Донка Гълъбова Мая Сидерова

Математика за 12. клас

ПРОФИЛИРАНА
ПОДГОТОВКА

Издателство ВЕДИ

3. Номер на задача.
☒ Задача с избираем отговор.
▲ Край на доказателство, решение, коментар, геометрична интерпретация.
Твърдение. Твърдение, което няма характера на теорема, но трябва да бъде отбелязано.

ISBN 978-954-8857-55-0

Съдържание

Модул III – Практическа математика

1. Приложения на математическия анализ

2. Геометрични модели

3. Емпирични разпределения

4. Елементи от комбинаториката

Модул IV – Вероятности и анализ на данни

Модул III Практическа математика

1. Приложения на математическия анализ

1.0. Математически анализ – преговор

1) Граница на функция

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана за $x \in D$ и нека $a \in D$.

Казваме, че функцията $f(x)$ има граница A при x клонящо към a, ако за всяка редица $\{x_n\}$, клоняща към a със стойности от D и различни от a, редицата $\{f(x_n)\}$ е сходяща и има граница A.

Означаваме $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = A$ се нарича лява граница при $x \to a,\ x < a$.

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = A$ се нарича дясна граница при $x \to a,\ x > a$.

Теорема. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ точно когато $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = A$.

Основни граници:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty,\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty,\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,\ \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e;\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Желателно е да се помнят и границите:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta},\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\operatorname{tg} \beta x} = \frac{\alpha}{\beta},\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 \alpha x}{x^2} = \alpha^2.$$

1. Да се намери границата.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{1-\sqrt{x+1}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x^2+x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+3x^2}{1-\cos x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\sin x\left(\operatorname{cotg} x + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)\right]$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{tg} x}.\dfrac{2x^2+\ln 2}{1+\ln 2}\right)$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\left[3x^2\left(\dfrac{1}{\sin x \operatorname{tg} x} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}\right)\right]$.

2) Непрекъснатост на функции

Определение. Нека $f(x)$ е дефинирана в област D и $a \in D$. Казваме, че $f(x)$ е непрекъсната в точката a, ако $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Ако $f(x)$ е непрекъсната във всяка точка от D, казваме, че $f(x)$ е непрекъсната в множеството D.

Ако $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = f(a)$, то $f(x)$ е непрекъсната отляво в точката a.

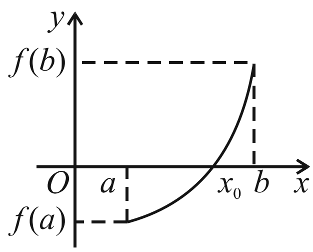
Ако $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = f(a)$, то $f(x)$ е непрекъсната отдясно в точката a.

Теорема 1. Функцията $f(x)$ е непрекъсната в точка a точно когато е непрекъсната отляво и отдясно в точката a.

Твърдение. Степенната функция, тригонометричните функции, показателната функция и логаритмичната функция са непрекъснати в съответните им дефиниционни области.

Теорема 2. (Теорема на Болцано)

Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a,b]$ и в краищата на интервала приема различни знаци, то съществува точка x_0 от отворения интервал (a,b), за която $f(x_0)=0$.



Теорема 3. (Теорема за междинните стойности)

Ако $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a,b]$ и $f(a) \neq f(b)$, то за всяко число c между стойностите $f(a)$ и $f(b)$ съществува число x_0 от отворения интервал (a,b), така че $f(x_0)=c$.

Теорема 4. (Теорема на Вайерщрас)

Ако една функция е непрекъсната в краен и затворен интервал, то тя достига в него най-голямата си и най-малката си стойност.

Като използваме теоремата на Болцано, ще докажем следното твърдение.

Твърдение. Ако функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната за всяко x, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, то съществува число α, така че $f(\alpha)=0$.

Доказателство.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow$ съществува число x_1, така че $f(x_1)<0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow$ съществува число x_2, така че $f(x_2)>0$.

Тогава $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в крайния и затворен интервал $[x_1, x_2]$ и в краищата му приема стойности с различни знаци и според теоремата на Болцано съществува число α, за което $f(\alpha)=0$.▲

2. Да се докаже, че функцията $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4x^2-9}{2x-3}, & \text{при } x \neq \dfrac{3}{2} \\ 6, & \text{при } x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ е непрекъсната при $x=\dfrac{3}{2}$.

3. За коя стойност на реалния параметър a функцията $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+(2-a)x-2a}{x+2}, & \text{при } x\neq -2\\ 2, & \text{при } x=-2\end{cases}$ е непрекъсната при $x=-2$?

4. Намерете точките, в които функцията $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos 2x}, & \text{при} -\dfrac{\pi}{4}<x<0\\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{при } 0\leq x\leq 1\\ \dfrac{4x^2-5x+1}{4\sqrt{x+3}-8}, & \text{при } x>1\end{cases}$ е прекъсната.

3) Производна на функция

Определение. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в D и $x_0\in D$. Границата (ако съществува) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ се нарича производна на $f(x)$ в точката x_0, а $f(x)$ се нарича диференцируема в x_0.

Когато $f(x)$ е диференцируема във всяка точка от D, получаваме нова функция $f'(x)$, която се нарича производна на $f(x)$.

Производните на основните елементарни функции се наричат таблични производни. Към вече изучените производни ще добавим и производните на функциите e^x, a^x ($a>0$), $\ln x$ и $\log_a x$ ($a>0, a\neq 1$).

$(e^x)'=e^x$; $(a^x)'=a^x\ln a,\ a>0$;

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$; $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a},\ a>0,\ a\neq 1$.

За да намираме производните на различни функции, използваме и правилата за диференциране.

Таблични производни	
$(c)'=0$, c – константа	$(e^x)'=e^x$;
$(x)'=1$	$(a^x)'=a^x\ln a,\quad a>0$
$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1},\ \alpha\in\mathbb{R}$	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$
$(\cos x)'=-\sin x$	$a>0,\ a\neq 1$
$(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	
$(\operatorname{cotg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	

Правила за диференциране
$(c\,f)'=c\,f'$, c – константа
$(f+g)'=f'+g'$
$(f-g)'=f'-g'$
$(f\,g)'=f'\,g+f\,g'$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\,g-f\,g'}{g^2}$
$(g(f))'=g'(f).f'$

Забележка. Когато в израза, дефиниращ една функция, участва буква, която е параметър, то тя се диференцира като константа. Пример $(2ax+3a)'=2a$, a е параметър.

5. Да се намери производната на функцията.

а) $2x^3-3x^2+m^2x+m$, където m е параметър;

б) $\sqrt{x^2+5m}$, където m е параметър;

в) $\dfrac{1}{a\sin x}$, където a е параметър; г) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{ax}}$, където a е параметър;

д) $\dfrac{2x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; е) $\dfrac{x+2}{x-2}$.

6. Да се намери производната на функцията.

а) $5e^x$; б) $e^{2x}+x^2$; в) $e^x(x^2+3)$;

г) $e^{\frac{a}{x}}$, където a е параметър; д) $e^{\frac{x+1}{x-1}}$; е) $\dfrac{1}{e^x}$.

7. Да се намери производната на функцията.

а) 2^x; б) x^2+2^x; в) $\dfrac{x^3+3^x}{x}$;

г) $e^{2x}+4^x$; д) 5^{2x-1}; е) $\dfrac{3^x}{x^3}$.

8. Да се намери производната на функцията.

а) $\ln x+x$; б) $x\ln x$; в) $\ln(x+1)$; г) $\ln x^2$;

д) $\ln(x^2+1)$; е) $\ln\ln x$; ж) $\ln^2 x$; з) $\dfrac{1}{\ln x}$;

и) $\sqrt{\ln x}$; к) $e^x\ln x$; л) $\ln(x^2+2x-3)$; м) $\sqrt{1+\ln x}$.

9. Да се намери производната на функцията.

а) $e^x(x^2+2x+5)$;

б) $\ln(x^2+2x+5)$.

10. Да се намери производната на функцията.

а) $\lg x$; б) $\log_3(x^2+3)$; в) $x\log_2 x$; г) $\log_2\log_2 x$.

11. Да се намери производната на функцията.

а) $\ln 3x$; б) $\ln\dfrac{1}{x}$; в) $\ln\dfrac{x}{x^2+1}$;

г) $\ln\dfrac{2x-3}{3x+2}$; д) $\ln\left[(x+1)\sin x\right]$.

12. Пресметнете:

а) $f'(3)$, където $f(x)=\dfrac{x^3}{4-x}$;

б) $f'(\sqrt{2})$, където $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}$.

Тест 1 – входно ниво

1. Да се намери границата $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+x}\right)$.

2. Да се намери границата $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$.

3. Да се намери границата $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\sin 3x}(2\sin x\cos x-\sin^3 2x)\right]$.

4. За коя стойност на реалния параметър a, $a\neq 0$ функцията $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x-12}{x^2-3x+12}, & \text{при } x\leq 1\\ \dfrac{x^2-1}{ax-a}, & \text{при } x>1\end{cases}$ е непрекъсната за всяко x?

Задачи 5 – 8. Да се намери производната на функцията $f(x)$.

5. $f(x)=\sqrt{2x+1}$.

6. $f(x)=3\sqrt{x}-\dfrac{2}{x}$.

7. $f(x)=e^x(4x^2-8x+9)$.

8. $f(x)=\ln\dfrac{2x}{x+3}$.

9. Да се намери $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, където $f(x)=\sin^2 x.\operatorname{tg} x$.

Тест 2 – входно ниво

1. Да се намери границата $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{2-\sqrt{2x}}$.

2. Да се намери границата $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$.

3. Да се намери границата $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^4-3x^2+5}{3x^3+x}$.

4. Намерете точките, в които е прекъсната функцията $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}+x, & \text{при } x<2,\ x\neq 0\\ \dfrac{2x-4}{x+1}, & \text{при } 2\leq x\leq 3\\ \dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{\sqrt{x-3}}, & \text{при } x>3\end{cases}$.

5. Да се намери $f'(25)$, където $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x-25$.

Задачи 6 – 7. Намерете производната на функцията.

6. $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$.

7. $f(x)=\ln\dfrac{5}{x^2-5}$.

8. Дадена е функцията $f(x)=(m+1)x^2-2mx+3$. За коя стойност на параметъра m уравнението $f'(x)=0$ има корен $x=\dfrac{1}{2}$?

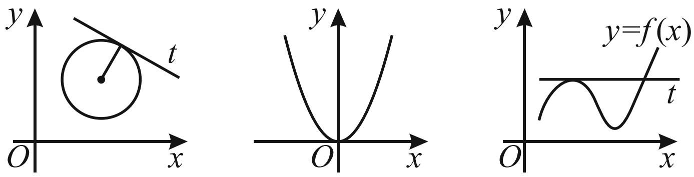
9. Да се намери стойността на израза $25f'(3)-5f'(2)$, където $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+1}$.

1.1. Геометричен смисъл на понятието производна

Геометричният смисъл на понятието производна е свързан с понятието допирателна към крива линия. Досега сме дали определение само за допирателна към окръжност.

Да разгледаме чертежите.

На първия чертеж правата t има само една обща точка с окръжността и такава права нарекохме допирателна към окръжността.



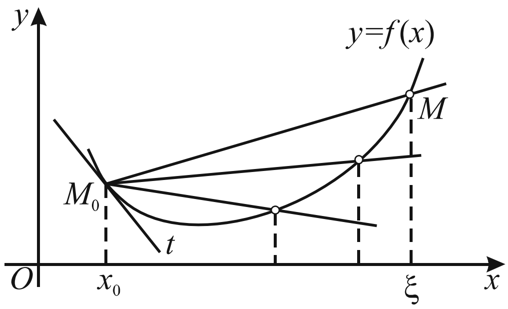
На втория чертеж оста Oy има само една обща точка с параболата, но по интуитивната ни представа не е допирателна към параболата.

На третия чертеж правата t има две общи точки с графиката на функцията $y = f(x)$, но (отново по интуитивната ни представа) тя е допирателна към графиката в едната обща точка, а в другата не е.

Тези примери показват, че се нуждаем от едно по-прецизно определение на понятието допирателна към крива линия.

Да разгледаме функцията $y = f(x)$, чиято графика е показана на чертежа и нека точка $M_0(x_0, f(x_0))$ лежи на графиката ѝ.

Избираме произволна точка $\xi \neq x_0$, така че точката $M(\xi, f(\xi))$ лежи на графиката на $f(x)$ (ξ – кси – буква от гръцката азбука).



Тогава е определена правата M_0M с уравнение:

$$M_0M: \ \frac{x - x_0}{\xi - x_0} = \frac{y - f(x_0)}{f(\xi) - f(x_0)}, \text{ т.е.}$$

(1) $$M_0M: \ y = \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

Преговор

Уравнение на права през две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Нека точката ξ се „приближава” до точката x_0.

Тогава секущата M_0M ще се променя и ако кривата е гладка (каквато е на чертежа), то M_0M ще се „приближава” до допирателната t в точка M_0 (по интуитивната ни представа).

Нека $\xi \to x_0$, $\xi \neq x_0$ и да направим граничен преход в равенството (1).

Получаваме $y = \lim\limits_{\xi \to x_0} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$ и ако $f(x)$ е диференцируема, имаме $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

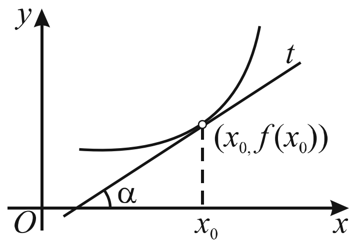
Тези наблюдения ни подсказват да дадем следното определение.

Определение. Правата t с уравнение $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ се нарича **допирателна към графиката на функцията** $y = f(x)$ в точката $(x_0, f(x_0))$.

Геометричен смисъл

Да представим уравнението на допирателната в декартов вид:

$t:\ y = f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f(x_0)$.



Следователно $f'(x_0)$ е ъгловият коефициент на допирателната t и ако α е ъгълът, който тя сключва с положителната посока на оста Ox, имаме $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

Тогава допирателната има уравнение $t:\ y = f'(x_0)x + b$, където b се определя от условието, че точката $(x_0, f(x_0))$ лежи на допирателната.

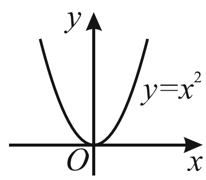
Това е и **геометричният смисъл** на понятието производна – производната $f'(x_0)$ в дадена точка x_0 е равна на ъгловия коефициент на допирателната към графиката в точката $(x_0, f(x_0))$, който от своя страна е равен на $\operatorname{tg}\alpha$, където α е ъгълът, който допирателната сключва с положителната посока на оста Ox. ▲

Хоризонтална допирателна

Ако $f'(x_0) = 0$, то уравнението на допирателната в точката $(x_0, f(x_0))$ е $y = f(x_0)$, което е уравнение на права, успоредна на оста Ox. В този случай допирателната се нарича **хоризонтална**. Също така, ако в точката $(x_0, f(x_0))$ от графиката на $f(x)$ съществува хоризонтална допирателна, то $f'(x_0) = 0$.

Пример. Нека $f(x) = x^2$ и $x_0 = 0$. Имаме $f'(x) = 2x$ и $f'(0) = 0$.

Правата $y = f(0)$, т.е. $y = 0$ е хоризонтална допирателна към графиката на $y = x^2$ в точката $(0,0)$.▲



Вертикална допирателна

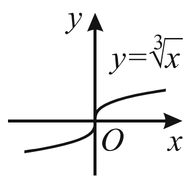
В случая, когато първата производна в точката x_0 не съществува, ще дадем следното определение.

Определение. Ако $\lim\limits_{\xi \to x_0} \dfrac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} = \pm\infty$, то правата с уравнение $x = x_0$ се нарича допирателна към графиката на функцията $y = f(x)$ в точката $(x_0, f(x_0))$.

Правата с уравнение $x = x_0$ е успоредна на оста Oy. Допирателната се нарича **вертикална**.

Пример. Нека $f(x) = \sqrt[3]{x}$ и $x_0 = 0$.

Имаме $\lim\limits_{\xi \to 0} \dfrac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \lim\limits_{\xi \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\xi}}{\xi} = \lim\limits_{\xi \to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{\xi^2}} = +\infty$.



Ето защо правата с уравнение $x = 0$ е вертикална допирателна към графиката на функцията $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в точката $(0,0)$.▲

1. Да се намери уравнението на допирателната към графиката на функцията $f(x) = x^2 + 3x + 3$ в точката $(3, f(3))$.

Решение. Уравнението на допирателната е $y = f'(3)x + b$. Пресмятаме $f'(x) = 2x + 3$, $f'(3) = 9 \Rightarrow y = 9x + b$.

Точката $(3, f(3))$ лежи на допирателната $\Rightarrow$ $f(3) = 9.3 + b$, $21 = 27 + b$, откъдето $b = -6$. Окончателно уравнението на допирателната е $y = 9x - 6$ или $9x - y - 6 = 0$.▲

2. Да се намери уравнението на допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в точката с абсциса x_0, ако:

а) $f(x) = x^2 + x + 1$, $x_0 = 2$;

б) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x \neq 1$, $x_0 = 3$;

в) $f(x) = 3^{2x+1}$, $x_0 = 0$;

г) $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$, $x_0 = 3$;

д) $f(x) = \sin x + \cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

3. Намерете абсцисите на точките от графиката на функцията $y = f(x)$, в които:

а) допирателната е успоредна на абсцисната ос и $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 8x + 3$;

б) допирателната сключва с положителната посока на оста Ox ъгъл, чийто тангенс е равен на 2 и $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

4. Да се намерят координатите на точките от графиката на функцията $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, в които:

а) допирателната сключва с положителната посока на оста Ox ъгъл, равен на $150°$;
б) допирателната е хоризонтална;
в) допирателната е вертикална
и да се напише уравнението на допирателната.

5. Намерете уравнението на допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в точката $(x_0, f(x_0))$ и намерете ъгъла α, който тя сключва с положителната посока на оста Ox.

а) $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$;

б) $f(x) = x^2 + 3x + 5$, $x_0 = \sqrt{2}$;

в) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

г) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $x_0 = -3$;

д) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x_0 = 0$;

е) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$;

ж) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$.

6. Намерете координатите на точките, в които допирателната към графиката на функцията $f(x)$ е успоредна на абсцисната ос.

а) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8$;

б) $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+1}$;

в) $f(x) = x - \sqrt{x}$;

г) $f(x) = \cos x$, $x \in [0; 2\pi]$;

д) $3x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 36x + 3$.

7. Да се намерят стойностите на параметъра a, за които допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в точката с абсциса x_0 е успоредна на абсцисната ос.

а) $f(x) = x^2 + 3ax - 4$, $x_0 = -3$;

б) $f(x) = (a+1)x^2 - 2x$, $x_0 = 2$.

1.2. Производни на функции от по-висок ред. Втора производна на функция

Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в D. Тогава за всяко x от D е определена производната ѝ $f'(x)$.

Ако функцията $f'(x)$ е диференцируема в D, то можем да намерим нейната производна, която се нарича **втора производна** на $f(x)$. Означаваме $f''(x)$ или само f'', четем „еф секонд”. Имаме $f''(x) = (f'(x))'$.

Ако f'' е диференцируема в D, то нейната производна се нарича **трета производна** на $f(x)$. Означаваме $f'''(x) = (f''(x))'$.

Ако третата производна е диференцируема функция, получаваме четвърта $f'^{v}(x)$ и т.н.

1. Да се намери третата производна на функцията:

а) $f(x) = 2x^2 + 5x - 6$;

б) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$;

в) $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 5$.

Решение.

