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ **Г)** $\left(-\frac{1}{2},0\right)$

3.8. Производна на функция

Определение. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в D и $x_0 \in D$. Функцията се нарича **диференцируема в точката** x_0, когато съществува границата $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Тази граница се нарича производна на $f(x)$ в точката x_0 и се означава $f'(x_0)$.

И така, по определение $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Ако функцията $f(x)$ е диференцируема във всяка точка от D, получаваме нова функция $f'(x)$ (също дефинирана в D), която се нарича **производна** на $f(x)$.

Частното $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ се нарича **диференчно частно.**

Намирането на производната на дадена функция се нарича **диференциране.**
Казваме, че функцията

$f(x)$ има **лява** производна в точката x_0, ако съществува границата $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ и

$f(x)$ има **дясна** производна в точката x_0, ако съществува границата $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Лявата и дясната производна означаваме съответно $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$.

Ясно е, че $f(x)$ има производна в точката x_0 точно когато $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Пример. Да се намери производната на функцията $f(x) = ax + b$.
Решение. Намираме границата на диференчното частно:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} a = a. \blacktriangle$$

Получихме, че производната на $f(x) = ax + b$ е a. Това записваме така: $f'(x) = a$ или $f' = a$ или $(ax + b)' = a$.

По този начин могат да се намерят производните на основните елементарни функции. Те се наричат **таблични производни** и трябва да се помнят наизуст.

Наред с табличните производни трябва да се знаят и правилата за диференциране, които следват непосредствено от теоремите за граници на функции.

Таблични производни	**Правила за диференциране**
$(c)' = 0$, c– константа	$(c\,f)' = c\,f'$, c – константа
$(x)' = 1$	$(f + g)' = f' + g'$
$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$	$(f - g)' = f' - g'$
$(\sin x)' = \cos x$	$(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$
$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(g(f))' = g'(f).f'$
$(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	

Намиране на производна на функция с табличните производни и с прилагане на правилото за диференциране на константа по функция

$$(c\,f)' = c\,f',\ c - \text{константа}$$

1. Да се намери производната на функцията.

а) 7. **Решение.** $(7)' = 0$.▲

б) x^5. **Решение.** $(x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4$.▲

в) $\frac{1}{x}$. **Решение.** $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1x^{-1-1} = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.▲

г) $\sqrt{x}$. **Решение.** $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.▲

д) $\frac{1}{x^3}$. **Решение.** $\left(\frac{1}{x^3}\right)' = (x^{-3})' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$.▲

е) $\sqrt[3]{x^5}$. **Решение.** $\left(\sqrt[3]{x^5}\right)' = (x^{\frac{5}{3}})' = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$.▲

ж) $2x^4$. **Решение.** $(2x^4)' = 2(x^4)' = 2.4x^3 = 8x^3$.▲

з) $\frac{5}{2x^3}$. **Решение.** $\left(\frac{5}{2x^3}\right)' = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{x^3}\right)' = \frac{5}{2}\left(-\frac{3}{x^4}\right) = -\frac{15}{2x^4}$.▲

2. Да се намери производната на функцията.

а) $15;\ x;\ x^2;\ x^3;\ x^4;\ x^5$; б) $\sqrt{x};\ \sqrt[3]{x};\ \sqrt{x^3}\ \ \sqrt[5]{x^3}$; в) $\frac{1}{x};\ \frac{1}{x^2};\ \frac{1}{x^3};\ \frac{1}{x^4}$;

г) $\frac{1}{\sqrt{x}};\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}};\ \frac{1}{\sqrt{x^3}};\ \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$; д) $3x;\ \frac{1}{2}x^2;\ \frac{1}{3}x^3;\ \frac{1}{4}x^4$: е) $2\sqrt{x};\ 3\sqrt[3]{x};\ \frac{3}{2}\sqrt{x^3};\ 15\sqrt[3]{x^5}$;

ж) $\frac{1}{2x};\ \frac{2}{x};\ \frac{1}{2x^2};\ \frac{2}{3x^2}$; з) $\frac{2}{\sqrt{x}};\ \frac{2}{3\sqrt[3]{x}};\ \frac{2}{3\sqrt{x^3}};\ \frac{6}{5\sqrt[5]{x^3}}$;

и) $\sin x;\ \cos x;\ \mathrm{tg}x;\ \mathrm{cotg}x$; к) $3\sin x;\ -2\cos x;\ -\mathrm{tg}x;\ 5\mathrm{cotg}x$;

л) $-\sin x;\ 7\cos x;\ 5\mathrm{tg}x;\ -2\mathrm{cotg}x$.

Намиране на производна на функция с прилагане на правилото за диференциране на сбор и разлика на функции

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

3. Намерете производната на функцията.

а) $5x-7$. **Решение.** $(5x-7)' = (5x)' - (7)' = 5 - 0 = 5$.▲

б) x^3-4x. **Решение.** $(x^3-4x)' = (x^3)' - (4x)' = 3x^2 - 4$.▲

в) $\sqrt{x}+\frac{1}{x}$. **Решение.** $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)' = (\sqrt{x})' + \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$.▲

г) $3\sin x + 2\mathrm{tg}\,x$. **Решение.** $(3\sin x + 2\mathrm{tg}\,x)' = (3\sin x)' + (2\mathrm{tg}x)' = 3\cos x + \frac{2}{\cos^2 x}$.▲

д) $\frac{1}{5}x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x - 1$.

Решение. $(\frac{1}{5}x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x - 1)' = \frac{1}{5}.5x^4 - 3.4x^3 + 2.3x^2 + 4 = x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 4$.▲

Задачи **4. – 7.** Намерете производната на функцията.

4. а) $2x+3$; б) x^2+2x; в) $5x^3+2x+1$; г) $3x^4-2x^3+8x+1$;

д) $\frac{1}{2}x^2-\sqrt{x}$; е) $\sqrt[3]{x}-x$; ж) $3\sqrt{x^3}-\sqrt{x}$; з) $x^2+\sqrt{x}+x+5$.

5. а) $\frac{1}{x}-x^2+35$; б) $3x^3+\frac{1}{x^2}+2x+1$; в) $2x^2-\frac{3}{x^3}$; г) $\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}$.

6. а) $\frac{1}{\sqrt{x}}+6$; б) $\frac{1}{\sqrt{x^3}}-x^4$; в) $\frac{3}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}$; г) $4\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$.

7. а) $\sin x+\operatorname{tg}x$; б) $2\sin x+\cos x$; в) $\operatorname{tg}x-\operatorname{cotg}x$; г) $\cos x-3\sin x$.

<u>Намиране на производна на функция с прилагане на правилото за диференциране на произведение</u>

$$(f\,g)'=f'\,g+f\,g'$$

8. Намерете производната на функцията.

а) $x^2\sin x$. **Решение.** $(x^2\sin x)'=(x^2)'\sin x+x^2(\sin x)'=2x\sin x+x^2\cos x$.▲

б) $2x\operatorname{cotg}x$. **Решение.** $(2x\operatorname{cotg}x)'=(2x)'\operatorname{cotg}x+2x(\operatorname{cotg}x)'=2\operatorname{cotg}x-\frac{2x}{\sin^2 x}$.▲

в) $(x-2x^2)\cos x$. **Решение.** $((x-2x^2)\cos x)'=(x-2x^2)'\cos x+(x-2x^2)(\cos x)'=$
$=(1-4x)\cos x+(x-2x^2)(-\sin x)=(1-4x)\cos x-(x-2x^2)\sin x$.▲

г) $3\sin x\operatorname{tg}x$. **Решение.** $(3\sin x\operatorname{tg}x)'=(3\sin x)'\operatorname{tg}x+3\sin x(\operatorname{tg}x)'=3\cos x\operatorname{tg}x+\frac{3\sin x}{\cos^2 x}$.▲

В задачи д), е), ж) първо ще преобразуваме функцията и след това ще намерим производната.

д) $\sqrt{x}.x^2$. **Решение.** $(\sqrt{x}.x^2)'=(x^{\frac{1}{2}+2})'=(x^{\frac{5}{2}})'=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}=\frac{5\sqrt{x^3}}{2}$.▲

е) $(x^2+1)x^4$. **Решение.** $((x^2+1)x^4)'=(x^6+x^4)'=6x^5+4x^3$.▲

ж) $(x+1)(5-x)$. **Решение.** $((x+1)(5-x))'=(-x^2+4x+5)'=-2x+4$.▲

Задачи **9. – 12.** Намерете производната на функцията.

9. а) $x\sin x$; б) $2x^2\cos x$; в) $(1+x^2)\operatorname{tg}x$; г) $(\sqrt{x}+3)\sin x$.

10. а) $\sin x\cos x$; б) $4\cos x\operatorname{tg}x$; в) $2\operatorname{tg}x\operatorname{cotg}x$; г) $\sin x\operatorname{tg}x$.

11. а) $\sqrt{x}.x$; б) $(x-3)(2x+3)$; в) $\sqrt{x}(x^2-2)$; г) $x^2(2x^2-3x-6)$.

12. а) $5x^3-x\operatorname{tg}x$; б) $\sqrt{x}-x^2\cos x$; в) $4\operatorname{cotg}x-2x\operatorname{tg}x$; г) $x^3\cos x-3\cos x$.

<u>Намиране на производна на функция с прилагане на правилото за диференциране на частно</u>

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\,g-f\,g'}{g^2}=\frac{\text{производната на числителя . знаменателя - числителя . производната на знаменателя}}{(\text{знаменателя})^2}$$

13. Да се намери производната на функцията.

а) $\frac{x}{\sin x}$. **Решение.** $\left(\frac{x}{\sin x}\right)'=\frac{(x)'\sin x-x(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$.▲

б) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$. **Решение.** $\left(\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}\right)' = \dfrac{(\cos x)'\sqrt{x}-\cos x(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \dfrac{-\sqrt{x}\sin x-\dfrac{\cos x}{2\sqrt{x}}}{x}$. ▲

в) $\dfrac{x+3}{x-3}$. **Решение.** $\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)' = \dfrac{(x+3)'(x-3)-(x+3)(x-3)'}{(x-3)^2} = \dfrac{x-3-(x+3)}{(x-3)^2} = \dfrac{-6}{(x-3)^2}$. ▲

г) $\dfrac{x^2\cos x}{5x+1}$. **Решение.** $\left(\dfrac{x^2\cos x}{5x+1}\right)' = \dfrac{(x^2\cos x)'(5x+1)-x^2\cos x(5x+1)'}{(5x+1)^2} =$

$= \dfrac{(2x\cos x - x^2\sin x)(5x+1)-x^2\cos x.5}{(5x+1)^2} = \dfrac{(2x\cos x - x^2\sin x)(5x+1)-5x^2\cos x}{(5x+1)^2}$. ▲

д) $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$. **Решение.** $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)' = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$. ▲

Задачи **14. – 18.** Намерете производната на функцията.

14. а) $\dfrac{x}{\sin x}$; б) $\dfrac{\sin x}{x}$; в) $\dfrac{x^2}{\cos x}$; г) $\dfrac{\sqrt{x}}{\cos x}$.

15. а) $\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$; б) $\dfrac{3\cos x}{2\sin x}$; в) $\dfrac{\operatorname{cotg} x}{\sin x}$; г) $\dfrac{\cos x}{\operatorname{tg} x}$.

16. а) $\dfrac{x^2\sin x}{\sqrt{x}}$; б) $\dfrac{x\sin x}{\operatorname{cotg} x}$; в) $\dfrac{(3x^2-x+5)(x+1)}{x^2}$; г) $\dfrac{(x^2+1)(x-3)}{\sin x}$.

17. а) $1+\dfrac{x^2}{2}\sin x+(x+2)\cos x$; б) $(x+\sqrt{x})\left(x^2+1\right)-x^2\sqrt{x}$;

18. а) $\dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{x}}$; б) $\dfrac{x^2\cos x+x^2\sin x}{x^2+1}$ в) $\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{cotg}x}{\sin x}$ г) $\dfrac{x\sin x-x\cos x}{x+2}$.

Намиране на производна на функция с прилагане на правилото за диференциране на съставна функция

$$(g(f))' = g'(f).f'$$

19. Да се намери производната на функцията.