а) $f'(x) = 4x + 5$; $f''(x) = (f'(x))' = (4x+5)' = 4$; $f'''(x) = (f''(x))' = (4)' = 0$.

б) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$; $f''(x) = 6x - 4$; $f'''(x) = 6$.

в) $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x + 3$; $f''(x) = 12x^2 + 6x - 2$; $f'''(x) = 24x + 6$.▲

2. Да се намери третата производна на функцията в областта, в която е дефинирана:

а) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; б) $f(x) = \dfrac{3x-4}{x+5}$; в) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

3. Да се намери втората производна на функцията:

а) $\ln x^2$; б) $e^{\frac{1}{x}}$.

4. Докажете, че $xf''(x) - f'(x) > 0$ за всяко x, където $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

1.3. Механичен смисъл на понятието производна

Нека точка M се движи по реалната права в някакъв интервал от време и за произволно t от този интервал заема положение $s(t)$. Да разгледаме два момента t и t_0. Както знаем от механиката, частното $V_{\text{ср}} = \dfrac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$ се нарича средна скорост на движението на M в интервала от време $[t_0; t]$.

Границата $V(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$ се нарича скорост на точката M в момента t_0. Като вземем предвид определението на понятието производна, стигаме до извода, че $V(t_0)$ е производната на функцията $S(t)$ в момента t_0: $V(t_0) = S'(t_0)$.

1.4. Признаци за растене и намаляване на функция

Да преговорим. Ако функцията $f(x)$ е дефинирана в интервал U и за всеки две числа $x_1 \in U$ и $x_2 \in U$, за които $x_1 < x_2$ е изпълнено:

а) $f(x_1) \leq f(x_2)$, то $f(x)$ се нарича **монотонно растяща**;

б) $f(x_1) \geq f(x_2)$, то $f(x)$ се нарича **монотонно намаляваща**.

Ако неравенствата са строги, $f(x)$ се нарича **строго растяща, (строго намаляваща).**

Ако $f(x)$ е монотонно растяща или монотонно намаляваща в U, казваме, че $f(x)$ е **монотонна** в U (строго монотонна).

Едно необходимо и достатъчно условие за монотонност на функция дава следната
Теорема (критерий за монотонност)
Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в интервал U.

$f(x)$ е растяща точно когато $f'(x) \geq 0$ за всяко $x \in U$ и $f(x)$ е намаляваща точно когато $f'(x) \leq 0$ за всяко $x \in U$. Когато неравенствата са строги, $f(x)$ е строго монотонна и обратно.

1. Да се намерят интервалите на растене и намаляване на функцията:

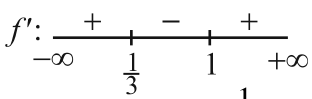
а) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 7$; б) $f(x) = \sqrt{x - x^2}$; в) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Решение. а) $f(x)$ е дефинирана и диференцируема за всяко x.

Намираме $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

Определяме знака на $f'(x)$ за всяко x.

$3x^2 - 4x + 1 = 0$, $x_1 = \dfrac{1}{3}$, $x_2 = 1$



Попълваме резултата в таблица.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Отговор. $f(x)$ е растяща в $(-\infty; \frac{1}{3})$, намаляваща в $(\frac{1}{3}; 1)$ и растяща в $(1; +\infty)$.▲

Решение. б) $f(x) = \sqrt{x - x^2}$.

Функцията е дефинирана при $x \in [0;1]$ и диференцируема при $x \in (0;1)$ и $f'(x) = \dfrac{1 - 2x}{2\sqrt{x - x^2}}$.

Тъй като $\sqrt{x - x^2} > 0$ за всяко $x \in (0;1)$, то $f'(x) > 0$ за $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ и $f'(x) < 0$ за $x \in \left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$.

Тогава $f(x)$ е растяща в $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ и намаляваща в $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$.▲

Решение. в) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$f(x)$ е дефинирана и диференцируема при $x \in M = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ за всяко $x \in M$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	−		−
$f(x)$	↘		↘

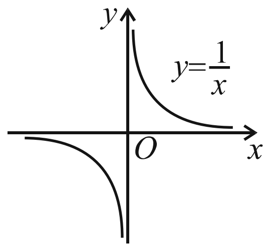
Тъй като $M = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ не е интервал (а обединение от интервали), то не можем да приложим критерия за монотонност за M.

Да разгледаме $f(x)$ в **интервала** $(-\infty; 0)$:

$f'(x) < 0$ и следователно $f(x)$ е намаляваща в $(-\infty; 0)$.

Да разгледаме $f(x)$ в **интервала** $(0;+\infty)$:

$f'(x)<0$ и следователно $f(x)$ е намаляваща в $(0;+\infty)$.



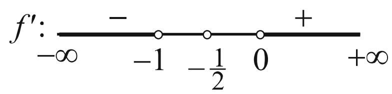
Получихме, че $f(x)$ е намаляваща във всеки от интервалите $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$, но, разглеждана като функция в обединението $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, въпросът за нейната монотонност е безсмислен.

Графиката на функцията е показана на чертежа.▲

<u>Коментар</u>. Този пример показва, че изискването на теоремата $f(x)$ да бъде дефинирана в **интервал,** е съществено.▲

2. Да се намерят интервалите на монотонност на функцията $f(x)=\sqrt{x^2+x}$.

Решение. Функцията е дефинирана при $x\in(-\infty,-1]\bigcup[0,+\infty)$ и диференцируема при $x\in(-\infty,-1)\bigcup(0,+\infty)$ и $f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.



$f'(x)<0$ при $x\in(-\infty,-1)$; $f'(x)>0$ при $x\in(0,+\infty)$.

Тогава $f(x)$ намалява в $(-\infty,-1)$ и расте в $(0,+\infty)$.▲

<u>Коментар</u>. Уравнението $f'(x)=0$ няма решение поради дефиниционната област на производната. Числителят $2x+1=0$, $x=-\dfrac{1}{2}$ и това позволява да определим знака на $f'(x)$ там, където f' е дефинирана .▲

3. Да се намерят интервалите на монотонност на функцията.

а) $f(x)=x^3+3x^2-24x+3$; б) $f(x)=2x^3+3x^2+6x+5$;

в) $f(x)=x^3+9x^2+27x-3$; г) $f(x)=-2x^3+3x^2+36x+1$;

д) $f(x)=3x^4+8x^3-30x^2-72x-36$; е) $f(x)=3x^5+5x^3-30x+1$;

ж) $f(x)=x^5+2x^3+2x+3$; з) $f(x)=x^5-3x^3+4x+4$.

4. Да се намерят интервалите на монотонност на функцията.

а) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; б) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$;

в) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; г) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

5. Да се намерят интервалите на монотонност на функцията.

а) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$; в) $f(x)=\sqrt{5x-6-x^2}$;

г) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$; д) $f(x)=\sqrt{3-x^2}$; е) $f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

6. Да се намерят интервалите на монотонност на функцията.

а) $f(x)=\ln(x^2+x)$; б) $f(x)=e^{x^2+x}$; в) $f(x)=\ln(x^2+x)-x$.

1.5. Най-голяма и най-малка стойност на функция

1) Локален екстремум на функция

Определение. Точката x_0 се нарича **вътрешна** за множеството M, ако съществува отворен интервал U на x_0, който се съдържа в M, $U \subset M$.

Нека $M = [a;b]$. Всяка точка от отворения интервал $(a;b)$ е вътрешна за M, докато точките a и b не са вътрешни.

Определение. Нека функцията $f(x)$ е с дефиниционна област D и x_0 е вътрешна точка за D.

Казваме, че $f(x)$ има **локален максимум** в точката x_0, ако съществува отворен интервал U на x_0, съдържащ се в D, така че неравенството $f(x_0) \geq f(x)$ е изпълнено за всяко $x \in U$.

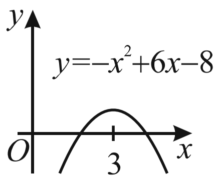
Означаваме $f_{\max} = f(x_0)$.

Казваме, че $f(x)$ има **локален минимум** в точката x_0, ако съществува отворен интервал U на x_0, съдържащ се в D, така че неравенството $f(x_0) \leq f(x)$ е изпълнено за всяко $x \in U$.

Означаваме $f_{\min} = f(x_0)$.

Ако $f(x)$ има локален максимум или локален минимум в точката x_0, казваме, че $f(x)$ има **локален екстремум** в тази точка.

Пример 1. Нека $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.



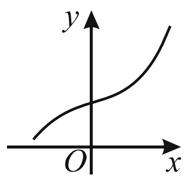
Върхът на параболата е в точката $x_0 = 3$ и

$f(x) \leq f(3) = 1$ за всяко $x \in (-\infty; +\infty)$.

Следователно $f(x)$ има локален максимум при $x = 3$ и $f_{\max} = f(3) = 1$.▲

Твърдение.

Ако функцията $f(x)$ е строго монотонна в интервал U, то $f(x)$ няма локален екстремум в U.



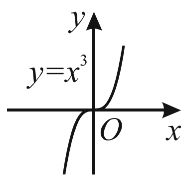
Доказателство. Нека, за определеност, $f(x)$ е строго растяща в U. Да допуснем, че $f(x)$ има локален екстремум, например локален максимум, в точката x_0 от U. Това означава, че съществува отворен интервал $(p;q) \subset U$ на x_0, такъв че

(1) $f(x) \leq f(x_0)$, за всяко $x \in (p;q)$.

Нека $x_1 \in (p;q)$ и $x_0 < x_1$. Функцията $f(x)$ е строго растяща $\Rightarrow$ $f(x_0) < f(x_1)$, което противоречи с (1).

Останалите случаи се разглеждат аналогично. Следователно $f(x)$ няма локален екстремум в U.▲

Пример 2. Нека $f(x) = x^3$.



Тъй като $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ и равенство има само при $x = 0$, то x^3 е строго растяща в $(-\infty; +\infty)$ и според доказаното твърдение няма локални екстремуми.▲

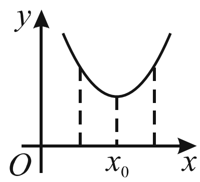
Теорема (Ферма – необходимо условие за съществуване на локален екстремум)

Ако функцията $f(x)$ има локален екстремум в x_0 и е диференцируема в x_0, то

$$f'(x_0)=0.$$

Доказателство. Нека $f(x)$ има локален минимум в x_0. Следователно съществува отворен интервал U на x_0, така че $f(x_0)\le f(x)$ за всяко $x\in U$ или $f(x)-f(x_0)\ge 0$.

За диференчното частно имаме:



$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0, & \text{за } x<x_0,\ (x-x_0<0)\\[2mm] \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0, & \text{за } x>x_0,\ (x-x_0>0)\end{cases}.$$

$f(x)$ е диференцируема в x_0, което означава, че лявата и дясната граница на диференчното частно съществуват и са равни на $f'(x_0)$, т.е:

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ и поради теоремата за граничен преход в неравенства е изпълнено $f'(x_0)\le 0$ (1).

Преговор:
$f(x)\le g(x)$
$\downarrow \quad \downarrow$
$A \quad B$
$\Rightarrow A\le B$

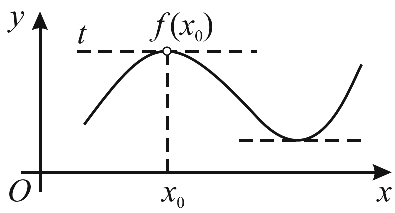
$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ и отново поради теоремата за граничен преход в неравенства, $f'(x_0)\ge 0$ (2).

От (1) и (2) получаваме, че $f'(x_0)=0$.

Когато $f(x)$ има локален максимум в x_0, доказателството е аналогично.▲

Геометрична интерпретация на теоремата на Ферма.

Нека $f(x)$ е диференцируема в x_0. Уравнението на допирателната към графиката ѝ в точката $(x_0, f(x_0))$ е $t:\ y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.



Нека сега $f(x)$ има локален екстремум в x_0, следователно $f'(x_0)=0$ и уравнението на допирателната е $t:\ y=f(x_0)$, което е уравнение на права, успоредна на оста Ox.

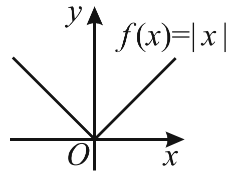
И така, ако функцията е диференцируема в точките на локален екстремум, то допирателната към графиката на функцията в тези точки е успоредна на оста Ox.▲

Коментар

– Теоремата на Ферма дава само необходимо условие една диференцируема функция да има локален екстремум. Това означава, че функцията $f(x)$ може да има локален екстремум само в точките, които са корени на уравнението $f'(x)=0$, (но може и да няма екстремуми в тези точки). Със сигурност може да се твърди, че в точките, които НЕ СА корени на уравнението $f'(x)=0$, диференцируемата функция $f(x)$ НЯМА екстремум.

– Теоремата на Ферма е само за диференцируема функция.
– Функцията може да има екстремум и без да е диференцируема.

Например $f(x) = |x|$. Както знаем, графиката на $f(x) = |x|$ е показаната на чертежа и очевидно при $x = 0$ функцията има локален минимум.▲



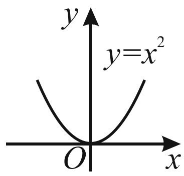
Определение. Вътрешна точка от дефиниционното множество на дадена функция, в която производната или е равна на нула, или не съществува, се нарича **критична точка** за функцията.

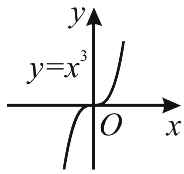
Да разгледаме още няколко примера.

1) $f(x)$ е диференцируема в $x_0 = 0$, $f'(x_0) = 0$ и:

– $f(x)$ има екстремум в x_0. Пример $f(x) = x^2$.

– $f(x)$ няма екстремум в x_0. Пример $f(x) = x^3$.

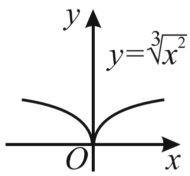


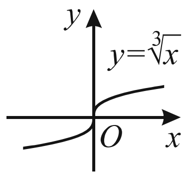


2) $f(x)$ не е диференцируема в $x_0 = 0$ и:

– $f(x)$ има екстремум в x_0. Пример $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

– $f(x)$ няма екстремум в x_0. Пример $f(x) = \sqrt[3]{x}$.





Едно достатъчно условие за съществуване на екстремум дава следната теорема.

Теорема. (Критерий за локален екстремум)

Нека $f(x)$ притежава производна в D, евентуално с изключение на точката x_0 (т.е. производната в x_0 може да не съществува).

Ако съществува отворен интервал (p, q) на x_0, такъв че:

1) $f'(x) > 0$ за $x \in (p, x_0)$ и $f'(x) < 0$ за $x \in (x_0, q)$, то $f(x)$ има локален максимум в x_0;

2) $f'(x) < 0$ за $x \in (p, x_0)$ и $f'(x) > 0$ за $x \in (x_0, q)$, то $f(x)$ има локален минимум в x_0;

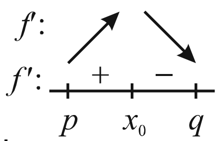
3) $f'(x) > 0$ за $x \in (p, x_0)$ и за $x \in (x_0, q)$ или $f'(x) < 0$ за $x \in (p, x_0)$ и за $x \in (x_0, q)$, то $f(x)$ няма локален екстремум в x_0.

Доказателство.

1) Нека $f'(x) > 0$ за $x \in (p, x_0)$

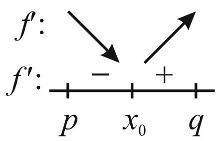
$\Rightarrow f(x)$ е растяща в (p, x_0) и $f(x) < f(x_0)$.

Нека $f'(x) < 0$ за $x \in (x_0, q) \Rightarrow f(x)$ е намаляваща в (x_0, q) и $f(x) < f(x_0)$.



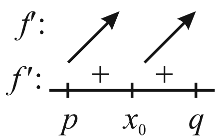
Следователно $f(x)$ има локален максимум в x_0 (според определението).

2) Аналогично се установява, че $f(x)$ има локален минимум във втория случай на теоремата.



3) Нека сега $f'(x) > 0$ за $x \in (p, x_0)$ и за $x \in (x_0, q)$.

Тогава $f(x)$ расте в $(p, x_0) \Rightarrow f(x) < f(x_0)$ за всяко $x \in (p, x_0)$ и $f(x)$ расте в $(x_0, q) \Rightarrow f(x_0) < f(x)$ за всяко $x \in (x_0, q)$, което показва, че функцията няма нито локален максимум, нито локален минимум в x_0.



Аналогични са разсъжденията, когато $f'(x) < 0$ за $x \in (p, x_0)$ и $f'(x) < 0$ за $x \in (x_0, q)$.▲

Ще формулираме още един критерий за екстремум с използване на втора производна.

Теорема. (Критерий за локален екстремум)

Нека функцията $f(x)$ притежава втора производна в точката x_0.

Ако $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)>0$, то $f(x)$ има локален минимум в x_0.

Ако $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)<0$, то $f(x)$ има локален максимум в x_0.

При решаване на задачи ще използваме следното практическо правило:

а) Една функция $f(x)$ може да има локален екстремум само в критична точка.

б) Ако около критична точка x_0 производната $f'(x)$:

– си сменя знака от **+** на **–**, то в x_0 има локален максимум, т.е. $f_{\max}=f(x_0)$;

– си сменя знака от **–** на **+**, то в x_0 има локален минимум, т.е. $f_{\min}=f(x_0)$;

– не си сменя знака, то в x_0 няма локален екстремум.

в) Ако $f'(x_0)=0$ и съществува $f''(x_0)$, то:

– при $f''(x_0)>0$ $f(x)$ има локален минимум в x_0, т.е. $f_{\min}=f(x_0)$;

– при $f''(x_0)<0$ $f(x)$ има локален максимум в x_0, т.е. $f_{\max}=f(x_0)$.

г) Ако $f(x)$ е строго монотонна в интервал U, то $f(x)$ няма локален екстремум в U.▲

1. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)$.

а) $f(x)=2x^3-6x^2-18x-5$;

б) $f(x)=(x-2)^2(x+1)^3$.

Решение. а) Функцията е дефинирана и диференцируема за всяко x. Намираме производната и решаваме уравнението $f'(x)=0$:

f':	$-\infty$	$+$	-1	$-$	3	$+$	$+\infty$

$f'(x)=6x^2-12x-18=6(x^2-2x-3)=0$, $x_1=-1$, $x_2=3$.

Производната си сменя знака около точката $x_1=-1$ от + на –, следователно $f_{\max}=f(-1)=5$, а около точката $x_2=3$ си сменя знака от – на +, следователно $f_{\min}=f(3)=-59$.▲

Решение. б) Функцията е дефинирана и диференцируема за всяко x и:

$f'(x_0)=2(x-2)(x+1)^3+3(x-2)^2(x+1)^2=$

$=(x-2)(x+1)^2(5x-4)=0$.

f':	$-\infty$	$+$	-1	$+$	$\frac{4}{5}$	$-$	2	$+$	$+\infty$

Корените на уравнението $f'(x)=0$ са $x_1=-1$, $x_2=\dfrac{4}{5}$ и $x_3=2$.

Около $x_1=-1$ производната не си сменя знака $\Rightarrow$ в $x_1=-1$ $f(x)$ няма локален екстремум.

Около $x_2=\dfrac{4}{5}$ производната си сменя знака от + на – $\Rightarrow$ $f_{\max}=f\left(\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{4.3^8}{5^5}$.

Около $x_3=2$ производната си сменя знака от – на + $\Rightarrow$ $f_{\min}=f(2)=0$. ▲

2. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)$.

а) $f(x)=2x^3-15x^2+36x+1$;

б) $f(x)=3x^4-36x^3+156x^2-288x+1$;

в) $f(x)=3x^5-15x^3-60x+1$.

3. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)$.

а) $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$; в) $f(x)=\sin 2x+x$, $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$.

Решение. а) $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$. $f(x)$ е дефинирана и диференцируема в $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{(2x-2)(x+1)-(x^2-2x)}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+\sqrt{3}+1)(x-\sqrt{3}+1)}{(x+1)^2}=0$. Около точката $x_1=-\sqrt{3}-1$ производната си сменя знака от + на – $\Rightarrow$ $f_{\max}=f(-\sqrt{3}-1)=-2\sqrt{3}-4$.

Около точката $x_2=\sqrt{3}-1$ производната си сменя знака от – на + $\Rightarrow$ $f_{\min}=f(\sqrt{3}-1)=2\sqrt{3}-4$.▲

Решение. б) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$.

Функцията е дефинирана и непрекъсната в $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$ и диференцируема в $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$. Числителят се анулира в точката $x=0$, която не принадлежи на дефиниционното множество на функцията.

Следователно $f'(x)\neq 0$ $\Rightarrow$ функцията няма локални екстремуми.▲

Решение. в) $f(x)=\sin 2x+x$. Функцията е дефинирана и диференцируема в $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$.

$f'(x)=2\cos 2x+1=0$, $\cos 2x=-\dfrac{1}{2}$, $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ $\Rightarrow$ $2x\in[0,\pi]$ $\Rightarrow$ $2x=\dfrac{2\pi}{3}$ $\Rightarrow$ $x=\dfrac{\pi}{3}$.

Ще използваме втора производна, за да установим дали функцията има локален екстремум. $f''(x)=-4\sin 2x$ и $f''(\dfrac{\pi}{3})=-4\sin\dfrac{2\pi}{3}=-4.\dfrac{\sqrt{3}}{2}<0$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ има локален максимум и $f_{\max}=f(\dfrac{\pi}{3})=\sin\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{3}$.▲

4. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)$.

а) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-2}$; в) $f(x)=\sin 3x-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x$, $x\in[0,\dfrac{\pi}{3}]$.

5. Да се намерят интервалите на монотонност и локалните екстремуми на функцията $f(x)$.

а) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-2}{x^2+2x+2}$; б) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x^2-3x+2}$; в) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}$.

2) Най-голяма и най-малка стойност на функция в краен и затворен интервал

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в краен и затворен интервал $[a,b]$.

Досега изучавахме локалните екстремуми на функцията.

Сега ще разгледаме въпроса за намиране на най-голямата и най-малката ѝ стойност в целия интервал $[a,b]$.

Такива стойности съществуват според теоремата на Вайерщрас.

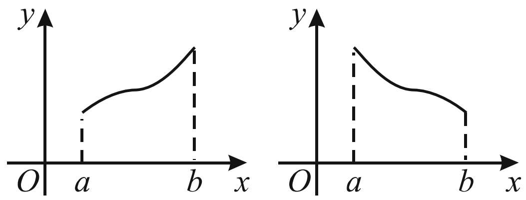
> **Преговор. Теорема на Вайерщрас.**
> Ако една функция е дефинирана и непрекъсната в краен и затворен интервал, то тя достига в него най-голямата и най-малката си стойност.

Най-голямата и най-малката стойност на $f(x)$ в интервала $[a,b]$ ще означаваме съответно $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Най-голямата и най-малката стойност на една функция могат да се достигат или в локалните екстремуми, или в краищата на интервала. В задачи ще използваме следните практически правила.

I. $f(x)$ е растяща или намаляваща в $[a,b]$.

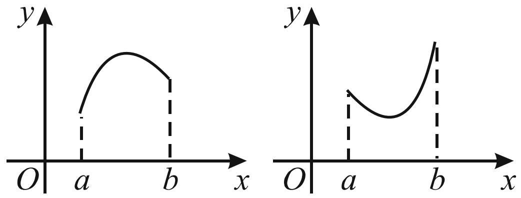
Тогава $f(x)$ няма локални екстремуми в $[a,b]$ и ако $f(x)$ е растяща, то $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)=f(b)$ и $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)=f(a)$; ако $f(x)$ е намаляваща, то $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)=f(a)$ и $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)=f(b)$.



II. $f(x)$ има единствена критична в (a,b) и в нея има локален екстремум.

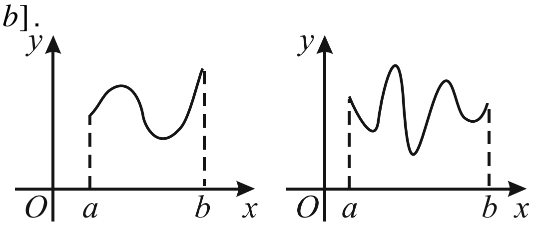
Ако локалният екстремум е максимум, то $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)=f_{\max}$, а $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ е по-малкото от числата $f(a)$ и $f(b)$.

Аналогично се разсъждава при локален минимум.



III. $f(x)$ има повече от един локален екстремум в $[a,b]$.

Тогава $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ е най-голямото от числата: локалните максимуми, $f(a)$ и $f(b)$, а $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ е най-малкото от числата: локалните минимуми, $f(a)$ и $f(b)$.



Коментар. Случаят III може да се използва и вместо случай I и случай II.▲

Ще използваме следните означения: с $\max\{a,b,c\}$ ще означаваме най-голямото от числата a, b и c; с $\min\{a,b,c\}$ ще означаваме най-малкото от числата a, b и c.

6. Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)=x+3$ в интервала $[-1,3]$.

Решение. $f(x)$ е растяща в $[-1,3]$ $\Rightarrow$ $\max\limits_{x\in[-1,3]} f(x)=f(3)=6$ и $\min\limits_{x\in[-1,3]} f(x)=f(-1)=2$.▲

7. Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)=x^2-2x-8$ във всеки от интервалите $[-3,6]$, $[2,6]$ и $[-4,1]$.

Решение. При изследване на квадратна функция ще използваме свойствата на параболата.
Върхът на параболата в този случай е локален минимум при $x=1$ и $f_{\min}=f(1)=-9$.

Нека $x\in[-3,6]$.

В този интервал е върхът на параболата следователно $\min\limits_{x\in[-3,6]} f(x)=f_{\min}=f(1)=-9$.

Пресмятаме $f(-3)=7$ и $f(6)=16$ $\Rightarrow$ $\max\limits_{x\in[-3,6]} f(x)=f(6)=16$.

Нека $x\in[2,6]$.

В този интервал $f(x)$ е растяща.

Пресмятаме $f(2)=-8$ и $f(6)=16$ $\Rightarrow$ $\max\limits_{x\in[2,6]} f(x)=f(6)=16$ и $\min\limits_{x\in[2,6]} f(x)=f(2)=-8$.

Нека $x\in[-4,1]$.

В този интервал функцията е намаляваща.

Пресмятаме $f(-4)=16$ и $f(1)=-9$ $\Rightarrow$ $\max\limits_{x\in[-4,1]} f(x)=f(-4)=16$ и $\min\limits_{x\in[-4,1]} f(x)=f(1)=-9$.▲

8. Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)=x^4-14x^2-24x+50$ във всеки от интервалите $[-3,4]$, $[-2,4]$ и $[1,4]$.

Решение. Намираме екстремумите на функцията.

$f'(x)=4x^3-28x-24=4(x+1)(x+2)(x-3)=0$, $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=3$

Получаваме:

$f_{\min}=f(-2)=58$; $f_{\max}=f(-1)=61$; $f_{\min}=f(3)=-67$.

$$f':\ \begin{array}{ccccccccc} & - & & + & & - & & + & \\ -\infty & & -2 & & -1 & & 3 & & +\infty \end{array}$$

Нека $x\in[-3;4]$.

В този интервал $f(x)$ има три локални екстремума – един локален максимум и два локални минимума.

Намираме стойностите в краищата на интервала: $f(-3)=77$ и $f(4)=-14$.

$\max\limits_{[-3;4]} f(x)=\max\{61,\ 77,\ -14\}=77$, $\min\limits_{[-3;4]} f(x)=\min\{58,\ -67,\ 77,\ -14\}=-67$.

Нека $x\in[-2,4]$.

В този интервал $f(x)$ има два локални екстремума – локален максимум и локален минимум съответно в точките -1 и 3.

Пресмятаме стойностите на функцията в краищата на интервала $f(-2)=58$ и $f(4)=-14$.

Тогава

$\max\limits_{[-2;4]} f(x)=\max\{61,\ 58,\ -14\}=61=f_{\max}=f(-1)$,

$\min\limits_{[-2;4]} f(x)=\min\{-67,\ 58,\ -14\}=-67=f_{\min}=f(3)$.

Нека $x\in[1,4]$.

В отворения интервал $(1,4)$ производната има единствен корен и в него $f(x)$ има локален минимум. Следователно $\min\limits_{[1,4]} f(x)=f_{\min}=f(3)=-67$.

Пресмятаме $f(x)$ в краищата на интервала $f(1)=13$ и $f(4)=-14 \Rightarrow \max\limits_{[1,4]}=f(1)=13$.▲

9. Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)=x^3-12x+1$ в интервала $[a;b]$. В кои точки се достигат тези стойности?

а) $[a,b]=[-3,3]$; б) $[a,b]=[-3,4]$; в) $[a,b]=[-3,5]$.

10. Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)=6x^5-15x^4-70x^3+120x^2+360x-200$ в интервала $[-2,3]$. В кои точки се достигат тези стойности?

3) Най-голяма и най-малка стойност на функция в отворен или безкраен интервал

Ако разглеждаме една функция в отворен интервал (a,b) или в безкраен интервал, тя може да има най-малка и най-голяма стойност, но може и да няма.

Примери.

1) Най-малката и най-голямата стойност на функцията $\sin x$, $x\in(-\infty,+\infty)$ са съответно -1 и 1. Записваме $\min\limits_{(-\infty,+\infty)}\sin x=-1$ и $\max\limits_{(-\infty,+\infty)}\sin x=1$.

2) Функцията $\ln x$, $x\in(0,+\infty)$ няма нито най-малка, нито най-голяма стойност.

3) Функцията x^2, $x\in(-\infty,+\infty)$ има най-малка стойност 0, но няма най-голяма стойност.

11. Да се намери най-малката стойност на функцията $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x$.

Решение. Намираме локалните екстрмуми на $f(x)$: $f'(x)=(x+2)(x+1)(x-1)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ има локални минимуми при $x=-2$ и $x=1$ и локален максимум при $x=-1$.

Тъй като $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$, то най-малката стойност на $f(x)$ ще се достига в някой от локалните ѝ минимуми: $f(-2)=\dfrac{2}{3}$, $f(1)=-\dfrac{19}{12}$ $\Rightarrow$ $\min\limits_{(-\infty,+\infty)} f(x)=-\dfrac{19}{12}$.▲

Ще формулираме едно твърдение, което ще използваме при решаване на задачи.

Твърдение. Нека $f(x)$ е дефинирана и диференцируема в интервал (a,b) (който може да бъде и безкраен) и уравнението $f'(x)=0$ има единствен корен $x_0\in(a,b)$.

Ако $f(x)$ има локален минимум в x_0, то $\min\limits_{x\in(a,b)} f(x)=f_{\min}=f(x_0)$.

Ако $f(x)$ има локален максимум в x_0, то $\max\limits_{x\in(a,b)} f(x)=f_{\max}=f(x_0)$.

12. Да се намери най-малката стойност на функцията $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x-2-x^2}}$.

Решение. Функцията е дефинирана и диференцируема при $x\in(1,2)$.

$f'(x)=\dfrac{2x-3}{2\sqrt{(3x-2-x^2)^3}}$. Определяме знака на числителя: $2x-3=0$, $x=\dfrac{3}{2}$.

Производната сменя знака си около точката $x=\dfrac{3}{2}$ от – на + $\Rightarrow$ $f_{\min}=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=2$.

Тогава $f'(x)=0$ има единствен корен в интервала $(1,2)$ и $f(x)$ има локален минимум и според твърдението $\min\limits_{(1,2)} f(x)=f_{\min}=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=2$.▲

13. Да се намери най-голямата стойност на функцията $f(\alpha)=\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^3\alpha}$ в интервала $(0,\dfrac{\pi}{2})$.

Решение. Тъй като $\sin^2\alpha-\sin^3\alpha=\sin^2\alpha(1-\sin\alpha)>0$, то $f(\alpha)$ е дефинирана за всяко α.

Да означим $\varphi(\alpha)=\sin^2\alpha-\sin^3\alpha$.

Тъй като функцията $y=\sqrt{x}$ е растяща в цялата си дефиниционната област, то $f(\alpha)$ и $\varphi(\alpha)$ ще приемат най-голямата си стойност при едно и също число α. Ето защо ще изследваме функцията $\varphi(\alpha)$.

$\varphi'(\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha=\sin\alpha\cos\alpha(2-3\sin\alpha)=0$.

В интервала $(0,\dfrac{\pi}{2})$ $\sin\alpha\neq0$ и $\cos\alpha\neq0$ $\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$ и $\varphi'(\alpha)=0$ има единствен корен.

За да изследваме $\varphi(\alpha)$ в критичната точка, за която $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$, ще използваме втора производна: $\varphi''(\alpha)=2\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha-6\sin\alpha\cos^2\alpha+3\sin^3\alpha$.

При $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\cos^2\alpha=\dfrac{5}{9}$ и $\varphi''(\alpha)=-\dfrac{10}{9}<0$ $\Rightarrow$ при $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$ функцията $\varphi(\alpha)$ има локален максимум, който е и най-голямата ѝ стойност в $(0,\dfrac{\pi}{2})$.

Това означава, че най-голямата стойност на $f(\alpha)$ се достига при $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$ и $\max\limits_{(0,\frac{\pi}{2})} f(\alpha) = \sqrt{\dfrac{4}{9} - \dfrac{8}{27}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.▲

14. Да се намери най-малката стойност на функцията $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5 - x^2}}$.

15. Да се намери най-голямата стойност на функцията $f(x)$.

а) $f(x) = \ln(3 - x^2)$; б) $f(x) = \ln(x + 2 - x^2)$.

16. Да се намери най-малката стойност на функцията $f(x)$.

а) $f(x) = x - \ln x$; б) $f(x) = x - \ln(x+1)$; в) $f(x) = 2x^2 - \ln x$.

17. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = -\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{3x^4}{2} - \dfrac{11x^3}{3} + 3x^2 + 1$ в интервала $[a,b]$, ако:

а) $[a,b] = [-1,1]$; б) $[a,b] = [0,2]$; в) $[a,b] = [1,4]$.

18. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$ в интервала $[a,b]$, ако:

а) $[a,b] = [-2,-1]$; б) $[a,b] = [-1,1]$; в) $[a,b] = [-1,2]$.

19. Дадена е функцията $f(x) = \sqrt{x^2 + bx + 4}$. Да се изследват интервалите на монотонност и екстремумите, ако:

а) $b = 3$; б) $b = 4$; в) $b = 5$.

20. Дадена е функцията $f(x)$. Да се намери:

а) най-голямата стойност на $f(x)$, ако $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x + 3}}$;

б) най-малката стойност на $f(x)$, ако $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$;

в) най-малката стойност на $f(x)$, ако $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 - 6x - 5}}$;

г) най-голямата стойност на $f(x)$, ако $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - 4x + 3}}$.

21. Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = \sqrt{\sin^2 x + \cos x}$ в интервала $[0, \dfrac{\pi}{2}]$.

22. Да се определят интервалите на монотонност, най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 + ax^2}}$ в интервала $[-1,1]$, ако:

а) $a = 1$; б) $a = -1$.

1.6. Изпъкналост и вдлъбнатост на функция. Инфлексни точки

Определение. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в интервал U.

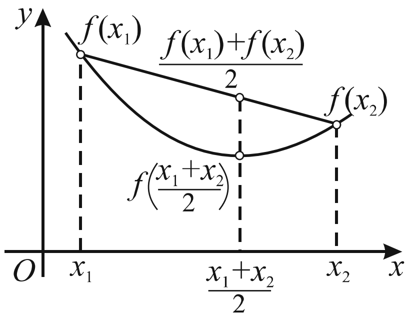
$f(x)$ се нарича **изпъкнала**, ако за всеки две точки x_1 и x_2 от U е изпълнено неравенството

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

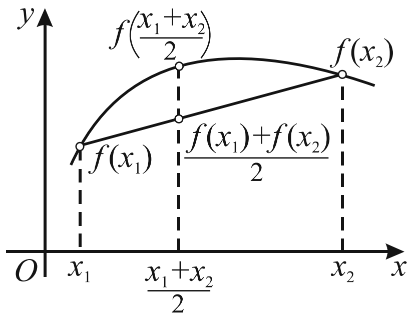
$f(x)$ се нарича **вдлъбната**, ако за всеки две точки x_1 и x_2 от U е изпълнено неравенството

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\ge\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Геометрична интерпретация на определението за изпъкнала и вдлъбната функция.



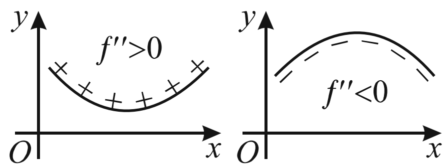
$f(x)$ е изпъкнала



$f(x)$ е вдлъбната ▲

Теорема. (Критерий за изпъкналост на функция)

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната заедно с първата си производна $f'(x)$ в интервал U и съществува $f''(x)$ във вътрешните точки на U. Функцията $f(x)$ е изпъкнала точно когато $f''(x)>0$ за всяко $x\in U$ и е вдлъбната точно когато $f''(x)<0$ за всяко $x\in U$.



1. Да се намерят интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост на функцията $f(x)=x^4+3x^3+3x^2+x+1$.

Решение. Последователно намираме $f'(x)$ и $f''(x)$:

$f'(x)=4x^3+9x^2+6x+1$, $f''(x)=12x^2+18x+6=6(2x^2+3x+1)$.

Корените на квадратния тричлен $2x^2+3x+1$ са $x_1=-1$ и $x_2=-\frac{1}{2}$.

$f''(x)>0$ в $(-\infty,-1)$; $f''(x)<0$ в $(-1,-\frac{1}{2})$; $f''(x)>0$ в $(-\frac{1}{2},+\infty)$.

Окончателно $f(x)$ е изпъкнала в $(-\infty,-1)$, вдлъбната в $(-1,-\frac{1}{2})$ и изпъкнала в $(-\frac{1}{2},+\infty)$.▲

2. Да се намерят интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост на функцията:

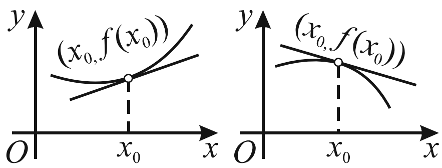
а) $f(x)=3x^5-20x^4+10x^3+180x^2+60x+1$;

б) $f(x)=x^4+2x^3+6x^2+12x+1$;

в) $f(x)=-x^4-10x^3-36x^2+12x+12$.

Нека $f(x)$ е диференцируема функция. В този случай може да се даде друга интерпретация на понятията изпъкналост и вдлъбнатост.

Твърдение. Една диференцируема функция, дефинирана в интервал U, е изпъкнала точно когато за всяко $x_0 \in U$ графиката на $f(x)$ е разположена над допирателната в точката $(x_0, f(x_0))$ и е вдлъбната точно когато графиката на $f(x)$ е разположена под допирателната в точката $(x_0, f(x_0))$.