а) $(3x+1)^4$. **Решение.** $((3x+1)^4)' = 4(3x+1)^3.(3x+1)' = 4(3x+1)^3.3 = 12(3x+1)^3$. ▲

б) $\sin^3 x$. **Решение.** $(\sin^3 x)' = 3\sin^2 x.(\sin x)' = 3\sin^2 x\cos x$. ▲

в) $\sin 5x$. **Решение.** $(\sin 5x)' = \cos 5x.(5x)' = \cos 5x.5 = 5\cos 5x$. ▲

г) $\sqrt{\operatorname{tg}x}$. **Решение.** $(\sqrt{\operatorname{tg}x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}x}}.(\operatorname{tg}x)' = \dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}x}}.\dfrac{1}{\cos^2 x}$. ▲

д) $\sqrt{x^2+2}$. **Решение.** $(\sqrt{x^2+2})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+2}}.(x^2+2)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. ▲

е) $\dfrac{1}{\cos x}$. **Решение.** $\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = -\dfrac{1}{\cos^2 x}.(\cos)' = -\dfrac{1}{\cos^2 x}.(-\sin x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$. ▲

ж) $\sqrt{\cos^5 x}$. **Решение.** $(\sqrt{\cos^5 x})' = (\cos^{\frac{5}{2}} x)' = \dfrac{5}{2}\cos^{\frac{3}{2}} x.(\cos x)' = \dfrac{5}{2}\cos^{\frac{3}{2}} x.(-\sin x) =$

$= -\dfrac{5}{2}\sin x\sqrt{\cos^3 x}$. ▲

Задачи **20. – 24.** Намерете производната на функцията.

20. $(5x+1)^2$; б) $(x+2)^2$; в) $(x^2+x)^3$; г) $(4x^3-x^2-2)^4$.

21. а) $\sin^3 x$; б) $\cos^4 x$; в) $\mathrm{tg}^2 x$; г) $\mathrm{cotg}^2 x$.

22. а) $\sin 2x$; б) $\sin x^2$; в) $\cos(3x+1)$; г) $\cos\sqrt{x}$.

23. а) $\sqrt{\sin x}$; б) $\sqrt{\sin^3 x}$; в) $\sqrt{\mathrm{tg}\, x}$; г) $\sqrt{\mathrm{tg}^3 x}$.

24. а) $\sqrt{x^3-3x}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{x^4-5}}$; в) $\dfrac{1}{(3x^2-x)^3}$; г) $\dfrac{1}{-\frac{x^4}{2}-1}$

25. Да се намери производната на функцията.

а) $\sin^3 5x$. **Решение.** $(\sin^3 5x)' = 3\sin^2 5x.(\sin 5x) = 3\sin^2 5x.\cos 5x.(5x)' =$
$= 3\sin^2 5x.\cos 5x.5 = 15\sin^2 5x\cos 5x$.▲

б) $\mathrm{tg}^2 3x$. **Решение.** $(\mathrm{tg}^2 3x)' = 2\mathrm{tg}3x.(\mathrm{tg}3x)' = 2\mathrm{tg}3x.\dfrac{1}{\sin^2 3x}.(3x)' = 2\mathrm{tg}3x.\dfrac{1}{\sin^2 3x}.3 =$

$= \dfrac{6\mathrm{tg}3x}{\sin^2 3x} = \dfrac{6\sin 3x}{\cos 3x \sin^2 3x} = \dfrac{6}{\cos 3x \sin 3x} = \dfrac{12}{\sin 6x}$.▲

в) $\cos^4(2x+1)$. **Решение.** $(\cos^4(2x+1))' = 4\cos^3(2x+1).(\cos(2x+1))' =$
$= 4\cos^3(2x+1).(-\sin(2x+1)).(2x+1)' = 4\cos^3(2x+1).(-\sin(2x+1)).2 =$
$= -8\cos^3(2x+1)\sin(2x+1) = -8\sin(2x+1)\cos^3(2x+1)$.▲

г) $\mathrm{cotg}^3(x^2)$. **Решение.** $(\mathrm{cotg}^3(x^2))' = 3\mathrm{cotg}^2(x^2).(\mathrm{cotg}(x^2))' = 3\mathrm{cotg}^2(x^2).\dfrac{-1}{\sin^2(x^2)}.(x^2)' =$

$= 3\mathrm{cotg}^2(x^2).\dfrac{-1}{\sin^2(x^2)}.2x = -\dfrac{6x\,\mathrm{cotg}^2(x^2)}{\sin^2(x^2)} = -\dfrac{6x\cos^2(x^2)}{\sin^4(x^2)}$.▲

д) $\sqrt{\sin(4x-1)}$. **Решение.** $(\sqrt{\sin(4x-1)})' = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin(4x-1)}}.(\sin(4x-1))' =$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{\sin(4x-1)}}.\cos(4x-1).(4x-1)' = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin(4x-1)}}.\cos(4x-1).4 = \dfrac{2\cos(4x-1)}{\sqrt{\sin(4x-1)}}$.▲

Задачи **26. – 27.** Намерете производната на функцията.

26. а) $\sin^3 5x$; б) $\sin^2 3x$; в) $\cos^2 x^3$; г) $5\cos^3(3x^2-x)$.

27. а) $\mathrm{tg}^3\sqrt{x}$; б) $\mathrm{tg}(\sin x^2)$; в) $\sqrt{\cos^3(5x-1)}$; г) $\mathrm{cotg}^3(\cos^2 2x)$.

Общи задачи за намиране на производна на функция

Задачи **28. – 38.** Намерете производната на функцията.

28. а) $\sqrt{2x+1}-2x^2$; б) $\sqrt{x^2+1}-3x^3$; в) $-\dfrac{1}{2(1+x^2)}$; г) $-\dfrac{1}{2(2x+1)}$

29. а) $(\sqrt{3x}-3x)(2x^2-x)$; б) $(\sqrt{2x}-2x)(3x^2-x)$; в) $\left(2x^3-1\right)\left(5x+\sqrt{5x}\right)$.

30. а) $\dfrac{1}{2}(\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x)$; б) $-\cos x-\dfrac{1}{3}\cos 3x$;

в) $\dfrac{\sin 2x}{4}-\dfrac{\sin 8x}{16}$; г) $\dfrac{1}{2}(\cos 3x-\dfrac{1}{3}\cos 9x)$.

31. а) $-\frac{1}{5}\sin^5 x+\frac{1}{3}\sin^3 x$; б) $\frac{1}{4}\sin^4 x-\frac{1}{6}\sin^6 x$; в) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}$.

32. а) $\sin^2(2x)\cos^2(2x)$; б) $\mathrm{tg}^3(x-1)\sin^2(x-1)$.

33. а) $\frac{2\sqrt{\cos^3 x}}{\sin x}$; б) $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$; в) $x\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

34. а) $2\sqrt{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{5}-1\right)$; б) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{4}{3}\sqrt{\sin^3 x}-\cos x$.

35. а) $\frac{1}{4}(\cos^4 x-\sin^4 x)-\frac{1}{2}\cos 2x$; б) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x$; в) $\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x+\mathrm{tg}x$

36. а) $-\frac{\mathrm{cotg}^5 x}{5}-\frac{\mathrm{cotg}^7 x}{7}$; б) $\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x-\mathrm{tg}x+x$.

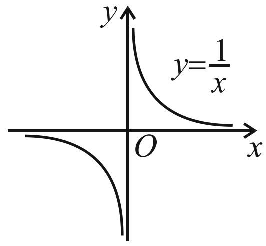
37. а) $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; б) $\sqrt{\frac{2x}{x+1}}$; в) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$; г) $\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}$.

38. а) $\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)\sin 2x+\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)\cos 2x$; б) $\frac{x^4}{2}-\left(x^3-\frac{3}{2}x\right)\sin 2x-\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}\right)\cos 2x$.

3.9. Връзка между непрекъснатост и диференцируемост

Терминът „непрекъснатост” е свързан с интуитивната ни представа за непрекъснатост и прекъснатост на крива линия. Функцията е непрекъсната, ако е непрекъсната нейната графика и функцията е прекъсната, ако е прекъсната нейната графика. Да обърнем внимание, че непрекъснатост и прекъснатост се дефинират само в точки от дефиниционната област.

Да разгледаме функцията $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Нейната графика е показана на чертежа. Функцията е непрекъсната навсякъде в дефиниционната си област, въпреки че графиката ѝ е прекъсната линия. В точката $x=0$ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ не е дефинирана и въпросът за нейната непрекъснатост няма смисъл.



Сега да поставим въпроса: „Каква е графиката на функция, която е диференцируема и каква е графиката на функция, която не е диференцируема?”

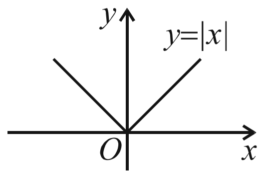
Да разгледаме функцията $f(x)=|x|$ и да проверим дали тя е диференцируема в точката $x=0$. За целта образуваме диференчното частно при $x_0=0$:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{|x|-|x_0|}{x-x_0}=\frac{|x|}{x}.$$

Тъй като $|x|=-x$ при $x<0$ и $|x|=x$ при $x>0$, то ще намерим лявата и дясната граница на диференчното частно: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{-x}{x}=-1$ и $.\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{x}{x}=1$

И така, получихме, че лявата и дясната производна в точката $x_0=0$ съществуват, но те не са равни, което показва, че функцията $f(x)=|x|$ не е диференцируема в точката 0. В останалите точки очевидно функцията е диференцируема.

Да разгледаме графиката на тази функция, показана на чертежа. В точката 0 графиката има „ръб”, докато в останалите точки графиката е „гладка”. Функциите, които имат „гладка” графика са диференцируеми.



Изучените криви линии в равнината – окръжност, елипса, хипербола и парабола са гладки. Ако разгледаме графиките им в първи квадрант, те са графики на диференцируеми функции.

Следната теорема показва връзката между непрекъснатост и диференцируемост на функция.

Теорема. Ако една функция е диференцируема в дадена точка, то тя е непрекъсната в тази точка.

Доказателство. Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в точката x_0, което означава, че има производна в точката x_0, т.е $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$.

От теоремите за граници на функции имаме:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))}{\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)}\Rightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)f'(x_0)=0,$$

което показва, че $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ и значи $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0.▲

Обратното твърдение не винаги е вярно, т.е. ако $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0, не следва, че тя има производна в точката x_0.

Такъв пример е функцията $f(x)=|x|$, която е непрекъсната в точката 0, но, както показахме по-горе, тя няма производна при $x=0$.

1. Диференцируема ли е функцията $f(x)=\begin{cases}\sin(2x+4), & x<-2\\ -x^2-2x, & x\ge -2\end{cases}$ при $x=-2$?

2. За кои стойности на a функцията $f(x)=\begin{cases}2x+\dfrac{3}{2}, & x\le \dfrac{1}{2}\\ 2x^2+a, & x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$ е диференцируема при $x=\dfrac{1}{2}$?

3. Диференцируема ли е функцията $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<1\\ 2x-1, & x\ge 1\end{cases}$ при $x=1$?

4. Диференцируема ли е функцията $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<2\\ 8-2x, & x\ge 2\end{cases}$ при $x=2$?

5. За кои стойности на a функцията $f(x)=\begin{cases}ax, & x\le a\\ \sin(x-a)+x^2, & x>a\end{cases}$ е диференцируема в точката $x=a$?

6. Диференцируема ли е функцията $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le 2\\ x\cos x-2\cos x+\sin 2, & x>2\end{cases}$ при $x=2$?

7. Диференцируема ли е функцията $f(x)=\begin{cases}4x+5, & x\le 2\\ x^2+9, & x>2\end{cases}$ при $x=2$?

8. Диференцируема ли е функцията $f(x)=\begin{cases}\sin 5x+2, & x<0\\ x^2+5x+2, & x\ge 0\end{cases}$ при $x=0$?

9. Диференцируема ли е функцията $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<2\\ \dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}, & x\ge 2\end{cases}$ при $x=2$?

10. Диференцируема ли е функцията $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\le -1\\ (x+1)(1+\cos(x+1)), & x>-1\end{cases}$ при $x=-1$?

11. За кои стойности на a и b функцията $f(x)=\begin{cases}\sin 3x+a, & x<0\\ ax^2+bx+1, & x\ge 0\end{cases}$ е диференцируема при $x=0$?

Тест 1
Функции. Непрекъснатост и диференцируемост

1. Границата $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x+4}{x^4}$ е равна на:

☒ **А)** $\dfrac{5}{4}$ **Б)** $\dfrac{3}{2}$ **В)** $\dfrac{3}{4}$ **Г)** $\dfrac{1}{16}$

2. Границата $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$ е равна на:

☒ **А)** -3 **Б)** $\dfrac{3}{2}$ **В)** $-\dfrac{1}{3}$ **Г)** $\dfrac{1}{3}$

3. Границата $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x-4}-2\sqrt{5-x}}{2x-4}$ е равна на:

☒ **А)** -1 **Б)** 0 **В)** 1 **Г)** 4

4. Границата $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)^2}{\sqrt{-3x-5}-\sqrt{x^2-3}}$ е равна на:

☒ **А)** -2 **Б)** 0 **В)** $\dfrac{1}{2}$ **Г)** 2

5. Границата $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{4x^3-2x^2}{5x^3+1}$ е равна на:

☒ **А)** 0 **Б)** $\dfrac{1}{3}$ **В)** $\dfrac{2}{5}$ **Г)** $\dfrac{4}{5}$

6. Границата $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3-1}{3x^2+1}$ е равна на:

☒ **А)** $\dfrac{2}{3}$ **Б)** 0 **В)** $+\infty$ **Г)** $-\infty$

7. Границата $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x-3}\right)$ е равна на:

☒ **А)** $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ **Б)** 0 **В)** $+\infty$ **Г)** $-\infty$

8. Границата $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\,\mathrm{tg}2x}{x^2}$ е равна на:

☒ **А)** 0 **Б)** $\dfrac{1}{6}$ **В)** 5 **Г)** 6

На задачи 9 и 10 напишете на допълнителен лист решението с необходимите обосновки.