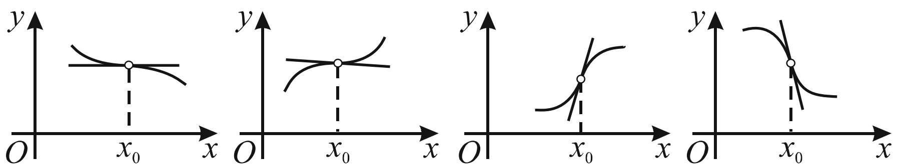


Определение. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервал U и $x_0 \in U$. Точката $(x_0, f(x_0))$ се нарича **инфлексна точка** за функцията, ако тя отделя частта от кривата $y = f(x)$, в която $f(x)$ е изпъкнала, от частта, в която $f(x)$ е вдлъбната.

Казваме, че $f(x)$ има инфлексия при $x = x_0$ или в точката $(x_0, f(x_0))$.

Геометрична интерпретация на определението за инфлексия

Твърдение. Около инфлексна точка графиката на $f(x)$ е разположена от различни страни на допирателната в тази точка.



▲

Теорема. (Необходимо условие за инфлексия) Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в интервала U, x_0 е вътрешна за U и $f''(x_0)$ съществува. Ако $f(x)$ има инфлексия при $x = x_0$, то $f''(x_0) = 0$.

Тази теорема показва, че абсцисите на инфлексните точки са сред корените на уравнението $f''(x) = 0$.

Теорема. (Критерий за инфлексия) Нека $f(x)$ има втора производна в отворен интервал (p, q) на точката x_0 и $f''(x)$ има постоянен знак във всеки от интервалите (p, x_0) и (x_0, q).

Ако $f''(x)$ има различни знаци в (p, x_0) и (x_0, q), то $(x_0, f(x_0))$ е инфлексна точка за $f(x)$.

Ако $f''(x)$ има еднакви знаци в (p, x_0) и (x_0, q), то $(x_0, f(x_0))$ не е инфлексна точка за $f(x)$.

3. Намерете абсцисите на инфлексните точки на функцията $f(x)$ или докажете, че функцията няма инфлексни точки.

а) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$;

б) $f(x) = x^4 + 6x^2 + 12x + 1$;

в) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 12x + 1$.

4. Да се намерят абсцисите на точките на екстремум и инфлексия на функцията

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + x^2 - 8x + 1.$$

Решение. Намираме и изследваме знака на f' и на f''.

$f'(x)=x^3-4x^2+2x-8=(x-4)(x^2+2)=0$

$x=4$.

$f''(x)=3x^2-8x+2=0$,

$x_1=\dfrac{4-\sqrt{10}}{3}$, $x_2=\dfrac{4+\sqrt{10}}{3}$.

Попълваме резултатите в таблица.

x	$-\infty$	x_1		x_2		4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	инфл. т.	$\searrow$	инфл. т.	$\searrow$	min	$\nearrow$

Получаваме, че $f(x)$ има минимум при $x=4$ и инфлексия при $x_1=\dfrac{4-\sqrt{10}}{3}$ и $x_2=\dfrac{4+\sqrt{10}}{3}$.▲

5. Да се намерят локалните екстремуми, интервалите на изпъкналост и инфлексните точки на функцията $f(x)$.

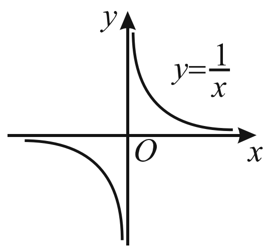
а) $f(x)=x^4+5x^3+6x^2-4x-8$;

б) $f(x)=x^3-2x^2-7x-3$;

в) $f(x)=\dfrac{x}{1+2x^2}$.

1.7. Асимптоти

Да разгледаме графиката на функцията $f(x)=\dfrac{1}{x}$.



При $x\to 0,\ x<0\ f(x)\to-\infty$, при $x\to 0,\ x>0\ f(x)\to+\infty$, като графиката на функцията се приближава неограничено до правата $x=0$, но никога не се допира до нея.

При $x\to+\infty,\ f(x)\to 0$, при $x\to-\infty,\ f(x)\to 0$, като графиката на функцията се приближава неограничено до правата $y=0$, но никога не се допира до нея.

Права, до която графиката на функцията се приближава неограничено, се нарича асимптота. Ще дадем следното строго определение.

Определение. Нека $f(x)$ е функция, дефинирана в отворен интервал на точката x_0. Правата $x=x_0$ се нарича **вертикална асимптота** към графиката на $f(x)$, ако е изпълнено поне едно от условията $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} f(x)=-\infty$ или $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} f(x)=+\infty$, или $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} f(x)=-\infty$, или $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} f(x)=+\infty$.

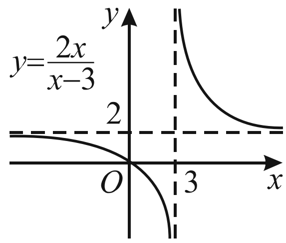
Нека $f(x)$ е дефинирана в някой от интервалите $(-\infty,+\infty)$, $(-\infty,a)$ или $(b,+\infty)$.

Определение. Правата $y=p$ се нарича **хоризонтална асимптота** към графиката на $f(x)$, ако $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=p$ или $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=p$.

1. Да се намерят вертикалните и хоризонталните асимптоти към графиката на функцията $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$.

Решение. Функцията е дефинирана за всяко $x\neq 3$. Намираме границите при $x\to 3$:

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\dfrac{2x}{x-3}=-\infty$ и $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\dfrac{2x}{x-3}=+\infty$. Следователно функцията има вертикална асимптота $x=3$ при x, клонящо към 3 отляво и при x, клонящо към 3 отдясно.



Намираме границите при $x\to\pm\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}=2 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}=2.$$

Следователно функцията има хоризонтална асимптота $y=2$ при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$. Графиката на функцията е показана на чертежа.▲

2. Да се намерят вертикалните и хоризонталните асимптоти към графиката на функцията.

а) $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$; б) $f(x)=\dfrac{3x-2}{x+2}$;

в) $f(x)=\dfrac{2x-3}{2x+1}$; г) $f(x)=\dfrac{3x}{2-x}$.

3. Да се намери най-голямата стойност, абсцисите на инфлексните точки и асимптотите на функцията $f(x)$.

а) $f(x)=e^{-\frac{(x-6)^2}{4}}$;

б) $f(x)=e^{-\frac{(x-4)^2}{6}}$;

в) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

4. За кои стойности на параметъра d вертикалната асимптота на функцията $f(x)=\dfrac{3x+5}{x+d}$:

а) съвпада с ординатната ос;

б) пресича хоризонталната асимптота на $f(x)$ във втори квадрант;

в) пресича хоризонталната асимптота на $f(x)$ в първи квадрант?

5. За кои стойности на параметъра $a\neq\pm 1$ функцията $f(x)=\dfrac{ax-1}{(a-1)x-2}$ има вертикална и хоризонтална асимптотота, които се пресичат:

а) в първи квадрат;

б) във втори квадрант;

в) в трети квадрант;

г) в четвърти квадрант?

1.8. Допирателни. Допирателни към криви от втора степен

Нека в равнината е дадена правоъгълна координатна система Oxy. Да разгледаме квадратното уравнение с две неизвестни $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$, където поне един от коефициентите a, b и c е различен от нула.

Интересуваме се от множеството от точки в равнината, което се задава с това уравнение. Може да се докаже следната

Теорема. Всяко уравнение от втора степен с две неизвестни определя в равнината едно от следните множества от точки: елипса, хипербола, парабола, две пресекателни прави, две успоредни прави, права, точка, празно множество.

Според тази теорема единствените криви от втора степен в равнината са елипса, хипербола и парабола (и окръжност като частен случай на елипса).

Да преговорим

Елипса

Елипса се нарича множество от точки в равнината, за които сборът от разстоянията до две дадени точки в равнината F_1 и F_2 е постоянно число, по-голямо от разстоянието F_1F_2.

Да означим постоянното число в определението с a, $F_1F_2=c$ и $b=\sqrt{a^2-c^2}$. Числата a и b се наричат съответно голяма и малка полуос на елипсата.

Каноничното уравнение на елипсата е $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Когато $a=b$, елипсата е окръжност с радиус a и център точката $(0,0)$. Уравнението $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ се нарича нормално уравнение на окръжност с център $C(\alpha,\beta)$ и радиус R.

Хипербола

Хипербола се нарича множество от точки в равнината, за които абсолютната стойност на разликата на разстоянията до две дадени точки в равнината F_1 и F_2 е постоянно число, по-малко от разстоянието F_1F_2.

Да означим даденото число в определението с $2a$, $F_1F_2=c$ и $b=\sqrt{c^2-a^2}$. Числата a и b се наричат съответно реална и имагинерна полуос на хиперболата.

Каноничното уравнение на хиперболата е $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Ще добавим, че правите $g_1:\ y=\dfrac{b}{a}x$ и $g_2:\ y=-\dfrac{b}{a}x$ се наричат асимптоти на хиперболата.

Парабола

Парабола се нарича множеството от точки в равнината, които са равноотдалечени от дадена точка F и дадена права g, като $F\notin g$.

Да означим разстоянието от F до g с p. Каноничното уравнение на параболата е $y^2=2px$.

Оста Ox се нарича ос на параболата.

В обучението по математика в предходните класове сме представяли параболата с уравнение $y=ax^2$ и по-общо параболата е крива, която е графика на функцията $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$.

1) Допирателна към окръжност

Определение. Права, която има само една обща точка с окръжност, се нарича **допирателна** към окръжността.

Общата им точка се нарича **допирна точка**.

Нека окръжността е зададена с нормалното си уравнение $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$, където (α,β) е центърът, а R е радиусът на окръжността.

Може да се докаже следната

Теорема. Правата $t:\ (x_0-\alpha)(x-\alpha)+(y_0-\beta)(y-\beta)=R^2$ е допирателна към окръжността $k:\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ в точката $M_0(x_0,y_0)$.

1. Да се намери уравнението на допирателната към окръжността с уравнение $x^2+y^2-4x-6y+11\frac{3}{4}=0$ в точката $M(1,\ 2\frac{1}{2})$.

Решение. Записваме уравнението на окръжността в нормален вид $x^2-4x+4+y^2-6y+9-13+11\frac{3}{4}=0$, $(x-2)^2+(y-3)^2=\frac{5}{4}$.

Координатите на центъра на окръжността са $(2,3)$ и радиусът е $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Уравнението на допирателната в точката $M(1,\ 2\frac{1}{2})$ е:

$t:\ (1-2)(x-2)+(2\frac{1}{2}-3)(y-3)=\frac{5}{4}$ или $t:\ 4x+2y-9=0$.▲

2. Да се намери допирателната към дадената окръжност в дадената точка.

а) $x^2+y^2=8$, (2, 2);

б) $(x-1)^2+(y-1)^2=8$, (3, 3);

в) $(x+2)^2+(y-7)^2=10$, (1, 8);

г) $x^2+y^2-8x+16y+60=0$, (2, −12).

3. Да се намерят допирателните към окръжността $(x+7)^2+(y-1)^2=50$, спуснати от точка $A(-22,-4)$, външна за окръжността и да се намерят допирните точки.

Решение.

Нека точка $M(x_0,y_0)$ е някоя от търсените допирни точки, тогава уравнението на допирателната в M е $(x_0+7)(x+7)+(y_0-1)(y-1)=50$.

Точката $A(-22,-4)$ лежи на допирателната $\Rightarrow$ $(x_0+7)(-22+7)+(y_0-1)(-4-1)=50$.

M е точка от окръжността $\Rightarrow$ $(x_0+7)^2+(y_0-1)^2=50$.

Последните две равенства образуват система, чиито решения са координатите на допирните точки: $(x_0,y_0)=(-12,6)$ и $(x_0,y_0)=(-8,-6)$.

Допирателната в $(-12,\ 6)$ е $(-12+7)(x+7)+(6-1)(y-1)=50$, $x-y+18=0$.

Допирателната в $(-8,\ -6)$ е $(-8+7)(x+7)+(-6-1)(y-1)=50$, $x+7y+50=0$.▲

4. Да се намерят допирателните към дадената окръжност, спуснати от точка A, външна за окръжността и да се намерят допирните точки.

а) $(x+2)^2+(y+10)^2=25$, $A(-3,-3)$;

б) $x^2+y^2-2x+16y+25=0$, $A(-3,-16)$;

в) $(x-6)^2+(y-3)^2=37$, $A(13,-2)$.

5. Да се намери пресечната точка на допирателните към дадената окръжност в дадените точки.

а) $(x-1)^2+(y+3)^2=20$, $(5, -1)$, $(-1, 1)$;

б) $x^2+y^2-2x-16y+40=0$, $(-3, 5)$, $(4, 4)$;

в) $x^2+y^2-10y=0$, $(-3, 9)$, $(-4, 2)$;

г) $(x-2)^2+(y-5)^2=20$, $(4, 9)$, $(-2, 3)$.

6. Намерете общите уравнения на допирателните към окръжността $x^2+y^2=13$, успоредни на правата $2x-3y+5=0$.

Решение. Нека точка $M(x_0, y_0)$ е една от допирните точки на търсените допирателни към окръжността. Уравнението на допирателната в точката $M(x_0, y_0)$ е $x_0x+y_0y=13$. Тази права е успоредна на правата $2x-3y+5=0$ $\Rightarrow$ коефициентите пред x и y са пропорционални:

$\dfrac{x_0}{2}=\dfrac{y_0}{-3}$, откъдето $y_0=-\dfrac{3x_0}{2}$.

$M(x_0, y_0)$ е точка от окръжността $x^2+y^2=13$ $\Rightarrow$ ${x_0}^2+{y_0}^2=13$, ${x_0}^2+\dfrac{9}{4}{x_0}^2=13$, $x_0=\pm 2$

$\Rightarrow$ $y_0=\mp 3$, допирните точки са $M_1(2,-3)$, $M_2(-2,3)$.

Допирателната в $M_1(2,-3)$ е $2x-3y-13=0$.

Допирателната в $M_2(-2,3)$ е $2x-3y+13=0$.▲

7. Намерете общите уравнения на допирателните към дадената окръжност, успоредни на дадената права.

а) $x^2+y^2=50$, $5x+5y-12=0$;

б) $(x+3)^2+y^2=9$, $y=4$;

в) $x^2+y^2+10x-2y-46=0$, $x+y-3=0$.

8. Правата $3x-y-10=0$ е допирателна към окръжността $x^2+y^2=10$ в точката $(3,-1)$:

☒ **А)** $(-3,-1)$ **Б)** $(-3,1)$ **В)** $(3,-1)$ **Г)** $(3,1)$

9. Уравнението на допирателната към окръжността $x^2+y^2=29$ в точка $(2,5)$ е:

☒ **А)** $2x+5y-29=0$ **Б)** $2x-5y+29=0$ **В)** $2x+5y+29=0$ **Г)** $2x-5y-29=0$

10. Уравненията на правите, допирателни към окръжността $x^2+y^2=9$ през външната точка $(-6, -3)$, са:

☒ **А)** $y=-6$ и $4x-3y+15=0$ **Б)** $y=-3$ и $6x+3y+9=0$

В) $y=-9$ и $6x+3y-9=0$ **Г)** $y=-3$ и $4x-3y+15=0$

2) Допирателна към елипса

Нека елипсата е зададена с каноничното уравнение $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Определение. Права, която има само една обща точка с елипса, се нарича допирателна към елипсата. Общата точка се нарича **допирна точка**.

Теорема. Правата $Ax+By+C=0$ е допирателна към елипсата $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ точно когато

$$a^2A^2+b^2B^2-C^2=0.$$

Доказателство. В общото уравнение на права поне един от коефициентите A или B е различен от 0. Нека $B\neq 0$.

Правата и елипсата имат само една обща точка точно когато системата $\left|\begin{array}{l} b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \\ Ax+By+C=0 \end{array}\right.$

има единствено решение. Изразяваме $y=\dfrac{-Ax-C}{B}$ от второто уравнение и заместваме в първото:

$$b^2x^2+a^2\,\frac{A^2x^2+2AC\,x+C^2}{B^2}=a^2b^2,$$

$$(a^2A^2+b^2B^2)x^2+2a^2AC\,x+a^2C^2-a^2b^2B^2=0.$$

Системата има единствено решение точно когато това квадратно уравнение има дискриминанта, равна на 0.

$$D'=a^4A^2C^2-(a^2A^2+b^2B^2)(a^2C^2-a^2b^2B^2)\;=\;a^2b^2B^2(a^2A^2+b^2B^2-C^2).$$

Тъй като $a^2b^2B^2>0$, то $D'=0\;\Leftrightarrow\;a^2A^2+b^2B^2-C^2=0$.▲

Следствие. Правата *t* с уравнение $t:\ \dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ е допирателна към елипсата $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ в точката ѝ $M_0(x_0,y_0)$.

Доказателство. Да запишем уравнението на допирателната *t* във вида

$t:\ Ax+By+C=0$, където $A=\dfrac{x_0}{a^2}$, $B=\dfrac{y_0}{b^2}$, $C=-1$. Проверяваме условието *t* да бъде допирателна към елипсата: $a^2A^2+b^2B^2-C^2=a^2\dfrac{x_0^{\,2}}{a^4}+b^2\dfrac{y_0^{\,2}}{b^4}-1=\dfrac{x_0^{\,2}}{a^2}+\dfrac{y_0^{\,2}}{b^2}-1=0$.

Последното равенство е изпълнено, тъй като точката $M_0(x_0,y_0)$ лежи на елипсата и съгласно теоремата правата *t* е допирателна към елипсата в точката $M_0(x_0,y_0)$.▲

11. Да се намери уравнението на допирателната към дадената елипса в точката M.

а) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1$, $M(3,2)$; б) $x^2+2y^2=14$, $M(-2,\sqrt{5})$.

Решение. а) Уравнението на допирателната е $t:\ \dfrac{3x}{12}+\dfrac{2y}{8}=1$, $t:\ x+y-4=0$.▲

Решение. б) Каноничното уравнение на елипсата е $\dfrac{x^2}{14}+\dfrac{y^2}{7}=1$. Уравнението на допирателната е

$t:\ \dfrac{-2x}{14}+\dfrac{\sqrt{5}y}{7}=1$, $x-\sqrt{5}y+7=0$.▲

12. Да се намери уравнението на допирателната към дадената елипса в точката M.

а) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{36}=1$, $M(3,3)$; б) $3x^2+y^2=57$, $M(4,3)$;

в) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{60}=1$, $M(\sqrt{2},-6)$; г) $9x^2+4y^2=36$, $M(2,0)$.

13. Да се намерят допирателните към елипсата $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$, спуснати от точка $P(6,1)$, външна за елипсата и да се намерят допирните точки.

Решение. Нека точка $M(m,n)$ е точка от елипсата. Тогава $\frac{m^2}{20}+\frac{n^2}{5}=1$.

Записваме уравнението на допирателната към елипсата в точка M: $\frac{mx}{20}+\frac{ny}{5}=1$.

Точка $P(6,1)$ е точка от допирателната $\Rightarrow \frac{m6}{20}+\frac{n}{5}=1$.

Получаваме система за m и n:

$\left|\begin{array}{l}\frac{m^2}{20}+\frac{n^2}{5}=1\\ \frac{m6}{20}+\frac{n}{5}=1\end{array}\right.$, чиито решения $(4,-1)$ и $(2,2)$ са допирните точки.

Правата през точка $P(6,1)$, която се допира до елипсата в точка $(4,-1)$ е $x-y-5=0$.

Правата през точка $P(6,1)$, която се допира до елипсата в точка $(2,2)$ е $x+4y-10=0$.▲

14. Да се намерят допирателните към дадената елипса, спуснати от точка A, външна за елипсата и да се намерят допирните точки.

а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{64}=1$, $A(4,4)$; б) $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{64}=1$, $A(4,8)$;

в) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$, $A(1,14)$; г) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, $A(0,2)$.

15. Да се намери пресечната точка на допирателните към дадената елипса в дадените точки.

а) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$, $(-2,2)$, $(2,2)$;

б) $2x^2+y^2=36$, $(0,6)$, $(4,2)$;

в) $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{9}=1$, $(5,2)$, $(\frac{20}{3},-\frac{1}{3})$;

г) $\frac{x^2}{70}+\frac{y^2}{14}=1$, $(-5,-3)$, $(-5,3)$.

16. Намерете каноничното уравнение на елипса с оси върху координатните оси, ако правата $x+y-3=0$ е допирателна към елипсата в точката $(2,1)$.

Решение. Нека каноничното уравнение на елипсата е $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Уравнението на допирателната към тази елипса в точката $(2,1)$ е $\frac{2x}{a^2}+\frac{y}{b^2}=1$. От друга страна по условие това уравнение е $x+y-3=0$, следователно двете прави съвпадат, условието за което е $\frac{\frac{2}{a^2}}{1}=\frac{\frac{1}{b^2}}{1}=\frac{-1}{-3}$, откъдето $a^2=6$ и $b^2=3$. Каноничното уравнение на елипсата е $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.▲

17. Намерете каноничното уравнение на елипса с оси върху координатните оси, ако дадената права е допирателна към елипсата в точката T.

а) $x-3y+6=0$, $T(-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$;

б) $x+4y+10=0$, $T(-2,-2)$;

в) $x+y+2=0$, $T(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$;

г) $x+2y-9=0$, $T(5,2)$.

18. Да се намери каноничното уравнение на елипса с оси върху координатните оси, към която правите $2x+y-21=0$ и $x-4y+21=0$ са допирателни.

Решение. Нека уравнението на елипсата е $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Дадените прави са допирателни към елипсата и от теоремата получаваме системата:

$\left|\begin{array}{l} a^2 4+b^2-21^2=0 \\ a^2+b^2 16-21^2=0 \end{array}\right.$, чието решение е $a^2=105$ и $b^2=21$. Елипсата е $\frac{x^2}{105}+\frac{y^2}{21}=1$.▲

19. Да се намери каноничното уравнение на елипса с оси върху координатните оси, към която дадените прави са допирателни.

а) $x+y-7=0$, $x-13y+35=0$;

б) $x+3y-15=0$, $7x-9y-75=0$.

20. Проверете коя права към коя елипса е допирателна и намерете допирните точки.

а) $x+6y-24=0$, $x-2y-4=0$, $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{12}=1$, $\frac{x^2}{12}+y^2=1$;

б) $x+6y-12=0$, $x+2y-12=0$, $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{3}=1$, $\frac{x^2}{108}+\frac{y^2}{9}=1$.

3) Допирателна към хипербола

Определение. Права, която не е успоредна на асимптотите на хиперболата и има само една обща точка с нея, се нарича **допирателна** към хиперболата. Общата им точка се нарича **допирна** точка.

Теорема. Правата $Ax+By+C=0$ е допирателна към хиперболата $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ точно когато

$$a^2A^2-b^2B^2-C^2=0.$$

Следствие. Правата t с уравнение $t:\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ е допирателна към хиперболата $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в точката ѝ $M_0(x_0,y_0)$.

На доказателството на тези две твърдения няма да се спираме.

21. Да се намери допирателната към дадената хипербола в точката M.

а) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{12}=1$, $M(12,6)$;

б) $x^2-3y^2=54$, $M(9,3)$;

в) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$, $M(6,2)$;

г) $x^2-4y^2=28$, $M(8,3)$.

22. Дадени са хипербола и точка, нележаща на хиперболата. Да се намерят допирателните от точката към хиперболата и допирните точки.

а) $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$, $(2,-5)$; б) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$, $(6,6)$; в) $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{12}=1$, $(-4,-10)$.

23. Намерете пресечната точка на допирателните към дадената хипербола в дадените точки.

а) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$, $(-3,-1)$, $(9,-5)$; б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$, $(-21,-12)$, $(-6,-3)$;

в) $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{8}=1$, $(-18,-10)$, $(6,-2)$; г) $\frac{x^2}{54}-\frac{x^2}{18}=1$, $(9,3)$, $(27,15)$.

24. Да се намери каноничното уравнение на хипербола с оси върху координатните оси, ако допирателната ѝ в точката $(10,3)$ е $5x-6y-32=0$.

Решение. Нека каноничното уравнение на хиперболата е $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Уравнението на допирателната в точката $(10,3)$ е $\frac{10x}{a^2}-\frac{3y}{b^2}=1$.

От друга страна това уравнение е $5x-6y-32=0$. Следователно двете прави съвпадат, условието за което е $\frac{\frac{10}{a^2}}{5}=\frac{\frac{-3}{b^2}}{-6}=\frac{-1}{-32}$, откъдето $a^2=64$ и $b^2=16$.

Хиперболата е $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1$.▲

25. Да се намери каноничното уравнение на хипербола с оси върху координатните оси, ако дадената права е допирателна към хиперболата в дадената точка.

а) $9x-16y-34=0$, $(18,8)$;

б) $5x-9y-19=0$, $(20,9)$;

в) $x-2y-3=0$, $(15,6)$.

26. Да се намери каноничното уравнение на хипербола с оси върху координатните оси, към която дадените прави са допирателни.

а) $4x+y-21=0$, $2x-3y-7=0$;

б) $x-y+2=0$, $3x-5y+2=0$.

27. Проверете коя права към коя хипербола е допирателна и намерете допирните точки.

а) $2x-3y-11=0$, $2x+3y+10=0$, $\dfrac{x^2}{70}-\dfrac{y^2}{20}=1$, $\dfrac{x^2}{55}-\dfrac{y^2}{11}=1$;

б) $x+2y+6=0$, $x+y+6=0$, $\dfrac{x^2}{60}-\dfrac{y^2}{24}=1$, $\dfrac{x^2}{84}-\dfrac{y^2}{12}=1$.

4) Допирателна към парабола

Ще използваме, че параболата е крива, която е графиката на функцията $f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ и тогава допирателната ѝ в точката $(x_0, f(x_0))$ се задава с уравнението

$$t:\ y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

28. Намерете допирателната към параболата $y=x^2+3x+4$ в точката $(-4,8)$.

Решение. Уравнението на допирателната е $t:\ y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Пресмятаме $f'(x)=2x+3$, $f'(-4)=-5$ и $f(-4)=8$ и получаваме $t:\ y=-5(x+4)+8,\quad 5x+y+12=0$.▲

29. Намерете допирателната към дадената парабола в дадената точка.

а) $y=x^2+2x+2$, $(0,2)$;

б) $y=x^2-4x-3$, $(-1,2)$;

в) $y=2x^2-10x-2$, $(5,-2)$;

г) $y=2x^2+4x-2$, $(-2,-2)$.

30. Дадена е парабола $y=x^2-10x+12$ и точка $(7,-10)$, нележаща на нея. Да се намерят допирателните от точката към параболата и допирните точки.

Решение. а) Правата $t:\ y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ е допирателна в точка (x_0, y_0) от параболата.

Имаме $f'(x)=2x-10$, $f'(x_0)=2x_0-10$ и $f(x_0)=x_0^2-10x_0+12$.

За допирателната получаваме $t:\ y=(2x_0-10)(x-x_0)+x_0^2-10x_0+12$.

Ще определим x_0 от условието, че t минава през точка $(x,y)=(7,-10)$:

$$t:\ -10=(2x_0-10)(7-x_0)+x_0^2-10x_0+12 \quad\Leftrightarrow\quad x_0^2-14x_0+48=0$$

Корените на полученото квадратно уравнение са 6 и 8. Тогава допирните точки са $(6, -12)$ и $(8, -4)$. Получаваме допирателните:

$t_1:\ 2x - y - 24 = 0$ в точката $(6, -12)$ и $t_2:\ 6x - y - 52 = 0$ в точката $(8, -4)$.▲

31. Дадени са парабола и точка, нележаща на параболата. Да се намерят допирателните от точката към параболата и допирните точки.

а) $y = \dfrac{x^2}{2} + 5$, $(3,9)$;

б) $y = \dfrac{x^2}{6} + x - 1$, $(-3,-4)$;

в) $y = x^2 + x + 1$, $(0,0)$;

г) $y = -5x^2 - 2x + 1$, $(0,6)$.

32. Правите f и g са допирателни към дадената парабола в дадените точки. Да се намери пресечната точка на f и g.

а) $y = x^2 - 2x + 1$, $(2,1)$, $(4,9)$;

б) $y = -x^2 + 7x - 5$, $(3,7)$, $(1,1)$;

в) $y = x^2 + 4x - 5$, $(-7,16)$, $(-5,0)$;

г) $y = x^2 + 8x + 8$, $(-6,-4)$, $(-2,-4)$.

33. Да се намери парабола с уравнение $f(x) = y = x^2 + bx + c$, ако правите $3x - y - 1 = 0$ и $7x - y - 5 = 0$ са допирателни към нея.

Решение. Нека правите се допират до параболата съответно в точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Тогава ъгловите им коефициенти са $f'(x_1) = 3$ и $f'(x_2) = 7$, откъдето получаваме уравненията $2x_1 + b = 3$ и $2x_2 + b = 7$.

Неизвестните коефициенти b и c и координатите на допирните точки намираме от системата:

$$\left|\begin{array}{l} y_1 = 3x_1 - 1 \\ y_2 = 7x_2 - 5 \\ 2x_1 + b = 3 \\ 2x_2 + b = 7 \\ y_1 = x_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = x_2^2 + bx_2 + c \end{array}\right.$$

Решението на системата е $b = 3$, $c = -1$, $x_1 = 0$, $y_1 = -1$, $x_2 = 2$, $y_2 = 9$. Търсената парабола е $y = x^2 + 3x - 1$.▲

34. Да се намери парабола с уравнение $y = x^2 + bx + c$, ако дадените прави са допирателни към нея.

а) $6x + y + 30 = 0$, $2x + y + 14 = 0$;

б) $y = -8$, $4x - y + 4 = 0$;

в) $2x + y - 2 = 0$, $6x - y - 6 = 0$.

35. Намерете допирната точка на дадената права към дадената парабола.

а) $x - y + 2 = 0$, $y = -x^2 + 5x - 2$;

б) $4x - y - 2 = 0$, $y = x^2 - 2x + 7$;

в) $x - y - 10 = 0$, $y = x^2 + 5x - 6$;

г) $2x - y + 1 = 0$, $y = x^2 - 2x + 3$.

1.9. Изследване на полиномна функция. Графика

Нека $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ е полином от степен n на променливата x.

Да разгледаме функцията $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$.

Функцията $f(x)$ е дефинирана за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$ и има производни от произволен ред.

Функцията няма асимптоти и не е периодична.

Ще изследваме поведението на функцията в следния ред:
1) Установяване дали функцията е четна или нечетна.
2) Намиране на интервалите на монотонност и екстремумите.
3) Намиране на интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост и точките на инфлексия.
4) Допълнителни изследвания: Намиране на $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$; изчисляване на някои функционални стойности.
5) Построяване на графиката.

1. Да се изследва изменението на функцията $f(x)$ и да се построи графиката ѝ.

а) $f(x) = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{3x^2}{2} - 2$; б) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$;

в) $f(x) = x^2 - x^4$; г) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 4$.

Решение. а) $f(x) = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{3x^2}{2} - 2$.

1) $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{2} - \dfrac{3(-x)^2}{2} - 2 = -\dfrac{x^3}{2} - \dfrac{3x^2}{2} - 2 \quad \Rightarrow \quad f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x) \quad \Rightarrow$ функцията нито е четна, нито е нечетна.

2) Намираме $f'(x)$ и решаваме уравнението $f'(x) = 0$, $f'(x) = \dfrac{3x^2}{2} - 3x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$,

$f(x)$ е растяща в $(-\infty, 0)$, намаляваща в $(0, 2)$ и растяща в $(2, +\infty)$.

Има локален максимум при $x = 0$ и локален минимум при $x = 2$.

3) Намираме $f''(x)$ и решаваме уравнението $f''(x) = 0$, $f''(x) = 3x - 3 = 0$, $x = 1$.

$f(x)$ е вдлъбната в $(-\infty, 1)$ и изпъкнала в $(1, +\infty)$. Има инфлексия при $x = 1$.

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $f_{\max} = f(0) = -2$, $f_{\min} = f(2) = -4$, инфлексия при $f(1) = -3$.

Резултатите попълваме в таблица.

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-2 max	$\searrow$	-3 инфл.т.	$\searrow$	-4 min	$\nearrow$

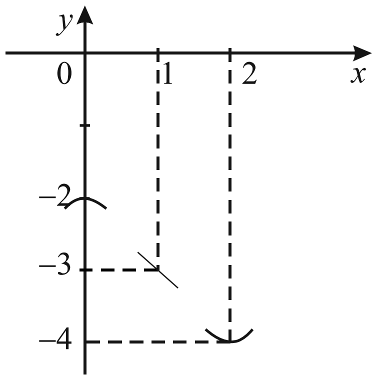
5) Построяваме координатна система и отбелязваме получените характерни точки.

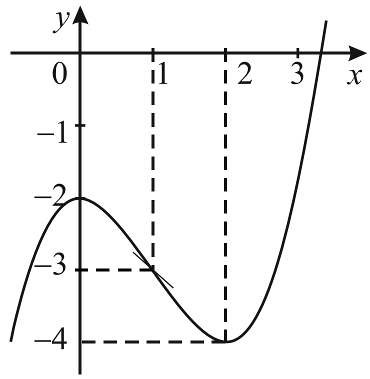
В точката $(0,-2)$ функцията има локален максимум. В тази точка поставяме малка вдлъбната дъгичка.

В точката $(2,-4)$ функцията има локален минимум. В тази точка поставяме малка изпъкнала дъгичка.

В точката $(1,-3)$ функцията има инфлексия. В тази точка поставяме малка чертичка, за да покажем, че графиката около тази точка ще бъде от двете страни на допирателната.

Начертаваме графиката като отчетем и границата на функцията при $x \to \pm\infty$.





▲

Решение. б) $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2$.

1) Функцията нито е четна, нито е нечетна.

2) Намираме $f'(x)$ и решаваме уравнението $f'(x)=0$.

$f'(x)=12x(x-1)^2=0$, $x_1=0$, $x_2=1$,

$f(x)$ намалява в $(-\infty,0)$ и расте в $(0,+\infty)$. При $x=0$ има локален минимум.

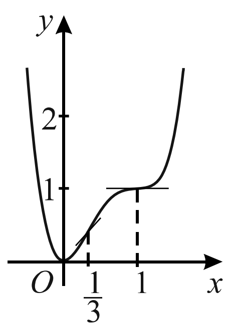
3) Намираме $f''(x)$ и решаваме уравнението $f''(x)=0$.

$f''(x)=12(3x^2-4x+1)=0$, $x_1=1$, $x_2=\dfrac{1}{3}$.

$f(x)$ е изпъкнала в $(-\infty,\dfrac{1}{3})$, вдлъбната в $(\dfrac{1}{3},1)$ и изпъкнала в $\left(1,+\infty\right)$. Има инфлексия при $x=1$ и $x=\dfrac{1}{3}$.

4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$. Пресмятаме: $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{11}{27}\approx 0,41$.

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	$\frac{11}{27}$ инфл. т.	$\nearrow$	1 инфл. т.	$\nearrow$



▲

Решение. в) $f(x)=x^2-x^4$.

1) $f(-x)=(-x)^2-(-x)^4=x^2-x^4=f(x)$ следователно $f(x)$ е четна.

2) Намираме $f'(x)$ и решаваме уравнението $f'(x)=0$.

$f'(x)=2x(1-2x^2)=0$, $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$f(x)$ е растяща в $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, намаляваща в $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$, растяща в $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и намаляваща в $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.

Има локален максимум при $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и локален минимум при $x=0$.

3) Намираме $f''(x)$ и решаваме уравнението $f''(x)=0$, $f''(x)=2(1-6x^2)$, $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$.

$f(x)$ е вдлъбната в $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, изпъкнала в

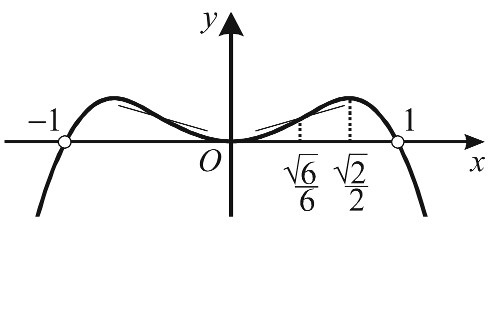
$\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ и вдлъбната в $\left(\frac{\sqrt{6}}{6},+\infty\right)$. Има инфлексия при $x=-\frac{\sqrt{6}}{6}$ и при $x=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty$.

Пресмятаме $f(0)=0$, $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{4}$, $f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=\frac{5}{36}\approx 0{,}14$.

Лесно можем да намерим и корените на уравнението $f(x)=x^2-x^4=0$, $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm1$ $\Rightarrow$ $f(-1)=f(1)=0$.

x	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}}{6}$	0	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		0	–	0	+	0		–
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\frac{1}{4}$ max	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$ max	0	$\searrow$
$f''(x)$			–	0	+	0	–		
$f(x)$			$\cap$	$\frac{5}{36}$ инфл.	$\cup$	$\frac{5}{36}$ инфл.	$\cap$		



▲

Решение. г) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-3x^2+4$.

1) Функцията нито е четна, нито е нечетна.

2) Намираме $f'(x)$ и решаваме уравнението $f'(x)=0$.

$f'(x)=x(x-2)(x+3)=0$, $x_1=-3$, $x_2=0$, $x_3=2$.

$f(x)$ е намаляваща в $(-\infty,-3)$, растяща в $(-3,0)$, намаляваща в $(0,2)$ и растяща в $(2,+\infty)$.

Има локални минимуми при $x=-3$ и при $x=2$ и локален максимум при $x=0$.

3) Намираме $f''(x)$ и решаваме уравнението $f''(x)=0$.

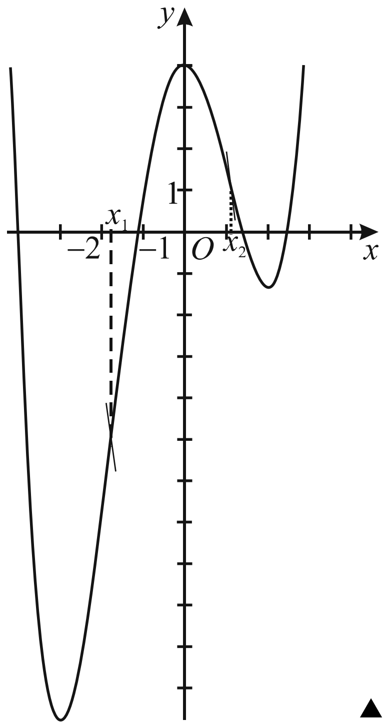
$f''(x)=3x^2+2x-6=0$, $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{19}}{3}$, $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{19}}{3}$.

$f(x)$ е изпъкнала в $(-\infty,x_1)$, вдлъбната в (x_1,x_2) и изпъкнала в $(x_2,+\infty)$. При $x=x_1$ и $x=x_2$ има инфлексия.

4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$.

Пресмятаме: $f(-3)=-11\dfrac{3}{4}$, $f(0)=4$, $f(2)=-1\dfrac{1}{3}$.

x	$-\infty$	-3		0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-11\frac{3}{4}$ min	$\nearrow$	4 max	$\searrow$	$-1\frac{1}{3}$ min	$\nearrow$



▲

2. Да се изследва изменението на функцията $f(x)$ и да се построи графиката ѝ.