9. Намерете производната на функцията.

а) $5\sqrt{x}-2x^2+\dfrac{4}{x^2}$; б) $x^2\sin x$;

в) $\dfrac{2\cos x}{x^4}$: г) $\dfrac{x^3\cos x}{\sin x}$:

д) $3\cos x^2$; е) $\sqrt{\sin^3 x}$

ж) $\dfrac{1}{2}(\sin x+\dfrac{1}{7}\sin 7x)$.

10. Докажете, че уравнението $x^4-2x^3-2x^2-4x-8=0$ има поне един корен.

Тест 2
Функции. Непрекъснатост и диференцируемост

1. Границата $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-1}$ е равна на:

☒ **А)** 1 **Б)** 3 **В)** 4 **Г)** 6

2. Границата $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2}$ е равна на:

☒ **А)** -1 **Б)** 1 **В)** $\dfrac{5}{3}$ **Г)** 3

3. Границата $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2+5}-3}$ е равна на:

☒ **А)** $\dfrac{9\sqrt{5}}{20}$ **Б)** $\dfrac{3\sqrt{5}}{20}$ **В)** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ **Г)** $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

4. Границата $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{5}x^2-2x}{3x^2-5x}$ е равна на:

☒ **А)** $\sqrt{5}-2$ **Б)** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ **В)** $\dfrac{2-\sqrt{5}}{3}$ **Г)** $\dfrac{2-\sqrt{5}}{2}$

5. Границата $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}$ е равна на:

☒ **А)** -6 **Б)** -3 **В)** $-\dfrac{2}{3}$ **Г)** $-\dfrac{1}{3}$

6. Границата $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\sin 3x}$ е равна на:

☒ **А)** 6 **Б)** $\dfrac{3}{2}$ **В)** $\dfrac{2}{3}$ **Г)** $\dfrac{1}{6}$

7. Границата $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x\sin 3x}{1-\cos^2 4x}$ е равна на:

☒ **А)** $\dfrac{4}{3}$ **Б)** $\dfrac{3}{4}$ **В)** $\dfrac{1}{2}$ **Г)** $\dfrac{3}{16}$

8. Намерете границата $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+3}-x)$

На задачи 9 и 10 напишете на допълнителен лист решението с необходимите обосновки.

9. Намерете производната на функцията:

а) $\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2-5x+7$; **б)** $2x\cos x$ **;**

в) $(x^2-x)(2x+3)$; **г)** $\sqrt{x}\,\mathrm{tg}\sqrt{x}$;

д) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\sin 4x+\dfrac{2}{3}\sin 2x\right)$**.**

10. В кои точки е прекъсната и в кои непрекъсната функцията $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0\\ \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{(x+2)^2+4}, & x\ge 0\end{cases}$?

Проект № 1

Метод на неопределените коефициенти

Дроби от вида $\dfrac{A}{a+x}$ се наричат елементарни дроби.

Всяка рационална дроб от вида $\dfrac{px+q}{(x+a)(x+b)}$ може да се представи като сума от елементарни дроби така: $\dfrac{px+q}{(x+a)(x+b)}=\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{x+b}$.

Използвайте метода на неопределените коефициенти, за да представите рационалната дроб $\dfrac{3x}{(2-x)(x+1)}$ като сума от елементарни дроби.

Проект № 2

Граница на редица

Дадени са редиците:

(А) $x_n=(-1)^{n+1}$

(Б) $x_n=\dfrac{2+(-1)^n}{n}$

(В) $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$

и твърденията:

(1) Всяка сходяща и ограничена редица е монотонна.

(2) Ако една редица е ограничена, то тя е сходяща.

(3) Ако a е граница на редицата a_n и безброй много членове на редицата са равни на a, то всички членове на редицата са равни на a.

(4) Ако модулът на общия член на една редица е по-малък от $\dfrac{1}{n}$, то границата ѝ е 0.

От дадените твърдения 3 са неверни и едно е вярно. Открийте вярното твърдение, а за неверните намерете контрапример* от дадените редици.

*Контрапример е пример, който опровергава дадено твърдение.

Обосновете отговора си.

Проект № 3

Граница на редица

Дайте различни примери на редици:

– ограничени и неограничени;

– монотонни и не монотонни;

– с редуващи се знаци;

– сходящи и разходящи.

Запишете първите няколко члена на всяка редица. Изобразете ги на числовата ос.

Направете табло, с което да покажете работата си.

Проект № 4

Граница на редица, зададена с рекурентна формула

Един метод за намиране граница на редица, зададена с рекурентна формула е следният:

1) Доказваме, че редицата е монотонно растяща и ограничена отгоре или че е монотонно намаляваща и ограничена отдолу.

Например редицата $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \dfrac{2x_n}{n+1}$, $n \geq 1$ е монотонно намаляваща и ограничена отдолу.

2) Правим извода, че редицата е сходяща.

От теоремата на Вайерщрас следва че редицата е сходяща и нека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = X$.

Тъй като редицата $\{x_{n+1}\}$ се получава от редицата $\{x_n\}$ с премахване на първия ѝ член, то тя също е сходяща и границата ѝ е X.

3) В равенството $x_{n+1} = \dfrac{2x_n}{n+1}$ правим граничен преход:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n}{n+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} . \lim_{n\to\infty} x_n$$

и получаваме, че $X = 0.X \;\Rightarrow\; X = 0$.

Задача.

Приложете описания по-горе метод, за да намерите границата на редицата, зададена с рекурентната формула

$$a_1 = 2,\; a_{n+1} = \frac{a_n}{2},\;\; n \geq 1.$$

Проект № 5

Граница на функция при неограничено нарастване на аргумента

Всеки чертеж илюстрира една от следните граници:
В квадратчето пред всяка граница запишете буквата на чертежа, който се отнася за нея.

☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$

☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ и $f(x) < A$, $\forall x$

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

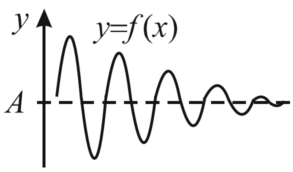
☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ и $f(x) > A$, $\forall x$

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ и $f(x) < A$, $\forall x$

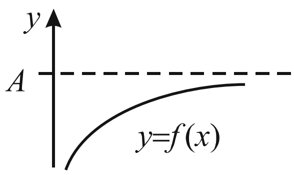
☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ и $f(x) > A$, $\forall x$

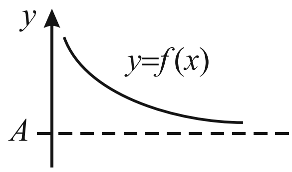
а



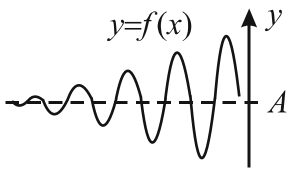
б



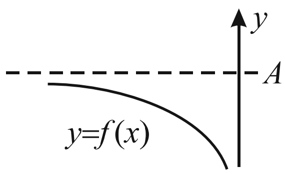
в



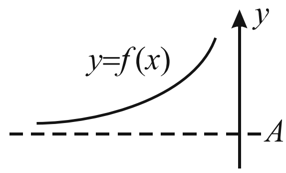
г



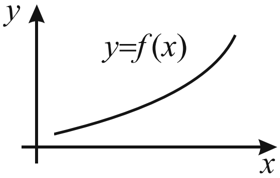
д



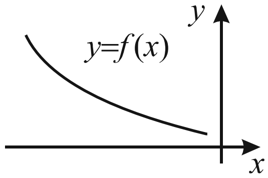
е



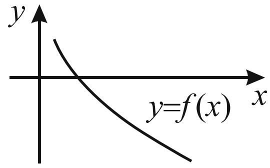
ж



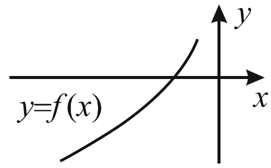
з



и



к

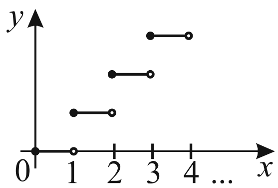


Проект № 6

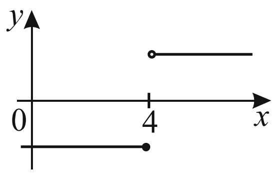
Непрекъснатост

Разгледайте следните графики на функции, дефинирани за всяко x и означени с (A), (B) (C).

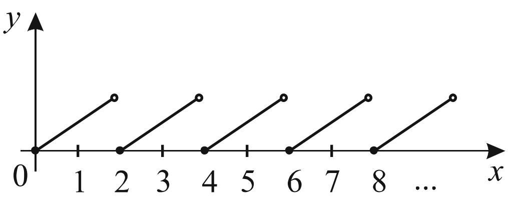
(A)



(B)



(C)



За функциите, зададени с графиките си, решете задачите:

1. Кои от функциите са ограничени?

2. Кои от функциите са прекъснати за всяко естествено число ?

3. Кои от функциите са непрекъснати при $x = 4$?

4. Кои от функциите са непрекъснати за всяко нечетно число?

5. Начертайте графика на функция, която е ограничена и прекъсната за всяко естествено число.

Проект № 7

Една по-различна функция

Функцията

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x \text{ е рационално число} \\ 0, & \text{ако } x \text{ е ирационално число} \end{cases}$$

се нарича функция на Дирихле.
Нейната графика не може да се начертае.

Какво можете да кажете за непрекъснатостта на тази функция? Обосновете отговора си.

Проект № 8

Функцията и нейната производна

За всяка от функциите:

1) $f(x)=x^2$

2) $g(x)=x^2+2x$

3) $h(x)=5x-1$

4) $k(x)=5x-3$

5) $y(x)=|x|$

6) $\varphi(x)=\sin x$

7) $\psi(x)=\cos x$

определете точките, в които функцията не е диференцируема, ако има такива.

Намерете производната ѝ.

Постройте на една и съща координатна система графиката на функцията и графиката на производната ѝ.

Годишен преговор

Полиноми

1. Намерете частното и остатъка при делението на полинома $x^5+x^4-7x^3-4x^2+12x-6$ с полинома x^2-5.

2. Намерете частното и остатъка при делението на полинома $2x^4+3x^3-8x^2+4x+5$ с двучлена $x+3$.

3. Намерете стойността на полинома $P(x)=x^4-3x^3+x^2+2x+1$ при $x=2$, $x=-1$ и $x=3$.

4. Намерете десетичния запис на числото:
а) $11010_{(2)}$; б) $2A1F_{(16)}$.

5. Намерете рационалните корени на полинома $x^4+3x^3-3x^2-11x-6$ и го разложете на множители.

6. Разложете на множители полинома.
а) $9x^5+18x^4-82x^3-120x^2+185x+150$;
б) $24x^4-38x^3-27x^2+12x+4$;
в) $2x^5-7x^4-4x^3+32x^2-16x-16$;
г) $x^5+9x^4+27x^3+23x^2-24x-36$;
д) $36x^4-24x^3-47x^2-x+6$;
е) $40x^4-124x^3+14x^2+103x+30$;
ж) $2x^4-6x^3-9x^2+25x+6$;
з) $3x^4-5x^3-6x^2+6x+4$.

7. Да се реши уравнението.
а) $x^3-4x^2+2x+4=0$;
б) $2x^3+5x^2+4x+4=0$;
в) $3x^3+8x^2+9=0$;
г) $2x^4-3x^3-11x^2+12x+12=0$;
д) $2x^4+6x^3-7x^2-19x+6=0$;
е) $x^5+2x^4-x^3-4x^2-2x+4=0$
ж) $x^5-3x^4-x^3+5x^2-2=0$;
з) $2x^5-13x^3-3x^2+20x+12=0$;
и) $x^5-x^4-7x^3+3x^2+12x+4=0$;
к) $x^5-x^4-2x^3+5x^2-5x+2=0$.

8. Да се реши уравнението.
а) $x^5-3x^4+4x^2-4x-4=0$;
б) $x^5+x^4-8x^3-12x^2-4x+12=0$;
в) $-x^5-9x^4-27x^3-27x^2+9x+27=0$;
г) $-x^5+6x^4-12x^3+8x^2+25x-50=0$.

9. Да се реши уравнението.
а) $x^4-x^3-3x^2+2x+2=0$;
б) $x^4-2x^3-5x^2+6x+6=0$;
в) $3x^5-2x^4-10x^3+5x^2+8x-2=0$.

10. Да се реши уравнението.