а) $f(x)=x^3-3x^2+6x-2$;

б) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-2x^2+3$;

в) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2+2$;

г) $f(x)=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{3x^4}{4}+2x^2$;

д) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{6}-2x^2-2x$;

е) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{13x^2}{4}-3x$;

ж) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{3x^2}{4}-x$;

з) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{5x^3}{6}-\dfrac{x^2}{4}-3x$;

и) $f(x)=3x^2-4-x^3$;

к) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{5x^2}{4}+x$;

л) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-x^2$;

м) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}$;

н) $f(x)=(x-1)^2(x-2)^2$.

3. Дадена е функцията $f(x)=\dfrac{x^5}{5}-x^3+2x$. Да се изследва изменението на функцията и да се начертае графиката на:

а) $f^{\prime v}(x)$; б) $f'''(x)$; в) $f''(x)$; г) $f'(x)$; д) $f(x)$.

1.10. Изследване на дробно-линейна функция

Функцията $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R}$, $ad-bc\neq 0$, $c\neq 0$ се нарича дробно-линейна функция.

Дробно-линейната функция е дефинирана в $(-\infty,-\dfrac{d}{c})\cup(-\dfrac{d}{c},+\infty)$.

При $x\to -\dfrac{d}{c}$ $f(x)$ расте или намалява неограничено. Следователно дробно-линейната функция има вертикална асимптота.

При $x\to\pm\infty$ $f(x)$ клони към крайно число, следователно $f(x)$ има хоризонтална асимптота.

Може да се докаже, че графиката не пресича асимптотите на функцията, което ще предполагаме при решаване на задачи. Не е периодична.

Да решим следващата задача.

1. Да се изследва изменението на функцията $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x-4}$ и да се начертае графиката ѝ.

Решение.

1) $f(x)$ е дефинирана в $(-\infty,\dfrac{4}{3})\cup(\dfrac{4}{3},+\infty)$.

2) Намираме първата производна, интервалите на монотонност и екстремумите:

$f'(x)=\dfrac{-11}{(3x-4)^2}<0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ намалява в $(-\infty,\dfrac{4}{3})$ и $f(x)$ намалява в $(\dfrac{4}{3},+\infty)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ няма локални екстремуми.

3) Намираме втората производна, интервалите на изпъкналост и инфлексните точки.

$f''(x)=\dfrac{22}{(3x-4)^3}$ $\Rightarrow$ $f(x)$ е вдлъбната в $(-\infty,\dfrac{4}{3})$ и изпъкнала в $(\dfrac{4}{3},+\infty)$.

Няма инфлексни точки.

4) $\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}-}\dfrac{2x+1}{3x-4}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}+}\dfrac{2x+1}{3x-4}=+\infty$ $\Rightarrow$ $x=\dfrac{4}{3}$ е вертикална асимптота при $x\to\dfrac{4}{3}$ отляво и отдясно.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+1}{3x-4}=\dfrac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $y=\dfrac{2}{3}$ е хоризонтална асимптота при $x\to\pm\infty$.

5) Намираме точките, в които графиката пресича координатните оси:

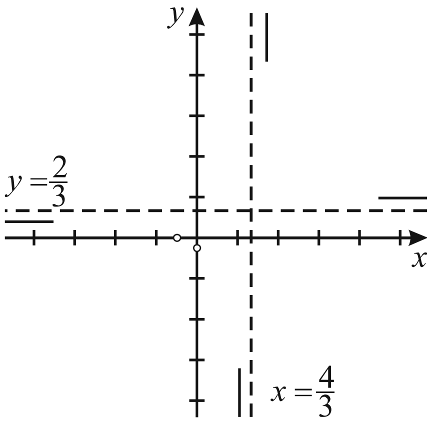
$f(0)=-\dfrac{1}{4}$, и $f(x)=0$ при $x=-\dfrac{1}{2}$.

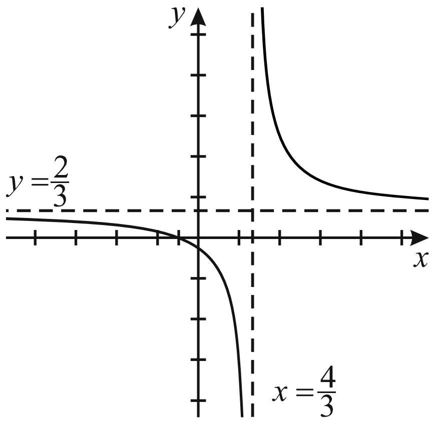
Попълваме резултатите в таблица.

x	$-\infty$ $\quad -\frac{1}{2}$ $\quad 0$ $\quad \frac{4}{3}-$	$\frac{4}{3}+$ $\quad +\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	↘	↘
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\frac{2}{3}$ $\quad \cap$ $\quad -\frac{1}{4}$ $\quad -\infty$	$+\infty$ $\quad \cup$ $\quad \frac{2}{3}$

6) Начертаваме графиката

В правоъгълна координатна система начертаваме двете асимптоти. Слагаме чертичка отляво на $x=\frac{4}{3}$ в посока $-\infty$ и отдясно на $x=\frac{4}{3}$ в посока $+\infty$. Слагаме чертичка под $y=\frac{2}{3}$ в посока $-\infty$ и над $y=\frac{2}{3}$ в посока $+\infty$. Нанасяме точките $(-\frac{1}{2},0)$, $(0,-\frac{1}{4})$. Съединяваме чертичките и точките с плавна линия, като отчетем, че графиката не пресича асимптотите.





2 Да се изследва изменението на функцията $f(x)$ и да се построи графиката ѝ.

а) $f(x)=\dfrac{2x+2}{x-1}$;

б) $f(x)=\dfrac{x-5}{x-4}$;

в) $f(x)=\dfrac{3x+7}{x+2}$;

г) $f(x)=\dfrac{4x+1}{2+3x}$;

д) $f(x)=\dfrac{5-x}{x+3}$;

е) $f(x)=\dfrac{6x+5}{-3x-2}$;

ж) $f(x)=\dfrac{x-2}{-x+1}$;

з) $f(x)=\dfrac{2-x}{2x-6}$.

3. Дадена е функцията $f(x)=7\ln(x-2)+3x$ при $x>2$.

а) Да се намерят екстремумите и асимптотите на $f(x)$.

б) Да се изследва изменението на първата производна $f'(x)$ и да се начертае графиката ѝ.

4. Дадена е функцията $f(x)=8\ln(x+3)-x+5$ при $x>-3$.

а) Да се намерят екстремумите и асимптотите на $f(x)$.

б) Да се изследва изменението на първата производна $f'(x)$ и да се начертае графиката ѝ.

5. За кои стойности на параметъра k $f(x)$ е дробно-линейна функция и графиката ѝ пресича координатните оси в точки, симетрични относно правата $y=x$?

а) $f(x)=\dfrac{2x-1}{3x-k}$;

б) $f(x)=\dfrac{4x+k}{x-4}$;

в) $f(x)=\dfrac{x-k}{kx-2}$;

г) $f(x)=\dfrac{kx+1}{kx-7}$.

6. За кои стойности на параметъра k $f(x)=\dfrac{x-1}{x-k}$ е дробно-линейна функция и частта от графиката ѝ, разположена отляво на вертикалната ѝ асимптота е:

а) изпъкнала;

б) вдлъбната?

Общи задачи
Приложения на математическия анализ

1. Да се намери $f''\left(\frac{1}{4}\right)$, ако $f(x)=\ln x+2x$.

2. Да се намери $f'''(1)$, ако $f(x)=x^4-2x^3+3x^2+4$.

3. Намерете уравнението на допирателната към графиката на функцията $f(x)=\frac{1}{3x+1}$ в точката $\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.

4. Да се намери уравнението на допирателната към графиката на функцията $f(x)=x^2-2x+5$ в точката $(2, f(2))$.

5. Намерете абсцисите на точките от графиката на функцията $f(x)=x^3+x^2-3x+5$, в които допирателната сключва с положителната посока на абсцисната ос ъгъл, чийто тангенс е 2.

6. Дадена е функцията $f(x)=\sqrt{2x-4}$. Да се намери точката от графиката на $f(x)$, в която допирателната сключва с положителната посока на абсцисната ос ъгъл $45°$.

7. Да се намерят интервалите на монотонност на функцията.

а) $f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}-2x+2$;

б) $f(x)=\sqrt{x^2+3x}$;

в) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$;

г) $f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x^2+3x+3}$.

8. Да се намерят интервалите на монотонност и локалните екстремуми на функцията

а) $f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x^2-4x+3}$;

б) $f(x)=\frac{x^2-x+3}{x^2-x-2}$;

в) $f(x)=\frac{x^2-2x-2}{x^2-7x+10}$;

г) $f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x^2-x-6}$;

д) $f(x)=\ln(x^4+x^2)$;

е) $f(x)=\frac{x}{\ln x}$.

9. Да се намерят най-голямата стойност, интервалите на монотонност, интервалите на изпъкналост, инфлексните точки и хоризонталните асимптоти на функцията $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

10. Да се намерят интервалите на монотонност и локалните екстремуми на функцията $f(x)=\ln(x^3-x)$.

11. Да се намерят интервалите на монотонност, локалните екстремуми, интервалите на изпъкналост и инфлексните точки на функцията.

а) $f(x)=\ln(x^2+1)-x$;

б) $f(x)=\ln(1+x^2)$.

12. Да се намерят интервалите на монотонност и локалните екстремуми на функцията $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3}$.

Решение. $f'(x)=\dfrac{-4x^2+4x+4}{(x^2-4x+3)^2}$. Разглеждаме $g(x)=4(-x^2+x+1)=0$ с корени $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Следователно $f(x)$ намалява в $\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, расте в $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},1\right)$, расте в $\left(1;\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, намалява в $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},3\right)$, намалява в $(3,+\infty)$.

За изчисляването на $f_{\min}=f\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ и $f_{\max}=f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ ще използваме, че x_i са корени на уравнението $-x^2+x+1=0$. Така намираме, че $x_i^2=1+x_i$, $i=1,2$

$$\Rightarrow f(x_i)=\frac{1+x_i+1}{1+x_i-4x_i+3}=\frac{x_i+2}{4-3x_i}.$$

$f(x_1)=f\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\dfrac{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}+2}{4-3.\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}=-2+\sqrt{5}$, аналогично $f(x_2)=f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=-2-\sqrt{5}$.▲

13. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)=\dfrac{x^2+3x-2}{x^2+2x+2}$.

14. Да се намерят локалните екстремуми на функцията:

а) $f(x)=\sin x+\cos x$;

б) $f(x)=\sin^2 x\cos x$ в $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

15. Да се намерят абсцисите на точките, в които функцията $f(x)=\sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}-\dfrac{x-3}{2}$ има:

а) локални минимуми;

б) локални максимуми.

Решение. а)

$$f'(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}=0.$$

Корените на уравнението $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ са $\left|\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\\ \dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}=-\dfrac{\pi}{6}+(2k+1)\pi\end{array}\right.$.

За да има функцията локален минимум, то в точките, в които първата производна се анулира, трябва да е изпълнено $f''(x)=-\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}\right)>0$, т.е. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}\right)<0$.

Последното неравенство е изпълнено само при $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}=-\dfrac{\pi}{6}+(2k+1)\pi$, откъдето $x=\dfrac{8\pi}{3}+4k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$▲

16. Да се намерят интервалите на монотонност и локалните екстремуми на функцията $f(x)=e^{x^2+x}-x^2-x$.

17. Да се намерят интервалите на монотонност, локалните екстремуми, интервалите на изпъкналост и асимптотите на функцията:

а) $\dfrac{x^2-3x+1}{x-3}$; б) $\dfrac{-x^2-3x+2}{x-3}$; в) $\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}$.

Задачи за полиномна функция

18. Да се построи графиката на функцията.

а) $f(x)=x^3+x^2+x+1$;

б) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x+1$;

в) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2+2x+1$;

г) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2+4x+1$.

19. Да се намери функция от вида $y=ax^3+bx+c$ и да се начертае графиката ѝ, ако графиката на функцията минава през точките $A(1,0)$ и $B(3,-16)$ и ъгловият коефициент на допирателната към графиката на функцията, прекарана в точката от графиката с абсциса $x_1=-1$, е равен на нула.

20. Дадена е функцията $f(x)=x^3+(a^2-a+7)x^2-(3a^2-3a-6)x-2$. Да се намерят стойностите на a, за които допирателната към графиката на функцията в точката с абсциса $x=1$ има ъглов коефициент $k=21$.

21. Да се построи графиката на функцията $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$.

22. Да се построи графиката на функцията.

а) $f(x)=-x^4+2x^2$;

б) $f(x)=x^4-2x^2$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{2}(3x-x^3)$;

г) $f(x)=x^3-x^2-x+2$;

д) $f(x)=x-\dfrac{x^3}{3}$;

е) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+2$;

ж) $f(x)=x^3-3x+3$.

23. Дадена е функцията $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2-(m-6)x+m^3+m^2-9m$, където m е реално число.

а) Да се намерят всички стойности на m, за които функцията има локален минимум и локален максимум.

б) Да се намери m, така че сборът от локалния максимум и локалния минимум на $f(x)$ да е равен на нула.

Решение. а) $f'(x) = x^2 - 2mx - m + 6$.

Ако дискриминантата $D \le 0$, то $f'(x) \ge 0$, $\forall x$ и следователно $f(x)$ няма екстремуми.

Нека $D > 0$. Тогава $f'(x) = 0$ има два корена, около които f' си сменя знака, следователно $f(x)$ има локален максимум и локален минимум.

$D' = m^2 + m - 6 = (m+3)(m-2) > 0 \quad \Rightarrow \quad m \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$.

б) Нека x_1 и x_2 са корените на $f'(x) = 0$ и $x_1 < x_2$.

(1) $\quad f_{\max} + f_{\min} = f(x_1) + f(x_2) = \dfrac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3) - m(x_1^2 + x_2^2) - (m-6)(x_1 + x_2) + 2(m^3 + m^2 - 9m)$.

От формулите на Виет имаме: $\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = -m + 6 \end{array} \right. \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = 2m(4m^2 + 3m - 18) = 8m^3 + 6m^2 - 36m$

и $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4m^2 + 2m - 12$.

Равенството (1) приема вида:

(1) $= \dfrac{1}{3}(8m^3 + 6m^2 - 36m) - m(4m^2 + 2m - 12) - (m-6)2m + 2(m^3 + m^2 - 9m) = \dfrac{2}{3}m(m^2 - 9) = 0$,

$m_1 = -3$, $m_2 = 0$, $m_3 = 3$.

Но $m \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty) \quad \Rightarrow \quad m = 3$.▲

24. Да се определят коефициентите p и q на функцията $y = x^3 + px^2 - qx$, ако съответните стойности на x, за които тази функция има локален максимум и локален минимум са две противоположни числа, а разликата от стойностите на максимума и минимума е равна на 4.

25. Да се определят коефициентите m и n във функцията $y = \dfrac{1}{4}x^3 + mx^2 + nx + 2$, ако е известно, че за $x = 2$ функцията има локален минимум, равен на -2. След като се намерят m и n, да се изследва функцията и да се начертае графиката ѝ.

26. Да се определят коефициентите m и n във функцията $y = x^3 + mx^2 + nx + 2$, ако е известно, че за $x = -1$ функцията има локален максимум, равен на 4. След като се намерят m и n, да се изследва функцията и да се начертае графиката ѝ.

27. Да се определят коефициентите m и n във функцията $y = \dfrac{x^3}{3} + mx^2 + nx + \dfrac{14}{3}$, ако е известно, че за $x = -1$ функцията има локален максимум, равен на $\dfrac{19}{3}$. След като се намерят m и n, да се изследва функцията и да се начертае графиката ѝ.

28. Да се намерят стойностите на параметъра a, за които функцията $f(x) = x^3 - (a+1)x^2 + (2a-1)x + 1$ има два екстремума.

29. Да се докаже, че функцията $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{ax^3}{3}-a^2x^2$ има два локални минимума за всяка ненулева стойност на параметъра a. За коя стойност на a по-големият локален минимум е -20?

30. За коя стойност на параметъра a функцията $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-ax^2-x+1$ има инфлексия при $x=-\dfrac{1}{3}$?

31. За кои стойности на параметъра m функцията $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2-mx+1$ има локални екстремуми и инфлексия. Намерете абсцисите на тези точки. Постройте графиката на функцията при $m=3$, $m=-1$ и $m=-2$.

32. За коя стойност на параметъра a функцията

а) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-ax^2+(a^2-1)x+1$ има локален минимум при $x=4$;

б) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-ax^2+(a^2-4)x-1$ има локален максимум при $x=5$?

33. Да се намери броят на корените на уравнението.

а) $2x^3+4x^2+2x+\dfrac{8}{27}=0$;

б) $3x^3+x^2-7x+4=0$;

в) $\dfrac{x^3}{3}+2x^2+3x+1=0$;

г) $2x^4-16x^3+44x^2-48x+17=0$;

д) $\dfrac{3}{5}x^5-\dfrac{3}{2}x^4-x^3+3x^2-\dfrac{1}{2}=0$.

34. Да се намери броят на корените на уравнението:

а) $\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{x^3}{6}-x^2+x+1=0$;

б) $\dfrac{x^4}{12}+\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{4x}{5}-\dfrac{1}{3}$.

Решение. а) Намираме $f'(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x+1=0$.

Уравнението $2x^3-3x^2-12x+6=0$ няма рационални корени, което може да се установи със схемата на Хорнер.

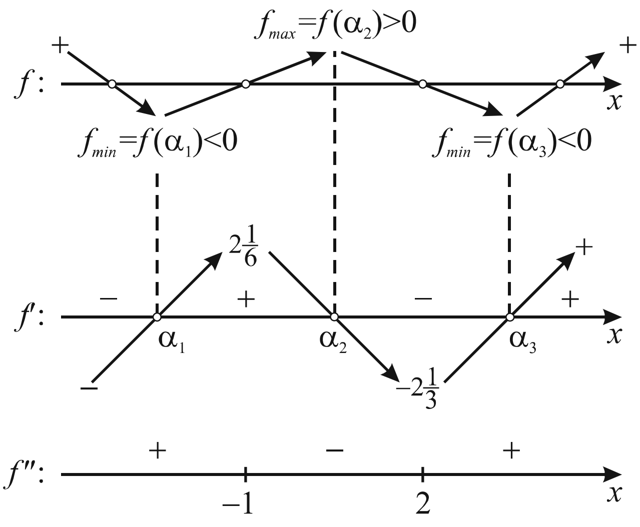
Намираме $f''(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$, f'' си сменя знака около -1 от + на – и около 2 от – на +. Следователно f' има точно два екстремума: $f'_{\max}=f'(-1)=2\dfrac{1}{6}>0$ и $f'_{\min}=f'(2)=-2\dfrac{1}{3}<0$. Тъй като $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$, то $f'(x)$ има точно по един корен във всеки от интервалите $(-\infty,-1)$, $(-1,2)$ и $(2,+\infty)$, които означаваме съответно с α_1, α_2 и α_3.

След определяне знака на f' във всеки от интервалите $(-\infty,\alpha_1)$, (α_1,α_2), (α_2,α_3) и $(\alpha_3,+\infty)$, заключаваме, че $f(x)$ има три екстремума: $f_{\min}=f(\alpha_1)$, $f_{\max}=f(\alpha_2)$ и $f_{\min}=f(\alpha_3)$.

В интервала $(-\infty,\alpha_1)$ $f(x)$ е намаляваща, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ и

$f_{\min}=f(\alpha_1)<f(-1)=-\dfrac{3}{4}<0$,

следователно $f(x)$ има единствен корен в интервала $(-\infty,\alpha_1)$.