а) $x^4+2x^3-15x^2+2x+1=0$;

б) $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$

в) $x^5-6x^4-5x^3-5x^2-6x+1=0$;

г) $x^6-3x^5+3x^4-2x^3+3x^2-3x+1=0$.

11. Да се реши уравнението.

а) $6x^5-25x^4-6x^3+99x^2-68x+12=0$;

б) $x^5-10x^4+33x^3-42x^2+17x-2=0$;

в) $2x^5-9x^4-23x^3+42x^2+11x-3=0$.

12. Да се реши неравенството.

а) $x^5+5x^4-15x^2+5x+4\le 0$;

б) $x^6+4x^5-6x^4-28x^3+17x^2+48x-36>0$;

в) $x^6-9x^5+21x^4-21x^2+9x-1<0$.

13. Да се реши неравенството.

а) $x^5+2x^4-5x^3-20x^2-26x-12\ge 0$;

б) $x^5-4x^4-5x^3+26x^2+6x-36>0$;

в) $-9x^4+45x^3+7x^2-33x-10<0$.

14. Да се реши неравенството.

а) $x^5-2x^4-8x^3+16x^2+4x-8>0$;

б) $x^5+x^4-8x^3-8x^2+4x+4<0$.

15. Да се реши неравенството.

а) $x^5-2x^4-4x^3+12x+8<0$;

б) $x^5+2x^4-4x^3-8x^2-4x+8>0$.

16. Напишете развитието на бинома.

а) $(2a-3)^6$;

б) $\left(\sqrt{x}-x\right)^7$;

в) $(x+y)^5-(x-y)^5$;

г) $(a^2-2)^8$.

17. Намерете:

а) четвъртия член в развитието на бинома $(x+y^2)^5$;

б) шестия член в развитието на бинома $\left(\frac{1}{3}+2a\right)^7$;

в) седмия член в развитието на бинома $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$;

г) петия член в развитието на бинома $(\sqrt{3}+1)^6$.

18. Намерете този член в развитието на бинома $(x+a^2)^7$, който съдържа a^8.

Числови редици

19. Намерете рекурентна формула за редицата $x_n = \dfrac{3^n}{n!}$ и докажете, че е монотонно намаляваща при $n \geq 2$.

20. Да се намери границата:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^4+3}{\sqrt{2}n^4-3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3}{-(\sqrt{3}+1)n^4+4}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^5}{-n^3+4}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-2n-2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2}}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}+n^2}{\sqrt{n^2-3}}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}$

21. Да се намери границата:

а) $\lim\limits_{a_n\to\sqrt{2}} \dfrac{a_n+3}{2{a_n}^2+4}$; б) $\lim\limits_{a_n\to-\sqrt{3}} \dfrac{a_n+1}{3{a_n}^2-1}$; в) $\lim\limits_{a_n\to 3} \dfrac{{a_n}^2-a_n-6}{3{a_n}^2-9a_n}$;

22. Да се намери сумата на безкрайна геометрична прогресия с първи член a_1 и частно q, ако:

а) $a_1=1$, $q=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$; б) $a_1=24$, $q=\dfrac{1}{3}$; в) $a_1=1\dfrac{1}{4}$; $q=0,4$; г) $a_1=1$, $q=-\dfrac{1}{2}$.

23. Намерете частното на безкрайно намаляваща геометрична прогресия, на която всеки член е 3 пъти по-голям от сумата на всички членове след него.

24. Сумата на безкрайно намаляваща геометрична прогресия е $10\dfrac{2}{3}$, а сумата на първия и втория ѝ член е 8. Намерете прогресията.

Функции

25. Да се намери границата.

а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-x+5}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5}}{x^2-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3-\sqrt{x+9}}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{4x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$; з) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$.

26. Да се намери границата

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-2x}{2x^4-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x}}{\sqrt{5x}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x-1}-\sqrt{x})$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} (x-\sqrt{x})$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^5-3x}{x^5+2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^2+1}{3x}$

ж) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^3+1}{2x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{2x}{1-x}\right)$.

27. Да се намери границата.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{2x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin x}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x^2}$:

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$.

28. Да се намери границата.

а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$; б) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{2(x-a)}$; в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}a}{x-a}$.

29. Дадена е функцията $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{b-x^2}$. Да се намерят a и b, така че $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=3$.

30. В кои точки е непрекъсната и в кои точки е прекъсната функцията

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-1}{3}, & x\ge 0\\ \dfrac{x}{2x-3}, & x<0\end{cases}\quad ?$$

31. Да се определи a, така че функцията $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\sin 2x}{3x}, & x\ne 0\\ a+1, & x=0\end{cases}$ да е непрекъсната при $x=0$.

32. Да се намери производната на функцията.

а) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x^2+1}$;

б) $f(x)=\sqrt[3]{3x^2+6x+1}$;

в) $f(x)=\sin^3 3x$; г) $f(x)=\sqrt{1-\cos 2x}$; д) $f(x)=(1+\mathrm{tg}^2x)^3$.

33. Намерете:

а) $f'(1)$, ако $f(x)=x-\dfrac{\sqrt{x}}{4}+\dfrac{2}{5x}-\dfrac{x^6}{3}+8$;

б) $f'(1)$, ако $f(x)=\dfrac{12}{x^2}+0,25x^4-\dfrac{4}{x^4}+\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}-2$;

в) $f'(-1)$, ако $f(x)=(x^2-3x+1)(2x+3)$;

г) $f'(2)$, ако $f(x)=(x+2)\sqrt{2x-3}$;

д) $f'(-2)$, ако $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$;

е) $f'(0)$, ако $f(x)=\dfrac{1-x}{2+x^2}$;

ж) $f'(-5)$, ако $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x}+6-\dfrac{4}{x}$;

з) $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, ако $f(x)=\sin 2x-2\mathrm{cotg}x$;

и) $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, ако $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\cos x+1}$.

Отговори

I. Вектори и координати

1.1. Линейна зависимост и независимост на вектори в равнината и пространството........5

1. А) да; Б) да; В) да; Г) не; **2.** $\overrightarrow{AM}=-\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2}$; $\overrightarrow{BN}=\frac{\vec{a}}{2}-\vec{b}$; $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$; $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$;
3. $\overrightarrow{OC}=2\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$; $\overrightarrow{MN}=\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$; $\overrightarrow{PB}=-\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$; **4.** $\vec{m}=-\frac{3}{2}\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{n}=\frac{9}{2}\vec{a}-4\vec{b}$; **5.** $\lambda=-\frac{2}{3}$;
6. $\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}$; **7.** $\vec{c}=\vec{f}-\vec{g}$; **8.** $x=1$; $y=0$; **9.** $x=2$, $y=1$, $z=3$; **10.** $x=-1$, $y=-1$, $z=2$;

1.2. Векторна база в равнината и в пространството 9

1. $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{OD}=\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{OF}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{OM}=-\vec{a}-\vec{b}$; $\overrightarrow{ON}=-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{OP}=-\vec{a}+\vec{b}$;
$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\vec{a}-\vec{b}$; **2.** $\overrightarrow{DN}=2\vec{a}-\vec{b}$; $\overrightarrow{MC}=2\vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{PM}=-\vec{a}-2\vec{b}$; $\overrightarrow{BQ}=-2\vec{a}+2\vec{b}$; $\overrightarrow{DP}=2\vec{a}+\vec{b}$;
$\overrightarrow{CD}=-3\vec{a}$; $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$; **3.** а) В; б) Нека $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$, тогава $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$,
$\overrightarrow{BD_1}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{DC_1}=\vec{a}+\vec{c}$, $\overrightarrow{C_1C}=-\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC_1}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{C_1B_1}=-\vec{b}$; **4.** а) $4\vec{a}-\vec{b}$;
б) $\frac{1}{6}\vec{a}+3\vec{b}$; в) $-12\vec{a}+7\vec{b}$; **5.** а) $\vec{m}+\vec{n}=\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$; б) $\vec{m}+\vec{n}=3\vec{a}-2\vec{b}-2\vec{c}$; в) $\vec{m}+\vec{n}=-2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$;
г) $\vec{m}+\vec{n}=-\vec{a}-\vec{b}-3\vec{c}$; **6.** $\overrightarrow{CM}=-\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AC}=3\vec{a}-2\vec{b}$, $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AC}=-8\vec{a}+4\vec{b}$;
7. $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}$, $\overrightarrow{BD}=-2\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}=2\vec{a}-2\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=-4\vec{a}$; **8.** $\overrightarrow{AC}=2\vec{a}+\vec{b}$,
$\overrightarrow{AC_1}=2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+3\vec{b}$, $\overrightarrow{D_1M}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$; **9.** В; **10.** $\vec{v}=2\vec{a}-3\vec{b}-\vec{c}$;

1.3. Скаларно произведение на два вектора. Приложение 11

2. а) 6; 8; б) 10; в) 36; г) 19; д) −5; е) −17;
6. а) $\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{2}$; в) 30; г) $-\frac{9}{16}$; **7.** а) 45°; б) $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=-\frac{5}{6}$; **8.** а) $|\vec{u}|=\sqrt{2}$, $|\vec{v}|=\sqrt{10}$, $\vec{u}\vec{v}=2$ и
$\cos\angle(\vec{u},\vec{v})=\frac{\sqrt{5}}{5}$; б) $|\vec{u}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $|\vec{v}|=\sqrt{13}$, $\vec{u}\vec{v}=-4$ и $\cos\angle(\vec{u},\vec{v})=\frac{-8\sqrt{65}}{65}$; в) $|\vec{u}|=\frac{2}{3}\sqrt{10}$,
$|\vec{v}|=\frac{\sqrt{37}}{3}$, $\vec{u}\vec{v}=\frac{-34}{9}$ и $\cos\angle(\vec{u},\vec{v})=\frac{-17\sqrt{370}}{370}$; **9.** а) $|\vec{u}|=\sqrt{11}$, $|\vec{v}|=\sqrt{6}$, $\vec{u}\vec{v}=6$ и
$\cos\angle(\vec{u},\vec{v})=\frac{\sqrt{66}}{11}$; б) $|\vec{u}|=\sqrt{5}$, $|\vec{v}|=3$, $\vec{u}\vec{v}=4$ и $\cos\angle(\vec{u},\vec{v})=\frac{4\sqrt{5}}{15}$; **10.** а) $\cos\angle(\vec{u},\vec{v})=\frac{-\sqrt{14}}{7}$;
б) $\cos\angle(\vec{u},\vec{v})=\frac{6\sqrt{154}}{77}$; в) $\cos\angle(\vec{u},\vec{v})=-\frac{5\sqrt{2}}{8}$; **11.** Б; **12.** 20; **13.** $\sqrt{41}$; **14.** $2\sqrt{2}$; **15.** $|\vec{m}|=2\sqrt{3}$,
$|\vec{n}|=2\sqrt{3}$;

1.4. Координати на вектор в равнинна правоъгълна координатна система 14

3. а) $\overrightarrow{AB}(2,2)$; б) $\overrightarrow{AB}(6,16)$; в) $\overrightarrow{AB}(-7,10)$; г) $\overrightarrow{AB}(-6,-7)$; **4.** $\overrightarrow{AB}(-3,-4)$; $\overrightarrow{CA}(-4,-7)$;
$\overrightarrow{BD}(-6,15)$; $\overrightarrow{DB}(6,-15)$; $\overrightarrow{AD}(-9,11)$; $\overrightarrow{DC}(13,-4)$; **5.** а) $B(4,-1)$; б) $A(3,0)$; **6.** $B(3,2)$;
$C(-4,5)$; $\overrightarrow{BC}(-7,3)$;

1.5. Операции с вектори, зададени с координати 16

4. $(2,-3)$, $(-6,9)$, $(-4,16)$, $(-1,-1)$, $(-3,7)$, $(-7,18)$; **5.** а) $(8,3)$; б) $(3,9)$; в) $(-2,-4)$; **6.** $\vec{u}(8,8)$,
$\vec{v}(14,14)$; **7.** $\vec{m}(1-\alpha,-\alpha-3)$, $\vec{n}(\alpha+5,3-2\alpha)$; $\vec{p}(-2x,\alpha x)$; **8.** $\vec{m}(-6,6)$; $\vec{p}=(2,5)$; $\vec{u}(-6,5;10)$;

9. $(-21,-42)$; **10.** $\vec{a}=\vec{b}=\vec{c}=\vec{d}=\sqrt{13}$; **11.** а) $2\sqrt{5}$; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{17}$; **12.** а) 1; б) 17; в) -5; **13.** а) $-\frac{4}{5}$; б) 1; в) $-\frac{3}{5}$; **14.** $2\sqrt{13}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{82}$; **15.** 4; **16.** $21\sqrt{10}$; **17.** 5; $\sqrt{13}$; $\sqrt{26}$; $\cos\angle A=\frac{6\sqrt{13}}{65}$; **18.** $\sqrt{41}$**;** $\sqrt{26}$**;** $\sqrt{17}$**; 19.** $A(-2,0)$; $\sqrt{26}$; $4\sqrt{2}$; **20.** $C(9,1)$; $D(4,4)$; $2\sqrt{17}$; $2\sqrt{5}$;

Вектори и координати – Тест 1 и Тест 2 19

Тест 1. **1**Г; **2**В; **3**Б; **4**(а(-4); б($\sqrt{14}$); в($\sqrt{2}$); г($-\frac{2\sqrt{7}}{7}$)); **5**Г; **6**Г; **7**(а(26); б($2\sqrt{7}$); в($2\sqrt{7}$); г($\frac{13}{14}$)); **8**(а$(0,2)$; б$(-8,12)$; в$(-5,0)$; г$(6,-2)$).

Оценяване. За всеки верен отговор по 2 точки. Оценка в точки =(получените точки.100/34).

Тест 2. **1**Б; **2**А; **3**(а($\sqrt{7-2\sqrt{3}}$); б($8+\frac{\sqrt{3}}{2}$)); **4**Г; **5**Б; **6**В; **7**Б; **8**(а(10); б(5); в($\sqrt{5}$); г($\frac{2\sqrt{5}}{5}$)).

Оценяване. За всеки верен отговор по 2 точки. Оценка в точки =(получените точки.100/24).

II. Аналитична геометрия в равнината

2.1. Уравнение на права 21

1. Г; **2.** б) $3x-y=0$; в) $x-2y+1=0$; г) $y=1$; д) $x=3$;

6. а) $2x+3y-2=0$; б) $x-6y+11=0$; в) $y=2$; г) $x=-1$; д) $x-2y=0$; е) $5x+2y=0$;

7. а) $3x+y-5=0$; б) $2x-5y+9=0$; в) $x=-4$; г) $y=3$; д) $2x+5y-10=0$; е) $x-y-3=0$;

8. а) $y=-3x+5$; б) $y=\frac{x}{2}+2$; в) $y=-\frac{2x}{3}+4$; г) $y=5x-12$; д) $y=-4x-5$;

9. а) $\sqrt{3}x-3y-9=0$; б) $x-y-3=0$; в) $\sqrt{3}x-y+3\sqrt{3}+1=0$; г) $\sqrt{3}x+y-2(1+\sqrt{3})=0$; д) $x+y+1=0$; е) $\sqrt{3}x+3y-3-\sqrt{3}=0$; ж) $y=-3$;

10В; **11**Б; **12**А; **13**Г; **16**Г; **17**А; **18**В; **19**Б; **20**Б; **21**В;

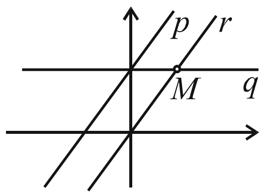
2.2. Взаимно положение на две прави 26

4. а) Правите се пресичат в $\left(-\frac{4}{3},\frac{13}{3}\right)$, $\cos\varphi=\frac{7\sqrt{85}}{85}$; б) Правите са перпендикулярни, пресичат се в $\left(\frac{2}{15},\frac{1}{15}\right)$; $\varphi=\frac{\pi}{2}$; в) Правите са успоредни; г) Правите се пресичат в $(0,1)$, $\cos\varphi=\frac{13\sqrt{17}}{85}$;

5. а) $3x+2y-8=0$; б) $x+y-4=0$; в) $5x+4y-2=0$; г) $4x+y-5=0$; д) $x-2y-1=0$;

6. а) $3x+4y-7=0$; б) $-4x+2y+3=0$; в) $4x-y-2=0$; **7.** а) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$; б) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; в) $\frac{9\sqrt{10}}{10}$;

8Б; **9** а) 5; б) $2\sqrt{10}$; **10** б)$M(b/a;b)$; **11.** а) $10x-12y+39=0$; Упътване. Търсената права е с уравнение $5x-6y+C=0$ и минава през точка A; б) $6x-4y+17=0$; **12.** а) $21x-15y-191=0$; б) $3y+13=0$; в) $x-6=0$;



2.3. Приложение на векторите в аналитичната геометрия за решаване на триъгълник... 30

1. а) $G(\frac{1}{3};1)$; б) $M_a(1;2)$; $M_b(-\frac{3}{2};1)$; $M_c(\frac{3}{2};0)$; в) $a:\ x+3y-7=0$; $b:\ 4x+y+5=0$; $c:\ 2x-5y-3=0$; г) $m_a:\ 3x-2y+1=0$; $m_b:\ y=1$; $m_c:\ 6x+7y-9=0$; д) $h_a:\ 3x-y+2=0$; $h_b:\ x-4y=0$; $h_c:\ 5x+2y+4=0$; е) $H_a(\frac{1}{10};\frac{23}{10})$; $H_b(-\frac{20}{17};-\frac{5}{17})$; $H_c(-\frac{14}{29};-\frac{23}{29})$; ж) $P_{ABC}=\sqrt{29}+2\sqrt{10}+\sqrt{17}$; з) $S_{ABC}=11$; **2.** а) $G\left(5;1\frac{1}{3}\right)$; б) $M_a(6,5;1,5)$; $M_b(3,5;1,5)$;

$M_c(5;1)$; в) $a:\ x+3y-11=0$; $b:\ x-3y+1=0$; $c:\ y=1$; г) $m_a:\ x-9y+7=0$; $m_b:\ x+9y-17=0$; $m_c:\ x=5$; д) $h_a:\ 3x-y-5=0$; $h_b:\ 3x+y-25=0$; $h_c:\ x=5$; е) $H_a\left(\frac{13}{5};\frac{14}{5}\right)$; $H_b\left(\frac{37}{5};\frac{14}{5}\right)$; $H_c(5;1)$; ж) $P=6+2\sqrt{10}$; з) $S=3$; **3.** $A(-2;5)$, $B(1;-3)$, $C(8;-17)$, $D(5;-9)$; **4.** $x-2y+20=0$ и $x+y-1=0$; **5.** $A(9,5)$, $B(3,3)$, $C(1,-3)$, $D(7,-1)$; **6.** $A(1,3)$, $B\left(-\frac{56}{13},\frac{81}{13}\right)$, $C(-2,12)$, $D\left(\frac{43}{13},\frac{114}{13}\right)$; **7.** $13x-5y+41=0$, $\frac{1681}{130}$; **8.** $3x+4y-34=0$, $3x+4y-59=0$; **9.** $4\sqrt{2}$;

3. а) $(2x+3)^2+(2y+3)^2=2$; б) $(2x+5)^2+(2y+4)^2=5$; в) $x^2+y^2=8$; **4.** а) нямат общи точки; б) нямат общи точки; в) $\left(-\frac{1}{2},0\right)$; **5.** а) Уравнението на окръжността е $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ с център $(1,1)$ и радиус $R=1$; б) Ox и Oy са допирателни към окръжността съответно в точките $(1,0)$ и $(0,1)$; **6.** Упътване. Отделете точен квадрат за x и за y. Уравнението е $(x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2$. Центърът е $\left(-1,\frac{3}{2}\right)$, радиусът е $R=\frac{\sqrt{41}}{2}$. **7.** $(x+2)^2+(y+1)^2=25$; **8.** $(x-3)^2+(y+2)^2=2$; **9.** а) $x^2+y^2+3x-4y=0$ или $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}$; б) $N(0;0)$, $P(0;4)$;

1. А2; Б3; В4; Г1; **2.** А) елипса; Б) хипербола; В) парабола; Г) окръжност;

Тест 1. **1**Г; **2**($2x+3y-11=0$); **3**(а($y=2$); б($x=3$); в($3x-y-13=0$)); **4**Г; **5**В; **6**Г; **7**Г; **8**А; **9**В; **10**($\sqrt{13}+\sqrt{34}+\sqrt{29}$).

Оценяване. За всеки верен отговор по 2 точки. Оценка в точки =(получените точки.100/24).

Тест 2. **1**А; **2**($x+y-1=0$); **3** (а($x=4$); б($y=-3$); в($2x+y-3=0$)); **4**Г; **5**Б; **6**В; **7**А; **8**Б; **9**Г; **10**($\sqrt{37}+3\sqrt{2}+\sqrt{13}$).

Оценяване. За всеки верен отговор по 2 точки. Оценка в точки =(получените точки.100/24).

III. Стереометрия

1. а-9;б-3; в-1; г-11; д-12; е-2; ж-5; з- без твърдение; и-6; к-14; л-13; Твърдения без чертеж: 4; 7; 8; 10; 15;

1. а-5; б-7; в-8; г-6; д-1; Твърдения без чертеж: 2; 3; 4; **10.** а) $\frac{20a^3}{3}$; $8a^2\sqrt{5}$; б) $\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}$; **11.** $V=\frac{b^3}{3}\cos^2\alpha\sqrt{1-2\cos^2\alpha}$;

2. $60°$; **3.** $\sqrt{5}$; **4.** $\mathrm{tg}\varphi=\frac{2\sqrt{3}}{3}$; **5.** $\sin\varphi=\frac{3\sqrt{3}}{10}$; **6.** $V=\frac{a^3\mathrm{tg}\beta\cos\alpha}{48\sin^2\alpha}$; **7.** $\mathrm{tg}\varphi=\frac{7\sqrt{5}}{5}$; **8.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$; **9.** а) $\mathrm{tg}\varphi=\sqrt{2}$; б) 27;

1. $30°$; **2.** $\dfrac{4a}{3}$; **3.** $\dfrac{18\sqrt{13}}{13}$; **4.** $90°$; $\angle CBM$; **5.** $90°$; $\angle MC_1C$, където $CC_1 \perp AB$, в равнината на основата; **6.** $90°$; $\angle CC_1M$, където $C_1 \in AB$, $CC_1 \perp AB$ в равнината на основата; **7.** $\angle ONM$, където $ON \perp AB$, $N \in AB$; **8.** $S_1 = \dfrac{a^2(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha}$;

2. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; **3.** $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$; **4.** $a^2(3+\sqrt{3})$; **5.** $45°$; **6.** $\dfrac{35\sqrt{47}}{6}$ cm^3; $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{141}}{21}$; **7.** $96\sqrt{3}$ cm^3; $120\sqrt{3}$ cm^2; **8.** $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$; **9.** $S = a^2\sqrt{2\operatorname{tg}^2\alpha+1}$; $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}{6}$; **10.** $8a^3$; **11.** $\dfrac{\sqrt{34}}{4}$; **12.** $\dfrac{5}{7}$;

2. а) $h = \sqrt{k^2 - \dfrac{(a-b)^2}{4}}$; $S_1 = 2(a+b)k + a^2 + b^2$; $V = \dfrac{1}{3}\sqrt{k^2 - \dfrac{(a-b)^2}{4}}(a^2+b^2+ab)$; б) 4; 210; 156; в) 1; $12\sqrt{2}+20$; $\dfrac{28}{3}$; **4.** а) 4 cm; $\dfrac{19\sqrt{3}}{2}$ cm^3; б) $\sqrt{21}$ cm; $21\sqrt{3}$ cm^3; **5.** 4 cm; 12 cm^3; **6.** а) $V = \dfrac{h\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+ab)$; б) $V = \dfrac{h}{3}(a^2+b^2+ab)$; **5.** а) $\dfrac{4}{3}$ или $\dfrac{3}{4}$; б) $\dfrac{1}{6}$ или $\dfrac{6}{1}$; **8**А; **9**А; **10**В; **11**Г; **12**Г;

6. а) петоъгълник; б) правилен шестоъгълник; в) правоъгълник; г) равнобедрен триъгълник; **10.** а) успоредник; б) $V_1 = 12$ cm^3; $V_2 = 12(2\sqrt{3}-1)$ cm^3; **11.** $12\sqrt{39}$ cm^3; $5\sqrt{39}$ cm^2; $3\sqrt{55}$ cm^2; **12.** 21 cm^2; **13.** $V = \dfrac{ab}{12}\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{tg}\alpha$; **14.** $\dfrac{3\sqrt{2}\,Q}{8}$; **15.** 36 cm^3; **16.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$; **17.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$; **18.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$; $\dfrac{45a^2}{8}$; **19.** 1:1; **20.** правоъгълник; $\dfrac{\sqrt{13}a^2}{3}$; **21.** равнобедрен трапец; $\dfrac{5\sqrt{19}a^2}{18}$;

2. а) $d(AA_1, BC_1) = AB = a$; б) $d(AA_1, BD) = AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, където $O = AC \cap BD$; в) $d(AA_1, BD_1) = d(AA_1, BB_1D_1D) = AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ където $O = AC \cap BD$; г) $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$; д) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; **4.** $\dfrac{a\sqrt{3b^2-a^2}}{2b}$; **5.** Оста-отсечка е OP, където $O = AC \cap BD$ и $OP \perp AM$, $P \in AM$; $OP = a\sin\alpha\cos\alpha$, **6.** $a\cos\alpha$;