В интервала (α_1,α_2) $f(x)$ е растяща, $f_{\min}=f(\alpha_1)<f(-1)=-\dfrac{3}{4}<0$ и $f_{\max}=f(\alpha_2)>f(1)=\dfrac{11}{12}>0$ $(1\in(-1,2))$ следователно $f(x)$ има единствен корен в интервала (α_1,α_2).

Като вземем предвид, че $f(\alpha_3)<f(2)=-1<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ и монотонността на $f(x)$, заключаваме, че $f(x)$ има точно по един корен във всеки от интервалите (α_2,α_3) и $(\alpha_3,+\infty)$.

Окончателно $f(x)$ има четири корена.▲

35. Дадена е функцията $f(x)=\dfrac{x^5}{5}-2x^3+8x$. Да се изследва изменението на функцията и да се начертае графиката на:

а) $f^{\prime v}(x)$; б) $f'''(x)$; в) $f''(x)$; г) $f'(x)$; д) $f(x)$.

Задачи, в които се въвежда нова функция

36. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които функцията $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2\sqrt{2}x+a}$ е дефинирана за всяко реално число x. За тези стойности на a да се намери най-голямата и най-малката стойност на $f(x)$ в интервала $[0,a]$.

Решение. Да означим $g(x)=x^2-2\sqrt{2}x+a$.

Функцията $f(x)$ е дефинирана за всяко реално x, когато $g(x)\neq 0$, което е изпълнено, когато дискриминантата на $g(x)$ е отрицателна за всяко реално x. Имаме $D'=2-a<0$, $a>2$. Следователно при $a>2$ $f(x)$ е дефинирана за всяко реално x и освен това $f(x)>0$ и $g(x)>0$.

Тогава $f(x)$ приема най-голямата си стойност в интервала $[0,a]$ за тези x, за които $g(x)$ приема най-малката си стойност в този интервал и $f(x)$ приема най-малката си стойност в интервала $[0,a]$ за тези x, за които $g(x)$ приема най-голямата си стойност в този интервал.

Да намерим най-малката и най-голямата стойност на $g(x)$. Тъй като $g(x)$ е квадратна функция с положителен старши коефициент, то тя достига най-малката си стойност във върха на параболата, т.е. при $x=\sqrt{2}$.

$\sqrt{2}\in[0,a]$, защото $\sqrt{2}<2<a \quad \Rightarrow \quad \min\limits_{[0,a]} g(x)=g(\sqrt{2})=a-2$.

За да намерим най-голямата стойност на $g(x)$, изчисляваме $g(0)$ и $g(a)$.

$g(0)=a$, $\quad g(a)=a^2-2\sqrt{2}a+a$ и сравняваме двете стойности, като определяме знака на разликата $g(a)-g(0)=a^2-2\sqrt{2}a=a(a-2\sqrt{2})$ в интервала $[0,a]$ при $a>2$.

Ако $2<a\le 2\sqrt{2}$, то $g(a)-g(0)\le 0 \quad \Rightarrow \quad \max\limits_{[0,a]} g(x)=g(0)=a$.

Ако $a>2\sqrt{2}$, то $g(a)-g(0)>0 \quad \Rightarrow \quad \max\limits_{[0,a]} g(x)=g(a)=a^2+(1-2\sqrt{2})a$.

Окончателно за най-голямата и най-малката стойност на $f(x)$ получаваме:

При $a>2$, $\max\limits_{[0,a]} f(x)=\dfrac{1}{g(\sqrt{2})}=\dfrac{1}{a-2}$.

При $2<a\le 2\sqrt{2}$, $\min\limits_{[0,a]} f(x)=\dfrac{1}{g(0)}=\dfrac{1}{a}$.

При $a>2\sqrt{2}$, $\min\limits_{[0,a]} f(x)=\dfrac{1}{g(a)}=\dfrac{1}{a^2+(1-2\sqrt{2})a}$.▲

37. Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)=3.2^{-4x}-2^{2-3x}-3.2^{2-2x}$ в интервала $[-2,2]$.

Решение. Полагаме $2^{-x}=t$, при което при $x\in[-2,2]$ имаме $t\in\left[\dfrac{1}{4},4\right]$.

Заместваме $2^{-x}=t$ във функцията $f(x)$ и получаваме функция на t, която да означим $g(t)$ и $g(t)=3t^4-4t^3-12t^2$.

Тогава най-голямата (най-малката) стойност на $f(x)$ в интервала $[-2,2]$ ще бъде равна на най-голямата (най-малката) стойност на $g(t)$ в интервала $\left[\dfrac{1}{4},4\right]$.

Да намерим най-голямата и най-малката стойност на $g(t)$ в $\left[\dfrac{1}{4},4\right]$.

$g'(t)=12t^3-12t^2-24t=12t(t-2)(t+1)$.

В интервала $\left[\dfrac{1}{4},4\right]$ $g'(t)$ има единствен корен $t=2$ около който си сменя знака от – на + $\Rightarrow$ $g(t)$ има единствен екстремум – минимум при $t=2 \quad \Rightarrow \quad \min\limits_{\left[\frac{1}{4},4\right]} g(t)=g(2)=-32$.

Най-голямата стойност на $g(t)$ ще е по-голямото от числата $g(4)$ и $g\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

Пресмятаме $g(4)=320$, а за числото $g\left(\dfrac{1}{4}\right)$ ще установим, че е отрицателно без да го пресмятаме.

В интервала $[0,2]$ $g(t)$ е намаляваща, $g(0)=0$ и $g(2)=-32$

$\Rightarrow\ g\left(\frac{1}{4}\right)<0 \ \Rightarrow\ g\left(\frac{1}{4}\right)<g(4)$

$\Rightarrow\ \max\limits_{\left[\frac{1}{4},4\right]} g(t)=g(4)=320$. Тогава за $f(x)$ получаваме $\min\limits_{[-2,2]} f(x)=-32$ и $\max\limits_{[-2,2]} f(x)=320$.▲

38. Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)=(\sin x+\cos x)(2-\sin x\cos x)$.

Решение. Полагаме $y=\sin x+\cos x$.

Трябва да намерим стойностите, които може да приема променливата y. За целта записваме y във вида $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. Тъй като $-1\le\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1$, то $-\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2}$.

Сега трябва да изразим $\sin x\cos x$ чрез y. Имаме:

$$y^2=(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x \ =\ 1+2\sin x\cos x \quad\Rightarrow\quad \sin x\cos x=\frac{y^2-1}{2}.$$

Заместваме във функцията $f(x)$ и получената функция да означим с $\varphi(y)$:

$$\varphi(y)=y\left(2-\frac{y^2-1}{2}\right)=\frac{1}{2}(5y-y^3),\ \ y\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}].$$

Да намерим най-голямата и най-малката стойност на $\varphi(y)$ в интервала $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

$\varphi'(y)=\frac{1}{2}(5-3y^2)$. В интервала $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ $\varphi'(y)$ си сменя знака около точките $\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$ и значи $\varphi(y)$ има локални екстремуми в тях.

Пресмятането стойностите на $\varphi(y)$ в краищата на интервала и в локалните екстремуми ще извършим за положителните точки и ще използваме, че функцията е нечетна.

$$\varphi\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)=\frac{5\sqrt{15}}{9},\quad \varphi(\sqrt{2})=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow\ \varphi\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}\right)=-\varphi\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)=-\frac{5\sqrt{15}}{9}\quad \text{и}\quad \varphi(-\sqrt{2})=-\varphi(\sqrt{2})=-\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Тъй като $\frac{3\sqrt{2}}{2}<\frac{5\sqrt{15}}{9}$, защото $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=4\frac{1}{2}<\left(\frac{5\sqrt{15}}{9}\right)^2=4\frac{17}{27}$, то:

$$\max_{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}\varphi(y)=\varphi\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)=\frac{5\sqrt{15}}{9}=\max f(x)\quad \text{и}\quad \min_{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}\varphi(y)=\varphi\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}\right)=-\frac{5\sqrt{15}}{9}=\min f(x).▲$$

39. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които функцията $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+a}$ е дефинирана за всяко реално число x. За тези стойности на a да се намери най-голямата и най-малката стойност на $f(x)$ в интервала $[0,a]$.

40. Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)=2^{-4x}+2^{3(1-x)}+2^{2(2-x)}$ в интервала $[-3,3]$.

41. Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = \sin x + \cos x + 2\sin x \cos x$.

Допирателни към криви от втора степен

42. Намерете общите уравнения на допирателните към окръжността $x^2 + y^2 - 6x - 41 = 0$, успоредни на правата $2x - 2y + 9 = 0$.

43. Правата $x - 2y + 15 = 0$ е допирателна към окръжността $x^2 + y^2 = 45$. Намерете дължината на отсечката, заключена между допирателната и пресечната точка на дадената права с абсцисната ос.

44. Намерете допирателната към дадената крива в дадената точка.

а) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$, $(5, -6)$;

б) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} = 1$, $(\sqrt{5}, 0)$;

в) $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{70} = 1$, $(3, -2\sqrt{7})$;

г) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{9} = 1$, $(5\sqrt{5}, \frac{3}{2})$;

д) $y = x^2 + 5x - 2$, $(-4, -6)$;

е) $y = x^2 - x + 7$, $(1, 7)$.

45. Правите f и g са допирателни към дадената крива в дадените точки. Да се намери пресечната точка на f и g.

а) $y = x^2 + 4x - 5$, $(-6, 7)$, $(-4, -5)$;

б) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{40} = 1$, $(3, 2)$, $(-1, 6)$;

в) $y = 2x^2 + 5x + 3$, $(-4, 15)$, $(0, 3)$;

г) $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{6} = 1$, $(\frac{7}{3}, \frac{5}{3})$, $(5, 1)$.

46. Правите $f: Ax - 5y - 20 = 0$ и $g: Ax - 7y - 4 = 0$ се допират до хиперболата $\frac{x^2}{50} - \frac{y^2}{4.A} = 1$.

Пресечната точка на f и g е:

☒ **А)** $(750, 8)$ **Б)** $(30, 8)$ **В)** $(12, 8)$ **Г)** $(15, 8)$

47. Да се намери ъгълът между допирателните в точка $(6, 1)$ към елипсата $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{5} = 1$ и към хиперболата $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1$.

48. Правата $f: x + Ay + 2 = 0$ е допирателна към хиперболата $\frac{x^2}{13} - y^2 = 1$. Правата $g: x + By + 2 = 0$ е допирателна към хиперболата $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{2} = 1$. Намерете пресечната точка на f и g.

Тест 1
Приложения на математическия анализ

1. Да се намери $f''(14)$, ако $f(x)=\sqrt{2x-3}$.

2. Да се намерят интервалите на монотонност на функцията $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$.

3. Намерете общото уравнение на допирателната към окръжността $(x-3)^2+(y-8)^2=20$ в точката $(1, 4)$.

4. Правите, които минават през точката $(-6,4)$ и са допирателни към елипсата $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$, са:

☒ **А)** $x=-6$ и $y=4$ **Б)** $x=6$ и $y=4$
В) $x=-6$ и $y=-4$ **Г)** $x=6$ и $y=-4$

5. Правата $3x+8y-50=0$ е допирателна към елипсата $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{25}=1$ при a^2, равно на:

☒ **А)** 1 **Б)** 25
В) 50 **Г)** 100

6. Правата $x-y+10=0$ се допира до елипсата $\dfrac{x^2}{60}+\dfrac{y^2}{40}=1$ в точка M и пресича оста Ox в точка N. Дължината на MN е:

☒ **А)** $\sqrt{2}$ **Б)** $2\sqrt{2}$
В) $3\sqrt{2}$ **Г)** $4\sqrt{2}$

7. Точка $P(50,7.A)$ е допирна точка на правата $Ax-7y-4=0$ към хиперболата $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{16}=1$, ако:

☒ **А)** $a^2=50$ **Б)** $a^2=16$
В) $a^2=7$ **Г)** $a^2=4$

8. Правата $Ax+3y-2=0$ е допирателна към хиперболата $\dfrac{x^2}{10}-\dfrac{y^2}{4}=1$ при A, равно на:

☒ **А)** 1 **Б)** 2
В) 3 **Г)** 4

9. Правата $y=5x+b$ е допирателна към параболата $y=x^2-5x+6$ при b, равно на:

☒ **А)** -19 **Б)** -3
В) 3 **Г)** 19

10. Да се намерят интервалите на монотонност и абсцисите на локалните екстремуми и инфлексните точки на функцията $f(x)=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^4}{2}-2x^3+9x^2-27x-27$ и да се начертае графиката ѝ.

11. Да се построи графиката на функцията $f(x)=2x^3-5x^2+4x-1$.

Тест 2
Приложения на математическия анализ

1. Да се намери $f'''\left(\frac{1}{6}\right)$, ако $f(x)=\sqrt{1-2x}$.

2. Да се намерят интервалите на монотонност на функцията $f(x)=\ln(2x+1)-x$.

3. Намерете общото уравнение на допирателната към окръжността $(x+6)^2+(y-11)^2=65$ в точката $(-5,\ 3)$.

4. Правите, които минават през точката $(6,-4)$ и са допирателни към елипсата $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$, са:

☒ **А)** $x=6$ и $y=4$ **Б)** $x=-6$ и $y=-4$

В) $x=-6$ и $y=4$ **Г)** $x=6$ и $y=-4$

5. Правата $4x+y-20=0$ е допирателна към елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{80}=1$ при a^2, равно на:

☒ **А)** 100 **Б)** 40

В) 20 **Г)** 8

6. Правата $3x+2y-30=0$ се допира до елипсата $\frac{x^2}{80}+\frac{y^2}{45}=1$ в точка M и пресича оста Ox в точка N. Дължината на MN е:

☒ **А)** 5 **Б)** $\sqrt{13}$

В) $2\sqrt{2}$ **Г)** $\sqrt{3}$

7. Точка $Q(2.B,4)$ е допирна точка на правата $4x-By-20=0$ към хиперболата $\frac{x^2}{50}-\frac{y^2}{b^2}=1$, ако:

☒ **А)** $b^2=16$ **Б)** $b^2=20$

В) $b^2=50$ **Г)** $b^2=100$

8. Правата $3x-By-10=0$ е допирателна към хиперболата $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$ при B, равно на:

☒ **А)** 12 **Б)** 1

В) 8 **Г)** 3

9. Правата $y=3x+b$ е допирателна към параболата $y=x^2-5x+6$ при b, равно на:

☒ **А)** 10 **Б)** 6

В) -6 **Г)** -10

10. Да се намерят интервалите на монотонност, локалните екстремуми, интервалите на изпъкналост и инфлексните точки на функцията $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$.

11. Да се построи графиката на функцията $f(x)=x^3+9x^2-2$.

Практикум
Приложения на математическия анализ

Общо указание

Интерактивните приложения са подходящи за визуализиране на най-малката, най-голямата стойност, екстремумите, инфлексните точки, допирателните и графиката на функция.

Използвайте подходящ софтуер, с който по зададено уравнение се изчертава съответната фигура.

Експериментирайте:
– с примерите от уроците;
– създайте сами примери;
– с предложените по-долу задачи

и изследвайте допълнителни геометрични ситуации.

Полином и допирателна

1. Дадена е функцията $f(x)=x^3+x^2+x+1$. Отговорете на въпросите:

1) Коя е допирателната към графиката на $f(x)$ в точката $(0,1)$?

2) Правата от 1) има ли други общи точки с графиката на $f(x)$?

3) Ако правата от 1) има други общи точки с графиката, то дали тя е допирателна към графиката и в тези точки?

4) Може ли една права да се допира до графиката на функция в две точки?

2. Начертайте с помощта на подходящ софтуер графика на полиномна функция от пета, четвърта, трета степен. Колко могат да бъдат екстремумите?

Две елипси и допирателни към тях

3. Начертайте с помощта на подходящ софтуер:

а) елипсите $E:\ \dfrac{x^2}{60}+\dfrac{y^2}{10}=1$ и $K:\ \dfrac{x^2}{90}+\dfrac{y^2}{15}=1$;

б) точките $A(3,6;2,8)$, $B(6,-2)$, $C(6,3)$ и $D(8,4;-1,8)$;

в) допирателни в точките A и B към E и в точките C и D към K.

Какво е взаимното положение на четирите допирателни?

Две хиперболи и допирателни към тях

4. Начертайте с помощта на подходящ софтуер:

а) хиперболите $H:\ \dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$ и $G:\ \dfrac{x^2}{30}-\dfrac{y^2}{5}=1$;

б) точките $A(6,2)$, $B(6,1)$;

в) допирателна в точка A към H и в точка B към G.

Коя е пресечната точка на двете допирателни?

Хипербола – допирателни – лице на триъгълник

5. Дадени са хиперболата $\frac{x^2}{33}-\frac{y^2}{11}=1$ и точки $A(6,1)$, $B(15,8)$ и $C(-9,4)$, лежащи на нея.

Вариант А

Използвайте подходящ софтуер, за да:

а) начертаете хиперболата;

б) начертаете точките A, B и C;

в) начертаете допирателните в точките A, B и C към хиперболата;

г) намерите лицето на триъгълник с върхове пресечните точки на трите допирателни.

Вариант Б – аналитично решение

а) намерете допирателните в точките A, B и C към хиперболата;

б) намерете лицето на триъгълник с върхове пресечните точки на трите допирателни.

Подходящо е учениците да се разделят на екипи за изпълнение на вариантите.

Хипербола – допирателни – лице на триъгълник

6. Дадени са хиперболата $\frac{x^2}{60}-\frac{y^2}{15}=1$ и точки $M(8,1)$, $P(-16,7)$ и $Q(-8,1)$, лежащи на нея.

Вариант А

Използвайте подходящ софтуер, за да:

а) начертаете хиперболата;

б) начертаете точките M, P и Q;

в) начертаете допирателните в точките M, P и Q към хиперболата;

г) намерите лицето на триъгълник с върхове пресечните точки на трите допирателни.

Вариант Б – аналитично решение

а) намерете допирателните в точките M, P и Q към хиперболата;

б) намерете лицето на триъгълник с върхове пресечните точки на трите допирателни.

Подходящо е учениците да се разделят на екипи за изпълнение на вариантите.

Три елипси

7. Начертайте с помощта на подходящ софтуер:

а) елипсите $E1: \frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$, $E2: \frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8}=1$ и $E3: \frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1$;

б) точка A в първи квадрант с целочислени координати, която лежи на $E3$;

в) допирателните към трите елипси от точка A.

Запишете уравненията на допирателните и допирните точки.

г) Можете ли да намерите други три елипси, в които да построите същата геометрична ситуация и поне три от допирните точки да бъдат с цели координати?

2. Геометрични модели

2.1. Екстремални задачи в равнината

Геометрични задачи, в които се изисква да се намери най-голяма или най-малка стойност на геометрична величина – дължина, лице, повърхнина, обем и други, се наричат екстремални геометрични задачи. Много често те се свеждат до намиране на най-голяма или най-малка стойност на функция. Ще покажем как става това чрез задачи.

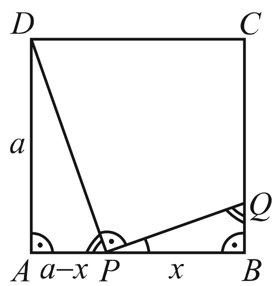
1. Върху страните AB и BC на квадрат $ABCD$ със страна a са взети съответно вътрешни точки P и Q, така че $PD \perp PQ$. Определете дължината на отсечката PB, така че лицето на ΔPBQ да бъде най-голямо. Намерете това лице.

Решение.