7. Оста-отсечка е OC, където $O = AC \cap BD$; $OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; **8.** Оста отсечка е OP, където $O = AC \cap BD$ и P е петата на перпендикуляра от O към AM; $OP = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$; **9.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$; **10.** $V = \dfrac{2m^3\sqrt{3}}{27\cos\alpha\sin^2\alpha}$; **11.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$;

2. 48π; 80π; 96π или 48π; 66π; 72π; **3.** $2\pi r^2(2\sqrt{3}+1)$, $2\pi r^3\sqrt{3}$; б) $6\pi r^2$, $2\pi r^3$; **4.** а) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; **5.** $A\pi + \dfrac{8W^2}{A^2\pi}$; **6.** $2\sqrt{r^2-d^2}.h$; **7.** 3 cm^2; **8.** а) $\sqrt{4r^2+h^2}$; б) $\sqrt{4r^2-4d^2+h^2}$; **9.** $30°$;

10. $1:1$; **11.** $30°$ или $90°$; **12.** $\frac{1}{4\pi^2}$; **13.** 2; 4; **14.** а) 15π cm^2; б) 24π cm^2; в) 12π cm^3; **15.** $\frac{l^3\pi}{8}$; **16.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

17. 96π; **18.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$ cm^3; **19.** $\frac{a\sqrt{4r^2-a^2}}{4S}$; **20.** $V=\frac{\pi r^2 b}{3}$; **21.** $\frac{7S}{36}$; **22.** $60°$; **23.** 12; **24.** $\frac{1}{5}$;

25. а) 49π cm^2; б) 74π cm^2; в) $\frac{148\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3; **26.** а) 2040πcm^2; 4290πcm^2; 15600 cm^3;

б) 10πcm^2; 20πcm^2; $\frac{13\pi}{2}$ cm^3; **27.** 231 cm^3; **28.** а) 36π cm^2; б) $21\sqrt{7}\pi$ cm^3; **29.** а) 196π; $\frac{1372}{3}\pi$;

б) 2π; $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$; **30.** $8\sqrt{6}\pi$ cm^3; **31.** $R=\sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}\approx 1,42$ dm; $S=12\sqrt[3]{3\pi}\approx 25,35$ dm^2; **32.** $\sqrt{R^2-d^2}$;

33. $\sqrt{15}\pi$; **34.** $9:25$; **35.** $2\sqrt{2}:3$; **36.** а) 20 cm; б) 141π cm^2; **37.** $166\frac{2}{3}\pi$ cm^3; **38.** а) 11; б) 5; в) 4;

г) 21; д) 3;

Тест 1. **1**В; **2**Б; **3**Б; **4**А; **5**Б; **6**Г; **7**В;

Оценяване. За всеки верен отговор по 2 точки. Оценка в точки =(получените точки.100/14).

Тест 2. **1**Г; **2**Г; **3**А; **4**В; **5**Б; **6**Б; **7**Г;

Оценяване. За всеки верен отговор по 2 точки. Оценка в точки =(получените точки.100/14).

1. Диагоналите на успоредник са перпендикулярни точно когато е ромб;

2. $\lambda=2$; **4** $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\pm\frac{\sqrt{69}}{12}$; **5.** а) 3; б) $-2\sqrt{2}$; в) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$; г) 49; **6.** а) $60°$; б) $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{3}{4}$;

7. а) 14; б) 4; в) 6; г) 19 или $2\sqrt{61}$; **8.** а) $\sqrt{9-2\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{10}$; в) $\sqrt{26+12\sqrt{2}}$; **9.** а) $\sqrt{42}$; б) $\sqrt{51}$;

в) $\sqrt{15}$; **10.** а) $\frac{5\sqrt{2}}{8}$; б) $\frac{5\sqrt{22}}{44}$; в) $\frac{2\sqrt{26}}{13}$; **11.** В; **12.** А; **13** $\sqrt{15}$; **14.** а) -3; б) 1 и $\sqrt{13}$; в) $\frac{-3\sqrt{13}}{13}$;

15. а) $M(3,5;1,5)$; б) $B(-2,9)$; **16.** а) $(-1;-2)$; б) $(7;-1)$; в) $(0;-7,5)$; **17.** а) $\vec{p}(2;3)$; б) $k=\frac{3}{2}$;

18. $\vec{p}(1;2)$; **19.** $\frac{1}{4}$; $y=\frac{1}{4}x+2$; $x-4y+8=0$; **20** а) $M(-10;-6)$ или $M\left(2;-\frac{6}{5}\right)$; б) $M(-3;-2)$

или $M(21;-14)$; **21**Г; **22**А; **23.** а) $\left(1;\frac{3}{2}\right)$, $\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) правите съвпадат; в) $(0;1)$, $\cos\varphi=\frac{2\sqrt{85}}{85}$;

г) $(3;-1)$, $\cos\varphi=\frac{9\sqrt{130}}{130}$; **24.** $2\sqrt{5}$; **25.** $B(-7;4)$;

26. а) $G\left(2;\frac{2}{3}\right)$; б) $M_a\left(4;\frac{1}{2}\right)$; $M_b\left(0;\frac{5}{2}\right)$; $M_c(2;-1)$; в) $a:\ 7x+4y-30=0$; $b:\ 3x-4y+10=0$;

$c:\ x+2y=0$; г) $m_a:\ x+12y-10=0$; $m_b:\ 11x+12y-30=0$; $m_c:\ x=2$;

д) $h_a:\ 4x-7y+15=0$; $h_b:\ 4x+3y-15=0$; $h_c:\ 2x-y=0$; е) $H_a\left(\frac{30}{13};\frac{45}{13}\right)$; $H_b\left(\frac{6}{5};\frac{17}{5}\right)$;

$H_c(0;0)$; ж) $P=5+4\sqrt{5}+\sqrt{65}$; з) $S=20$ ($|h_a|=\frac{8\sqrt{65}}{13}$, $|h_b|=8$, $|h_c|=2\sqrt{5}$);

27. $S_1=\frac{\pi a^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$; $V=\frac{\pi a^3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{6\cos^2\frac{\alpha}{2}}$; **28.** $S=2h^2\operatorname{tg}\alpha$; $V=\frac{4h^3\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3\cos\alpha}$;

29. $h=\sqrt{7}$ cm; $S=128$ cm^2; **30.** $S_1=\dfrac{6r^2\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)}{\cos\alpha}$; **31.** $\cos\beta=\operatorname{cotg}^2\dfrac{\alpha}{2}$; **32.** $\dfrac{4\pi}{9}$; $\dfrac{2}{3}$ m; 1 m;

33. $V=9{,}6\pi$ cm^3; $S=16{,}8\pi$ cm^2; **34.** $\sqrt{7}$; **35.** $V=\dfrac{4}{3}l^3\sin\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\dfrac{3\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}$; **36.** 504 cm^2;

37. $\dfrac{64\sqrt{3}h^3\operatorname{cotg}^2\alpha}{27}$; **38.** $\dfrac{16Q}{3}$; **39.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}\sin^2\alpha}{2\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)}$; **40.** $V=d^3\sin^2\beta\sqrt{\cos 2\beta}$; $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{2\cos 2\beta}}$;

41. $\dfrac{b^3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{cotg}\dfrac{\beta}{2}}{8\sin\dfrac{\beta}{2}}$; **42.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{384}$; **43.** $R=3\sqrt{\dfrac{S\sin\alpha}{5\pi}}$; $r=2\sqrt{\dfrac{S\sin\alpha}{5\pi}}$; **44.** $V=\dfrac{136\pi}{5}$ **cm**^{3}; $S=\dfrac{288\pi}{5}$ cm^2; **45.** $\sqrt[3]{\dfrac{6V}{\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}}$; **46.** $\dfrac{6\sqrt{6}h^2\operatorname{cotg}\alpha\sin(\alpha+45°)}{\sin\alpha}$; **47.** $V=\dfrac{a^3}{\sin\alpha}\sqrt{\cos 2\alpha}$;

48. $\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}\sqrt[3]{36V^2\operatorname{tg}\alpha}$; **49.** $\dfrac{\sqrt{2}S\,r\sin 2\alpha}{4\cos(45°-\alpha)}$; **50.** $V=\dfrac{\pi d^3\sqrt{3}}{32\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$; **51.** 2;

52. $\dfrac{3a^3}{8\sin\dfrac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}$; **53.** $\dfrac{c^3\sin^2 2\alpha\operatorname{tg}\beta}{24}$; **54.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$; $3\sqrt{3}a^2\operatorname{tg}\alpha$; **55.** $4r^3\sqrt{6}$;

Отговори

I. Полиноми на една променлива

4. а) x^2+2x+1; $2x+1$; б) x^2+3x-1; $x-2$; в) x^2+5x-6; 4; г) $x^4+2x^3-x^2+3x-2$; -2;
5. а) $Q(x)=3x^2-2x+2$; $R(x)=-x+3$; б) $Q(x)=2x^3-2x+3$; $R(x)=-3$; в) $Q(x)=x^4-x^2+x-1$; $R(x)=4$; г) $Q(x)=x^2+x-2$; $R(x)=x-2$; д) $Q(x)=x+5$; $R(x)=x^2-2x+1$; е) $Q(x)=5x-1$; $R(x)=1$; ж) $Q(x)=x^4+3x^2+2$; $R(x)=-2$; з) $Q(x)=x^4-2x+3$; $R(x)=-2x+3$; и) $Q(x)=3x^2+1$; $R(x)=0$; к) $Q(x)=2x^2+2$; $R(x)=x^2+x+1$; л) $Q(x)=2x^5+2x-1$; $R(x)=0$; **6.** а) $a=b=5$; б) $a=-1$; $b=1$; в) $a=2$; $b=3$;

5. а) 23; б) 140; в) 387; г) 269; д) 4285; е) 5099; ж) 572; з) 2276; и) 1682; к) 2350; л) 1002; м) 65291;
6. 32; 36; 146; 182; 462; 566; **7.** -42; 360; 48; 640; 0; $\frac{32}{27}$; **8.** 0; 0; 0; 240; 0; 0; **9.** 0; 0; 0; 60;
10. -4; 1; 2 и 3; **11.** а) 6; б) 38;

3. Корени са -3; -2; 1; **4.** Корени са -3 и 3; **5.** $(x-2)^3(x^2+2)$;

3. а) 2; 3; $\frac{1}{4}$; б) 3; $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{5}$; в) $-\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{5}$; г) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{5}$; д) 3; $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{5}$; е) $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; ж) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; з) -2; 1; 3; и) $x_{1,2,3}=1$; к) $x_{1,2}=-2$; $x_{3,4}=\pm\sqrt{3}$; л) $x_{1,2}=3$; $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; **4.** а) $x_{1,2}=2$; $x_{3,4,5}=3$; б) $x_{1,2,3,4,5,6}=-1$; в) $x_{1,2,3}=2$; $x_{4,5}=3$ г) $x_{1,2,3,4}=2$; д) $x_{1,2}=0$; $x_{3,4,5}=4$; е) $x_{1,2,3,4}=-1$;
5. а) $x_1=\frac{1}{2}$; $x_{2,3,4}=-2$; б) $x_1=-2$; $x_{2,3,4,5}=2$; в) $x_{1,2}=-2$; $x_{3,4}=\frac{1}{3}$; г) $x_1=-3$; $x_2=-2$; $x_3=-1$; $x_4=\frac{1}{2}$; д) $x_{1,2}=-\frac{1}{3}$; $x_3=1$; $x_{4,5}=2$; е) $x_{1,2}=-3$; $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$; $x_5=5$

1. $x_1=-1$, $x_{2,3}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$, $x_{4,5}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; **2.** $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$; **3.** $x_{1,2}=1$; **4.** $x_{1,2,3}=-1$, $x_{4,5}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; **5.** $x_1=-1$, $x_{2,3}=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$; **6.** $x_1=-1$, $x_{2,3}=3\pm2\sqrt{2}$, $x_{4,5}=2\pm\sqrt{3}$; **7.** $x_{1,2}=1$, $x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$, $x_{5,6}=\frac{-7\pm3\sqrt{5}}{2}$; **8.** $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=\frac{2}{3}$; **12.** $x_1=-3$, $x_{2,3}=-1$, $x_{4,5}=1$; **13.** $x_{1,2}=-1$, $x_{3,4}=1$, $x_5=5$; **14.** $x_1=\frac{1}{2}$, $x_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$; **15.** $x_1=\frac{1}{3}$, $x_{2,3}=2\pm\sqrt{5}$; **16.** $x_{1,2}\pm3$, $x_3=-3$, $x_4=1$;
17. $x_1=-3$; $x_{2,3}=-2$, $x_4=2$; **18.** $x_1=2$, $x_2=3$; **19.** $x_1=-2$, $x_2=-3$; **20.** $x_1=7$, $x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$;
21. $x_1=-3$, $x_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$; **22.** $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,1)$; **23.** $x\in(-2,1)\cup(3,+\infty)$; **24.** $x\in(-3,-2)$;
25. $x\in(-\infty,-2)\cup\left(1-\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)\cup(1+\sqrt{3},+\infty)$; **26.** $x\in(-3,2)\cup(2,4)$;

27. $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (3, +\infty)$ **; 28.** $x \in (-\infty, 1-\sqrt{5}) \cup (1-\sqrt{2}, 1) \cup (1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{5})$;

29. $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $x_{3,4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$;

Полиноми на една променлива – Тест 1 и Тест 2 106

Тест 1. **1**Г; **2**(а(2); б(176); в(–184); г(–88)); **3**Б; **4** $(x-2)^2(x^2+x+1)$; **5**($x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{5}$); **6**($x_{1,2} = -1$; $x_{3,4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$);

Оценяване. За всеки верен отговор на задачи от 1 до 4 по 2 точки. Задачи 5 и 6 - за всеки вярно намерен корен по 2 точки. Оценка в точки =(получените точки.100/24).

Тест 2. **1**В; **2**(а(5); б(191); в(–151); г(–65)); **3**Г; **4** $(2x-1)(x+2)^2(x^2-x+1)$; **5**($x_1 = -3$; $x_2 = 2$; $x_{3,4} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$); **6**($x_{1,2} = -1$, $x_{3,4} = 1$);

Оценяване. За всеки верен отговор на задачи от 1 до 4 по 2 точки. Задачи 5 и 6 - за всеки вярно намерен корен по 2 точки. Оценка в точки =(получените точки.100/24).

II. Числови редици

2.1. Метод на математическата индукция 107

5. $n \geq 4$;

2.2. Нютонов бином 109

1. $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$;

$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$

2. 1680; **3.** 270; **4.** 21; **5.** –280; **6**В; **7**В; **8.** а) 8; б) 64; в) 0; г) 1;

2.3. Числови редици 112

4. а) не е монотонна; ограничена; б) растяща; ограничена; в) намаляваща; ограничена; г) намаляваща; ограничена;

5. а) намаляваща; б) намаляваща; в) растяща; г) намаляваща;

2.4. Теореми за граници на редици 115

2. а) $\dfrac{7}{3}$; б) $\dfrac{11}{4}$; в) 12; г) $\sqrt{2}-1$; **3.** а) $-\dfrac{2}{3}$; б) $\dfrac{4}{3}$; в) 4; г) $\dfrac{3-\sqrt{6}}{6}$; **4.** а) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; б) $-\sqrt{2}$; в) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$;

7. а) 0; б) 2; в) 1; г) $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$; **10.** $-\dfrac{1}{2}$; **11.** $\dfrac{5}{3}$; **12.** 0; **13.** $-\infty$; **14.** ∞; **15.** 1; **16.** ∞; **17.** 2; **18.** $\dfrac{1}{4}$;

19. $-\dfrac{1}{2}$; **20.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; **21.** –1; **22.** –4; **23.** $-\dfrac{3}{5}$; **24.** 2; **25.** $\dfrac{1}{12\sqrt{3}}$; **26.** $\dfrac{1}{8\sqrt{2}}$; **27.** ∞; **28.** 0; **29.** $\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{7}-2}$;

30. $\dfrac{13}{9}$

2.5. Сума на безкрайно намаляваща геометрична прогресия 123

1. а) 2; б) $\dfrac{9}{4}$; **2.** а) $3(\sqrt{3}+1)$; б) $2(\sqrt{2}+1)$; **3.** а) 15; б) $\dfrac{8}{21}$; в) $\dfrac{2}{3}$; г) 0,79; **4.** 0,5; **5.** 2; 0,5; **6.** $\dfrac{1}{3}$; **7.** 2;

Числови редици – Тест 1 и Тест 2 125

Тест 1. **1**Б; **2**В; **3**Г; **4**Г; **5**Г; **6**А; **7**В; **8(** ∞); **9**(–1).

Оценяване. За всеки верен отговор на задачи от 1 до 7 по 2 точки. Задача 8 (общо 8 точки) - за рационализиране 2 точки; за изнасяне на най-високата степен на n пред скоби от числителя и знаменателя по 2 точки; за отговор 2 точки. Задача 9 (общо 6 точки) - за изнасяне на най-високата степен на n пред скоби от числителя и знаменателя по 2 точки; за отговор 2 точки. Оценка в точки =(получените точки.100/28).

Тест 2. **1**В; **2**А; **3**В; **4**А; **5**В; **6**Б; **7**В; **8**($\frac{3}{2}$); **9**($-\sqrt{3}$);

Оценяване. За всеки верен отговор на задачи от 1 до 7 по 2 точки. Задача 8 (общо 6 точки) - за разлагане на числителя и знаменателя по 2 точки; за отговор 2 точки. Задача 9 (общо 4 точки) - за граничен преход 2 точки; за отговор 2 точки. Оценка в точки =(получените точки.100/24).

III. Функции. Непрекъснатост и диференцируемост

3. а) четна; б) четна; в) нито четна, нито нечетна; г) нито четна, нито нечетна;

1. а) $g(x)=\sin^2 x$, $x\in\mathbb{R}$; б) $g(x)=\log_a(2^x+\sqrt{x})$, $x\ge 0$; в) $g(x)=\dfrac{1}{\log_a x}$, $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$; г) $g(x)=\sin(2^{x^2})$, $x\in\mathbb{R}$; д) $g(x)=2^{\sin^2 x}$, $x\in\mathbb{R}$; е) $g(t)=\sqrt{5\sin t^2}$, за всички t, за които $\sin t^2\ge 0$;
2. а) $g(y)=y^2$, $y=2x+1$; б) $g(y)=\operatorname{tg} y$, $y=7x$; в) $g(y)=y^2$, $y=\cos z$, $z=\sqrt{x}$; г) $g(y)=\sqrt{y}$, $y=\cos z$, $z=3x$; д) $g(y)=\sqrt[3]{y}$, $y=1+z$, $z=\log_a t$, $t=2x$;

2. да; **3.** не; **4.** 3; **5.** $3-\sqrt{5}$;

1. а) $\frac{9}{11}$; б) 4; в) 1; г) $-\frac{1}{4}$; **2.** а) $\frac{2}{3}$; б) 3; в) $-\frac{12}{7}$; г) $\frac{4}{3}$; д) $\frac{1}{3}$; е) $\frac{1}{8}$; **5.** а) $\frac{2}{3}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $+\infty$; г) $+\infty$; д) $-\infty$; е) $-\infty$; ж) $+\infty$;
6. а) 0; б) 0; в) $+\infty$; г) $+\infty$; д) $\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$; е) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}$; ж) $-\frac{1}{3}$; з) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; **7.** а) $-\infty$; б) $+\infty$; в) $-\infty$; г) $-\infty$; д) $+\infty$; е) $+\infty$; ж) $-\infty$; **9.** а) -13; б) $\frac{7}{4}$; в) $-\frac{9}{20}$; **10.** а) $4+8\sqrt{2}$; б) $3+\frac{\sqrt{3}}{6}$; **11.** а) $\frac{5}{3}$; б) 0; **12.** а) $\frac{5}{6}$: б) $8+\frac{\sqrt{2}}{8}$; **13.** а) $\frac{5}{3}$; б) $\frac{5}{4}$; в) $-\frac{3}{2}$; **14.** а) $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$; б) 3; в) $\frac{2}{3}$; **15.** а) $-\frac{4+\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{1}{2}$;

2. а) 2; б) 1; в) $\frac{2}{3}$; г) 1; **3.** а) 1; б) 6; в) $\frac{1}{10}$; г) $\frac{1}{2}$; **4.** а) $\frac{\alpha}{\beta}$; б) α; в) $\frac{\alpha}{\beta}$; г) α^2; **5.** а) $\frac{1}{2}$; б) 4; в) $\frac{75}{2}$; г) $\frac{1}{2}$; **6.** а) 1; б) 4; в) $\frac{1}{9}$; г) 27; **7.** а) 4; б) $\frac{\sqrt{2}-4}{2}$; **8.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{27}{2}$; **9.** а) $\frac{1}{10}$; б) $\frac{1}{32}$; в) 1; **10.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{8}$;

2. $a=3$; **3.** $\pm\sqrt{2}$; **4.** а) непрекъсната за всяко x; б) прекъсната при $x=0$; в) прекъсната при $x=1$;
5. Дефинираме $g(2)=4$ и $g(x)=f(x)$ при $x\neq 2$; **6.** няма такива стойности; **7.** $f(1)=f(2)=0$;
8. а) При $x=3$ е прекъсната; б) Непрекъсната за всяко x; в) При $x=3$ е прекъсната; **9.** 0;

2. а) Има корен в $(-1,\ 0)$; б) Има корен в $(0,\ 1)$;**4.** Има корени в $(0,1)$ и $(2,3)$; **6.** Има корени в $(1,2)$ и $(2,16)$; **8.** Има корен в $(1,2)$; **10.** Между 2 и 4; **11**В; **12**Г; **13**А; **14**А;

2. а) $0;\ 1;\ 2x;\ 3x^2;\ 4x^3;\ 5x^4$; б) $\frac{1}{2\sqrt{x}};\ \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};\ \frac{3\sqrt{x}}{2};\ \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$; в) $-\frac{1}{x^2};\ -\frac{2}{x^3};\ -\frac{3}{x^4};\ -\frac{4}{x^5}$;

г) $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}};\ -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}};\ -\frac{3}{2\sqrt{x^5}};\ -\frac{3}{5\sqrt[5]{x^8}}$; д) $3;\ x;\ x^2;\ x^3$; е) $\frac{1}{\sqrt{x}};\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}};\ \frac{9\sqrt{x}}{4};\ 25\sqrt[3]{x^2}$; ж) $-\frac{1}{2x^2}$;

$-\frac{2}{x^2};\ -\frac{1}{x^3};\ -\frac{4}{3x^3}$; з) $-\frac{1}{\sqrt{x^3}};\ -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}};\ -\frac{1}{\sqrt{x^5}};\ -\frac{18}{25\sqrt[5]{x^8}}$; и) $\cos x;\ -\sin x;\ \frac{1}{\cos^2 x};\ -\frac{1}{\sin^2 x}$;

к) $3\cos x;\ 2\sin x;\ -\frac{1}{\cos^2 x};\ -\frac{5}{\sin^2 x}$; л) $-\cos x;\ -7\sin x;\ \frac{5}{\cos^2 x};\ \frac{2}{\sin^2 x}$.

4. а) 2; б) $2x+2$; в) $15x^2+2$; г) $12x^3-6x^2+8$; д) $x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$; е) $-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-1$; ж) $\frac{9\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

з) $2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}+1$; **5.** а) $-\frac{1}{x^2}-2x$; б) $9x^2-\frac{2}{x^3}+2$; в) $4x+\frac{9}{x^4}$; г) $\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{4}{x^5}$; **6.** а) $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$;

б) $-\frac{3}{2\sqrt{x^5}}-4x^3$; в) $-\frac{3}{2\sqrt{x^3}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; г) $\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{2\sqrt[4]{x^7}}$; **7.** а) $\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}$; б) $2\cos x-\sin x$;

в) $\frac{4}{\sin^2 2x}$; г) $-\sin x-3\cos x$;

9. а) $\sin x+x\cos x$; б) $4x\cos x-2x^2\sin x$; в) $2x\mathrm{tg}x+\frac{1+x^2}{\cos^2 x}$; г) $\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}+(\sqrt{x}+3)\cos x$;

10. а) $\cos 2x$; б) $4\cos x$; в) 0; г) $\sin x+\frac{\sin x}{\cos^2 x}$; **11.** а) $\frac{3\sqrt{x}}{2}$; б) $4x-3$; в) $\frac{5\sqrt{x^3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{x}}$;

г) $8x^3-9x^2-12x$; **12.** а) $15x^2-\mathrm{tg}x-\frac{x}{\cos^2 x}$; б) $\frac{1}{2\sqrt{x}}-2x\cos x+x^2\sin x$;

в) $-\frac{4}{\sin^2 x}-2\mathrm{tg}x-\frac{2x}{\cos^2 x}$; г) $3x^2\cos x-x^3\sin x+3\sin x$; **14.** а) $\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$; б) $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$;

в) $\frac{2x\cos x+x^2\sin x}{\cos^2 x}$; г) $\frac{\cos x+2x\sin x}{2\sqrt{x}\cos^2 x}$; **15.** а) $-\sin x$; б) $-\frac{3}{2\sin^2 x}$; в) $-\frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x}$;

г) $-\frac{(1+\sin^2 x)\cos x}{\sin^2 x}$; **16.** а) $\frac{3}{2}\sqrt{x}\sin x+\sqrt{x^3}\cos x$; б) $\frac{\sin x(\sin x\cos x+x\cos^2 x+x)}{\cos^2 x}$;

в) $\frac{3x^3-4x-10}{x^3}$; г) $\frac{(3x^2-6x+1)\sin x-(x^3-3x^2+x-3)\cos x}{\sin^2 x}$; **17.** а) $\frac{1}{2}x^2\cos x+\cos x-2\sin x$;

б) $3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}+1$; **18.** а) $\frac{4x\cos 2x-\sin 2x}{4x\sqrt{x}}$; б) $\frac{(-x^4-x^2+2x)\sin x+(x^4+x^2+2x)\cos x}{(x^2+1)^2}$;

в) $\frac{1+\cos 2x\cos^2 x}{\sin^3 x\cos^2 x}$; г) $\frac{(x^2+2x+2)\sin x+(x^2+2x-2)\cos x}{(x+2)^2}$;

20. а) $50x+10$; б) $2x+4$; в) $3(x^2+x)^2(2x+1)$; г) $4(4x^3-x^2-2)^3(12x^2-2x)$; **21.** а) $3\sin^2 x\cos x$;

б) $-4\cos^3 x\sin x$; в) $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$; г) $-\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$; **22.** а) $2\cos 2x$; б) $2x\cos x^2$; в) $-3\sin(3x+1)$;

г) $-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; **23.** а) $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$; б) $\frac{3}{2}\sqrt{\sin x}\cos x$; в) $\frac{1}{2\cos^2 x\sqrt{\mathrm{tg}x}}$; г) $\frac{3\sqrt{\mathrm{tg}x}}{2\cos^2 x}$; **24.** а) $\frac{3x^2-3}{2\sqrt{x^3-3x}}$;

б) $-\frac{2x^3}{\sqrt{(x^4-5)^3}}$; в) $\frac{3-18x}{(3x^2-x)^4}$; г) $\frac{8x^3}{(x^4+2)^2}$; **26.** а) $15\sin^2 5x\cos 5x$; б) $3\sin 6x$; в) $-3x^2\sin(2x^3)$;

г) $-15(6x-1)\sin(3x^2-x)\cos^2(3x^2-x)$; **27.** а) $\dfrac{3\sin^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cos^4\sqrt{x}}$; б) $\dfrac{2x\cos x^2}{\cos^2(\sin x^2)}$; в) $\dfrac{-15\sin(10x-2)}{4\sqrt{\cos(5x-1)}}$;

г) $\dfrac{6\operatorname{cotg}^2(\cos^2 2x)\sin 4x}{\sin^2(\cos^2 2x)}$;

28. а) $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}-4x$; б) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-9x^2$; в) $\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$; г) $\dfrac{1}{(2x+1)^2}$; **29.** а) $5x\sqrt{3x}-\dfrac{3}{2}\sqrt{3x}-18x^2+6x$;

б) $\dfrac{15}{2}x\sqrt{2x}-\dfrac{3}{2}\sqrt{2x}-18x^2+4x$; в) $40x^3+7x^2\sqrt{5x}-\dfrac{\sqrt{5x}}{2x}-5$; **30.** а) $\cos 2x\cos x$; б) $2\sin 2x\cos x$;

в) $\sin 5x\sin 3x$; г) $3\cos 6x\sin 3x$; **31.** а) $\sin^2 x\cos^3 x$; б) $\sin^3 x\cos^3 x$; в) $\cos^3 x$; **32.** а) $\sin 8x$;

б) $3\operatorname{tg}^4(x-1)+\operatorname{tg}^3(x-1)\sin(2x-2)$; **33.** а) $\dfrac{-(2+\sin^2 x)\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$; б) $\dfrac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}$; в) $\dfrac{\sin x+x}{1+\cos x}$;

34. а) $\dfrac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}$; б) $\left(\cos x+\sqrt{\sin x}\right)^2$; **35.** а) $\dfrac{1}{2}\sin 2x$; б) $x\sin 2x$; в) $\dfrac{1}{\cos^4 x}$; **36.** а) $\dfrac{\cos^4 x}{\sin^8 x}$; б) $\operatorname{tg}^4 x$;

37. а) $\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x^2-1}}$; б) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{2x(x+1)}}$; в) $\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; г) $\dfrac{3\sqrt[3]{x^2}+1}{6\sqrt[3]{x^2}\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}$;

38. а) $(x^2+3x+5)\cos 2x$; б) $4x^3\sin^2 x$.

3.9. Връзка между непрекъснатост и диференцируемост 150

1. Да; **2.** $a=2$; **3.** Да; **4.** Не; **5.** $a=-1$; **6.** Да; **7.** Да; **8.** Да; **9.** Не; **10.** Да; **11.** $a=1$; $b=3$;

Функции. Непрекъснатост и диференцируемост – Тест 1 и Тест 2.....................................152

Тест 1.

1В; **2**Б; **3**Б; **4**Б; **5**Г; **6**Г; **7**Г; **8**Г; **9**(а($\dfrac{5}{2\sqrt{x}}-4x-\dfrac{8}{x^3}$); б($2x\sin x+x^2\cos x$); в($-\dfrac{2x\sin x+8\cos x}{x^5}$);

г($\dfrac{3x^2\sin 2x-2x^3}{2\sin^2 x}$); д($-6x\sin x^2$); е($\dfrac{3}{2}\sqrt{\sin x}\cos x$); ж($\cos 3x\cos 4x$); **10**(Има корен в интервала $(-2,-1)$).

Оценяване. За всеки верен отговор на задачи от 1 до 8 по 2 точки. Задача 9 (общо 14 точки) – за всяка вярно намерена производна по 2 точки. Задача 10 (общо 6 точки) – за намиране на две стойности на полинома с различни знаци по 2 точки; за извод 2 точки. Оценка в точки =(получените точки.100/36).

Тест 2.

1Б; **2**А; **3**А; **4**Б; **5**А; **6**Г; **7**Г; **8**($\dfrac{3}{2}$); **9**(а(x^2+3x-5); б($2\cos x-2x\sin x$); в($6x^2+2x-3$);

г($\dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\cos^2\sqrt{x}}$); д($\dfrac{4}{3}\cos x\cos 3x$)); **10**(Прекъсната при $x=0$, в останалите точки е непрекъсната.).

Оценяване. За всеки верен отговор на задачи от 1 до 7 по 2 точки. Задача 8 (общо 6 точки) – за рационализиране 2 точки; за изнасяне на най-високата степен на x пред скоби 2 точки; за отговор 2 точки. Задача 9 (общо 10 точки) – за всяка вярно намерена производна по 2 точки. Задача 10 (общо 6 точки) – за намиране на лявата и дясната производна в точката 0 по 2 точки; за извод 2 точки. Оценка в точки =(получените точки.100/36).

1. x^3+x^2-2x+1 и $2x-1$; **2.** $2x^3-3x^2+x+1$ и 2; **3.** $P(2)=1$, $P(-1)=4$, $P(3)=16$;

4. а) 26; б) 10783; **5.** $x_{1,2}=-1$, $x_3=2$, $x_4=-3$; $(x+1)^2(x-2)(x+3)$;

6. а) $(x+3)(3x-5)(3x+2)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$; б) $(2x-1)(3x+2)(4x+1)(x-2)$;

в) $(x-2)^3(2x+1)(x+2)$; г) $(x+3)^2(x+2)^2(x-1)$; д) $(3x+2)(2x-3)(2x+1)(3x-1)$;

е) $(2x-5)(2x+1)(2x-3)(5x+2)$; ж) $\dfrac{1}{2}(x+2)(x-3)(2x-2-\sqrt{6})(2x-2+\sqrt{6})$;

з) $\dfrac{1}{3}(x-2)(x+1)(3x-1-\sqrt{7})(3x-1+\sqrt{7})$;

7. а) $x_1=2;\ x_{2,3}=1\pm\sqrt{3}$; б) $x=-2$; в) $x=-3$; г) $x_{1,2}=\pm2;\ x_{3,4}=\dfrac{3\pm\sqrt{33}}{4}$;

д) $x_1=-3;\ x_2=-2;\ x_{3,4}=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$; е) $x_1=-2;\ x_{2,3}=1$; ж) $x_1=-1;\ x_{2,3}=1;\ x_{4,5}=1\pm\sqrt{3}$;

з) $x_1=-1;\ x_{2,3}=\pm2;\ x_{4,5}=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{2}$; и) $x_{1,2}=\pm2;\ x_3=-1;\ x_{4,5}=1\pm\sqrt{2}$; к) $x_1=-2;\ x_{2,3}=1$;

8. а) $x_1=-1;\ x_{2,3}=1\pm\sqrt{3}$; б) $x_1=3;\ x_{2,3}=-1\pm\sqrt{3}$; в) $x_1=-3$; $x_{2,3}=\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$; г) $x_1=2$; $x_{2,3}=1\pm\sqrt{6}$;

9. а) $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$; $x_{3,4}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; б) $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$; $x_{3,4}=1\pm\sqrt{3}$; в) $x_1=-1$; $x_{2,3}=\pm\sqrt{2}$; $x_{4,5}=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{6}$;

10. а) $x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{2}}{2}$; $x_{3,4}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; б) $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; в) $x_1=-1$; $x_{2,3}=\dfrac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$; г) $x_{1,2,3,4}=1$;

11. а) $x_1=-2$; $x_{2,3}=\dfrac{7\pm\sqrt{33}}{4}$; $x_{4,5}=\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$; б) $x_1=2$; $x_{2,3}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; $x_{4,5}=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$; в) $x_1=\dfrac{3}{2}$; $x_{2,3}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$; $x_{4,5}=3\pm2\sqrt{2}$;

12. а) $x\in(-\infty;-4]\cup\left[\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right]\cup\{1\}$; б) $x\in(-\infty;-3)\cup(-3;-2)\cup(2;+\infty)$;

в) $x\in\left(-1;\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\right)\cup(2-\sqrt{3};1)\cup\left(2+\sqrt{3};\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$;

13. а) $x\in[-2,-1]\cup[3,+\infty)$; б) $x\in(-2,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},3)\cup(3,+\infty)$;

в) $x\in\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{3},1\right)\cup(5,+\infty)$;

14. а) $x\in(-1-\sqrt{3},1-\sqrt{3})\cup(-1+\sqrt{3},2)\cup(1+\sqrt{3},+\infty)$;

б) $x\in(-\infty,-1-\sqrt{3})\cup(-1,1-\sqrt{3})\cup(-1+\sqrt{3},1+\sqrt{3})$;

15. а) $x\in(-\infty,1-\sqrt{3})\cup(2,1+\sqrt{3})$; б) $x\in(-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3})\cup(2,+\infty)$;

17. а) $10x^2y^6$; б) $\dfrac{224a^5}{3}$; в) $210.\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2}$; г) 45; **18.** $35x^3a^8$; **19.** $x_1=3$, $x_n=\dfrac{3x_{n-1}}{n}$;

20. а) $\sqrt{2}$; б) 0; в) $-\infty$; г) -1; д) ∞; е) 0; **21.** а) $\dfrac{\sqrt{2}+3}{8}$; б) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{8}$; в) $\dfrac{5}{9}$;

22. а) $5+2\sqrt{5}$; б) 36; в) $\dfrac{25}{12}$; г) $\dfrac{2}{3}$; **23.** $\dfrac{1}{4}$; **24.** $a_1=\dfrac{16}{3},\ q=\dfrac{1}{2}$; $a_1=16,\ q=-\dfrac{1}{2}$;

25. а) $3{,}5$; б) 1; в) $\frac{\sqrt{5}}{40}$; г) $-\frac{1}{2}$; д) $-\frac{1}{6}$; е) $\frac{1}{4}$; ж) $\frac{1}{2}$; з) 2;

26. а) 0; б) $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$; в) 0; г) ∞; д) 3; е) $-\infty$; ж) $-\infty$; з) -2;

27. а) $\frac{1}{4}$; б) 2; в) $\frac{1}{4}$; г) $4\sqrt{3}$; д) $\frac{1}{2}$;

28. а) $\cos a$; б) $-\frac{\sin a}{2}$; в) $\frac{1}{\cos^2 a}$;

29. $b=0,\ a=-3$;

30. прекъсната при $x=0$;

31. $a=-3$;

32. а) $\frac{16x^3}{(x^4-1)^2}$; б) $\frac{2x+2}{\sqrt[3]{(3x^2+6x+1)^2}}$; в) $9\sin^2 3x\cos 3x$; г) $\sqrt{2}\cos x$; д) $\frac{6\sin x}{\cos^7 x}$;

33. а) $-\frac{61}{40}$; б) -6; в) 5; г) 5; д) -2; е) $-\frac{1}{2}$; ж) $0{,}8$; з) 0; и) 2;

Математика за 11. клас, профилирана подготовка

Донка Георгиева Гълъбова, Мая Пламенова Сидерова

Графичен дизайн Донка Гълъбова и Мая Сидерова
Корица Кирил Чохаджиев и Диляна Чохаджиева

Българска
Първо издание, 2020 г.
Формат 60x84/8, Печатни коли 19

Издателство „Веди.БГ ЕООД"
Тел. 02-971-47-82; 0888-95-98-13
e-mail: info@vedi.bg
www.vedi.bg

ISBN 978-954-8857-54-3

Печат „СИМОЛИНИ 94"

София 2020 година