Коментар. По условие страната a на квадрата е дадена и не се променя. Но при дадената страна a, ако променим дължината на отсечката PB, лицето на ΔPBQ ще се промени, т.е. то зависи от PB и казваме, че е функция на PB. Тогава означаваме $PB = x$ и изразяваме лицето на ΔPBQ като функция на x, в която участва като параметър дадената страна a. Определяме допустимите стойности на x според дадената геометрична задача. Намираме най-голямата или най-малката стойност на функцията, след което се връщаме в геометричната задача, за да отговорим на поставения въпрос.

Ще проследим тези стъпки в решението на задачата.

Да означим с x дължината на отсечката, чиято дължина търсим, т.е. $PB = x$, $x > 0 \Rightarrow AP = a - x$.



От $\Delta APD \sim \Delta BQP$ имаме $\dfrac{BQ}{a-x} = \dfrac{x}{a} \Rightarrow BQ = \dfrac{x(a-x)}{a}$.

Тогава $S_{PBQ} = S(x) = \dfrac{PB.BQ}{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{x.x(a-x)}{a} = \dfrac{ax^2 - x^3}{2a}$.

Да определим допустимите стойности на x за геометричната задача. Трябва да е изпълнено

$$\frac{ax^2 - x^3}{2a} > 0, \quad x^2(a-x) > 0 \Rightarrow x < a \Rightarrow x \in (0,a).$$

Задачата се свежда до намиране на най-голямата стойност на функцията $S(x)$ при $x \in (0,a)$. Това извършваме по известния от часовете по анализ начин.

$S'(x) = \dfrac{1}{2a}(2ax - 3x^2) = \dfrac{x}{2a}(2a - 3x) = 0$ има единствен корен $x = \dfrac{2a}{3}$ в $(0,a)$.

В интервала $(0,a)$ функцията $S(x)$ има локален максимум при $x = \dfrac{2a}{3} \Rightarrow$

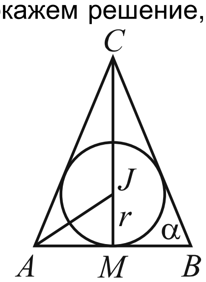
$$\max_{(0,a)} S(x) = S\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{2a^3}{27}.$$

Да се върнем към геометричната задача. Дължината на $PB = x = \dfrac{2a}{3}$. При тази дължина съществува ΔPBQ и лицето му е най-голямо, като $S_{PBQ} = \dfrac{2a^3}{27}$.▲

2. От всички равнобедрени триъгълници, описани около окръжност с радиус r да се намери този, който има най-малък периметър. Намерете този периметър.

Решение.

Коментар. В задачата окръжността е с даден радиус r, т.е. той не се променя, но ако разгледаме равнобедрените триъгълници, описани около окръжността, те са различни и техните елементи се променят. По условие не е зададен елементът, според който да определим най-малкия периметър. Ние трябва да изберем елемент, който заедно с дадения радиус на вписаната окръжност, определя еднозначно триъгълника. Няма правило за този избор. Ще покажем решение, в което за неизвестно избираме ъгъла при основата на равнобедрения триъгълник.



Нека равнобедреният ΔABC, $AC = BC$ е описан около окръжност с радиус r и да означим с α ъгъла при основата му, т.е. $\angle BAC = \alpha$. Ще изразим периметъра на триъгълника чрез r и $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. Нека J е центърът на вписаната окръжност и M е средата на AB.

$\dfrac{P_{\Delta ABC}}{2} = AC + AM$. От триъгълниците AMC и AMJ намираме $AC = \dfrac{AB}{2\cos\alpha}$, $AM = \dfrac{r}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$

и $AB = \dfrac{2r}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{P_{\Delta ABC}}{2} = \dfrac{AB}{2\cos\alpha} + \dfrac{AB}{2} = \dfrac{AB(1+\cos\alpha)}{2\cos\alpha} = \dfrac{2r(1+\cos\alpha)}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}.2\cos\alpha}$.

Прилагаме универсалната субституция и получаваме $P(\alpha) = \dfrac{4r}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}}$, $\alpha \in (0, \dfrac{\pi}{2})$.

За функцията $P(\alpha)$ намираме най-малката стойност в интервала $\alpha \in (0, \dfrac{\pi}{2})$.

$$P'(\alpha) = \frac{-4r\left(\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}.\dfrac{1}{2} - 3\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}.\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}.\dfrac{1}{2}\right)}{\left(\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{-4r\left(1 - 3\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{2r(3\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} - 1)}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}.$$

Знаменателят на получената дроб е положителен следователно определяме знака на числителя.

Имаме $3\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} - 1 = 0$, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\alpha \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ $\Rightarrow$ $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\dfrac{\alpha}{2} = 30°$, $\alpha = 60°$, който е и единствен корен на уравнението $P'(\alpha) = 0$.

При $\dfrac{\alpha}{2} < 30°$, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} < \operatorname{tg}30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow$ $P'(\alpha) < 0$. При $\dfrac{\alpha}{2} > 30°$, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} > \operatorname{tg}30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow$ $P'(\alpha) > 0$.

$\Rightarrow$ $P'(\alpha)$ си сменя знака около $\alpha = 60°$ от – на + $\Rightarrow$ $P(\alpha)$ има локален минимум и

$$\min_{(0,\frac{\pi}{2})} P(\alpha) = P_{\min} = P(60°) = \frac{4r}{\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{3\sqrt{3}}} = 6\sqrt{3}r .$$

Триъгълникът с най-малък периметър е равностранният триъгълник с периметър $6\sqrt{3}r$.▲

3. От всички триъгълници, описани около окръжност с радиус r намерете този, който има най-малък периметър. Намерете този периметър.

Решение.

Коментар. С решението на тази задача ще покажем намиране на най-малка стойност без използване на производни. Предварително ще докажем едно тригонометрично равенство за ъгли в триъгълник, което ще използваме в решението.

Твърдение. Ако α, β и γ са ъгли в триъгълник, изпълнено е равенството:

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}.\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}.$$

Доказателство: Заместваме $\frac{\gamma}{2}=90^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}$ и получаваме:

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}=\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}.\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}=\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}=\operatorname{tg}\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}=$$

$=\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}$, с което твърдението е доказано.

За ΔABC имаме следните равенства $p-a=r\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$, $p-b=r\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}$, $p-c=r\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$

$$\Rightarrow P=2p=2(p-a+p-b+p-c)=2r\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\right)=2r\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}.\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}.$$

За да оценим получения израз, ще използваме неравенството между средноаритметично и средногеометрично.

Да означим $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}.\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}=m$, $m>0$.

От неравенството между средноаритметично и средногеометрично имаме:

(1) $\dfrac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}}{3}\geq\sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}.\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}}$ или $\frac{m}{3}\geq\sqrt[3]{m}$.

Решението на последното неравенство е $m\geq3\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $m=\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\geq3\sqrt{3}$ $/.2r$

$\Rightarrow$ $P\geq6\sqrt{3}\,r$, като P достига най-малка стойност при равенство или $\min P=6\sqrt{3}\,r$.

Тъй като в (1) равенство се достига при $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}=\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$, то триъгълникът е равностранен и периметърът му е $6\sqrt{3}\,r$.

Получихме, че от всички триъгълници, описани около окръжност с радиус r, най-малък периметър има равностранният триъгълник.▲

4. От всички триъгълници, описани около окръжност с радиус r, намерете този, който има най-малко лице. Намерете това лице.

5. От всички равнобедрени триъгълници, описани около окръжност с радиус r да се намери този, който има най-малко лице. Намерете това лице.

6. От всички равнобедрени триъгълници, вписани в окръжност с радиус R да се намери този, който има най-голямо лице. Да се намери това лице.

7. За правоъгълен триъгълник с остър ъгъл α да се намери за коя стойност на α отношението $\frac{r}{R}$ е най-голямо, където r е радиусът на вписаната окръжност, а R е радиусът на описаната окръжност за триъгълника. Да се намери това отношение.

8. Даден е правоъгълен ΔABC с хипотенуза $AB = 1$ и $\angle BAC = \alpha$. Вписаната в триъгълника окръжност се допира до страните AB и AC съответно в точките M и N. Докажете, че:

а) $MN = \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^3 \alpha}$;

б) $MN \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

9. Разглеждат се всевъзможните трапеци, вписани в окръжност с радиус R, такива че центърът на окръжността лежи вътре в трапеца, а едната от основите му е равна на $R\sqrt{3}$. Намерете бедрото на трапеца, който има най-голямо лице.

10. В полукръг с радиус R е вписан правоъгълник $ABCD$, така че AB лежи на диаметъра, а точките C и D – на окръжността. Да се намери този правоъгълник, който има най-голямо лице и да се изчисли това лице.

11. От всички правоъгълници, които имат лице S, намерете този, който има най-малък периметър и намерете този периметър.

12. От всички правоъгълници, вписани в окръжност с радиус R да се намери този, който има най-голямо лице и да се намери това лице.

13. Даден е равнобедрен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$ и $AB > CD$), на който $AD = DC = 4$ cm и $\angle BAD = \alpha$. Да се намери за кои стойности на α лицето на трапеца е най-голямо и да се пресметне тази най-голяма стойност.

14. Даден е ΔABC със страна $AB = c$ и $\angle ACB = \gamma$. Ако $\angle BAC = x$, да се изрази лицето на ΔABC като функция на x и да се намери най-голямата му стойност.

15. Даден е трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$ и $AB > CD$) около който може да се опише окръжност. Бедрото AD и основата CD имат дължина b, а $\angle BAD = \alpha$. Да се намери за коя стойност на α лицето на трапеца е най-голямо и да се пресметне тази най-голяма стойност.

16. Даден е равнобедрен ΔABC с основа $AB = a$ cm и $\angle ACB = 60°$. Да се намери с каква най-къса отсечка може да се раздели триъгълникът на две равнолицеви части.

17. Около трапец $ABCD$ с основи AB и CD ($AB > CD$) е описана окръжност с радиус R, на която AB е диаметър.

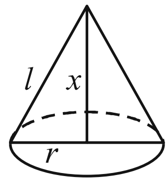
а) Ако $CD = R$, да се докаже, че лицето на трапеца е равно на $\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

б) При каква стойност на $\angle DAB$ лицето на трапеца е най-голямо?

2.2. Екстремални задачи в пространството

При решаване на екстремални задачи в пространството постъпваме, както при екстремални задачи в равнината.

1. От всички конуси с дадена образуваща l намерете височината на онзи от тях, който има най-голям обем. При каква зависимост между радиуса на основата и височината на конуса се достига този обем?



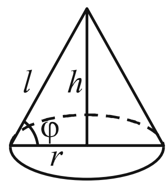
Решение. Първи начин. При стандартни означения, избираме за неизвестно височината на конуса, $h = x$. Тогава $r^2 = l^2 - x^2$.

Изследваме функцията $V(x) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}(l^2 - x^2)x = \frac{\pi}{3}(l^2 x - x^3)$, $x \in (0, l)$.

$V'(x) = \frac{\pi}{3}(l^2 - 3x^2) = \frac{\pi}{3}(l - x\sqrt{3})(l + x\sqrt{3}) = 0$, $x_{1,2} = \pm\frac{l\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow$ В $(0, l)$ $V(x)$ има единствен екстремум – максимум $\Rightarrow$ $\max\limits_{(0,l)} V(x) = V\left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\left(l^2\frac{l\sqrt{3}}{3} - \frac{l^3\sqrt{3}}{9}\right) = \frac{\pi}{3}\frac{l^3\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}\,l^3}{27}$.

Височината и радиусът на конуса с най-голям обем са $h = \frac{l\sqrt{3}}{3}$ и $r = \frac{l\sqrt{6}}{3}$ $\Rightarrow$ $h = \frac{r\sqrt{2}}{2}$.

Тогава от всички конуси с образуваща l най-голям обем има този, за който $h = \frac{r\sqrt{2}}{2}$.▲



Решение. Втори начин. Избираме за неизвестно φ – ъгъла между образуващата и основата на конуса. Имаме $h = l\sin\varphi$ и $r = l\cos\varphi$ и функцията $V(\varphi) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi l^3}{3}\cos^2\varphi.\sin\varphi$. Достатъчно е да намерим максимума на функцията $f(\varphi) = \cos^2\varphi.\sin\varphi$, $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

$f'(\varphi) = 2\cos\varphi(-\sin\varphi)\sin\varphi + \cos^2\varphi.\cos\varphi = \cos^3\varphi - 2\cos\varphi(1 - \cos^2\varphi) = \cos\varphi(3\cos^2\varphi - 2)$.

От $f'(\varphi) = 0$ получаваме $\cos\varphi = 0$ и $\cos\varphi = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

За $\cos\varphi = 0$ и $\cos\varphi = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ φ е извън интервала $(0, \frac{\pi}{2})$ $\Rightarrow$ $\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Тогава $\sin\varphi = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

$f''(\varphi) = -9\cos^2\varphi\sin\varphi + 2\sin\varphi = 9\sin^3\varphi - 7\sin\varphi$, чиято стойност при $\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$ е $-\frac{4\sqrt{3}}{3} < 0$ $\Rightarrow$ $f(\varphi)$ има максимум при $\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Максималният обем е $V = \frac{\pi l^3}{3}\cos^2\varphi.\sin\varphi = \frac{\pi l^3}{3}\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi\sqrt{3}\,l^3}{27}$.

Тъй като $h = r\,\mathrm{tg}\,\varphi = r\frac{\sqrt{2}}{2}$, тогава от всички конуси с образуваща l най-голям обем има този, за който $h = \frac{r\sqrt{2}}{2}$.▲

2. От всички цилиндри с даден обем намерете този, който има най-малка повърхнина.

Решение. Имаме $V=\pi r^2 h$, $l=h=\dfrac{V}{\pi r^2}$ и $S_1=2\pi r(r+l)$.

Избираме за неизвестно радиуса r. Изследваме функцията

$$S_1(r)=2\pi r\left(r+\frac{V}{\pi r^2}\right)=2\left(\pi r^2+\frac{V}{r}\right),\ r>0.$$

$$S_1'(r)=2\left(2\pi r-\frac{V}{r^2}\right)=\frac{2}{r^2}\left(2\pi r^3-V\right)=0,\ r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},\ r^3=\frac{V}{2\pi}.$$

$S_1''(r)=2\left(2\pi+\dfrac{2V}{r^3}\right)$, чиято стойност при $r^3=\dfrac{V}{2\pi}$ е $2\left(2\pi+\dfrac{2V2\pi}{V}\right)>0$

$\Rightarrow$ минималната повърхнина е

$S_{1\,\min}=S_1\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)=2\left(\dfrac{\pi r^3+V}{r}\right)=2\left(\dfrac{\pi\dfrac{V}{2\pi}+V}{r}\right)=\dfrac{3V}{r}=3V\sqrt[3]{\dfrac{2\pi}{V}}$, което означава, че за цилиндъра с най-малка повърхнина е изпълнено $S_1=\dfrac{3V}{r}$ или $r\,S_1=3V$ или $r.2\pi r(r+h)=3.\pi r^2 h$, $\pi r^2(2r-h)=0 \ \Rightarrow\ h=2r \ \Rightarrow$ осното сечение на този от цилиндрите с даден обем, който има най-малка повърхнина, е квадрат.▲

3. Сечението на кълбо с равнина служи за основа на конус, на който върхът е в центъра на кълбото. Да се изследва изменението на обема на конуса в зависимост от разстоянието на сечението до центъра на кълбото и да се намерят екстремумите на този обем, ако кълбото има радиус R.

4. Равнобедрен триъгълник с периметър $2p$ се върти около симетралата на основата си. Да се намерят страните на триъгълника, така че обемът на полученото тяло да бъде максимален.

5. В конус, на който височината е една трета от диаметъра на основата му, да се впише цилиндър, който има най-голям обем. Да се намери тангенсът на острия ъгъл между диагоналите на осното сечение на цилиндъра.

6. От всички цилиндри, вписани в конус с радиус R и височина H, намерете радиуса и обема на този, който има най-голям обем.

7. Дадена е правоъгълна координатна система Oxy и точките $A(3,0)$ и $B(0,5)$. Произволна точка M от отсечката AB има абсциса $OM_1=x$ и ордината $OM_2=y$.

Да се изрази като функция на x обемът на тялото, което се получава от въртенето на правоъгълника OM_1MM_2 около ординатната ос.

Да се намери за кои стойности на x полученото тяло има максимален обем и да се пресметне този обем.

8 Дължините на околните ръбове MA и MC на пирамидата $ABCDM$ (M – връх) са различни от 1, а дължините на основните са равни на 1. При какви дължини на MA и MC обемът на пирамидата е най-голям? Намерете този обем.

2.3. Комбинации от ротационни тела

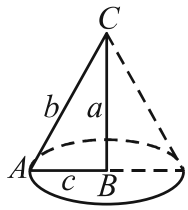
1) Ротационни тела

При завъртане на триъгълник, успоредник или трапец около права от равнината на фигурата се получава ротационно тяло, което е комбинация от изучените ротационни тела.

1. Даден е ΔABC със страни $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$ и височина h_a към BC. Да се намерят повърхнината S и обемът V на тялото, получено при завъртането на ΔABC около BC, ако:

а) $\angle B = 90°$; б) $\angle B < 90°$; в) $\angle B > 90°$.

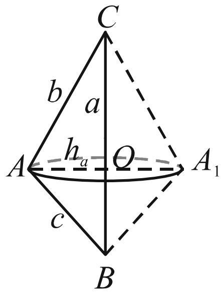
Решение.



а) Полученото тяло е прав кръгов конус с радиус $c = h_a$, височина a и образуваща b. Тогава повърхнината на тялото е:

$$S = \pi r(r+l) = \pi c(c+b) = \pi h_a(b+c), \quad V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi c^2 a}{3} = \frac{\pi h_a^2 a}{3}.$$

б) Нека точка A_1 е симетрична на точка A относно правата BC и нека $AA_1 \cap BC = O$. Точка O е между точки B и C. Имаме $CO + OB = CB = a$.

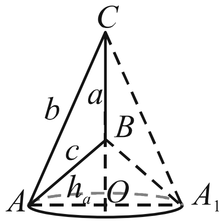


Полученото тяло се състои от два конуса, получени при завъртането на ΔAOC и ΔAOB съответно около CO и OB.

Повърхнината на полученото тяло е сбор от околните повърхнини на тези конуси, $S = \pi h_a b + \pi h_a c = \pi h_a(b+c)$.

Обемът на полученото тяло е сбор от обемите на конусите $V = \dfrac{\pi h_a^2 CO}{3} + \dfrac{\pi h_a^2 OB}{3} = \dfrac{\pi h_a^2 a}{3}$.

в) Точки O и A_1 са получени, както в подточка б). Точка B е между точки C и O. Сега $CO - BO = CB = a$.



Разглеждаме двата конуса, получени при завъртането на ΔAOC около CO и при завъртането на ΔAOB около BO.

Повърхнината на полученото тяло е сбор от околните повърхнини на тези конуси, $S = \pi h_a b + \pi h_a c = \pi h_a(b+c)$.

Обемът на полученото тяло е разлика от обемите на тези конуси. $V = \dfrac{\pi h_a^2 CO}{3} - \dfrac{\pi h_a^2 BO}{3} = \dfrac{\pi h_a^2 a}{3}$.▲

<u>Коментар</u>. И в трите случая получихме $S = \pi h_a(b+c)$ и $V = \dfrac{\pi h_a^2 a}{3}$.▲

2. В ΔABC $AC = 20$, $BC = 37$, $AB = 51$. Намерете повърхнината и обема на тяло, получено при завъртането на ΔABC около:

а) AB;

б) права през точка A, перпендикулярна на AB и лежаща в равнината на триъгълника;

в) права през точка B, перпендикулярна на AB и лежаща в равнината на триъгълника;

г) височината към AB;

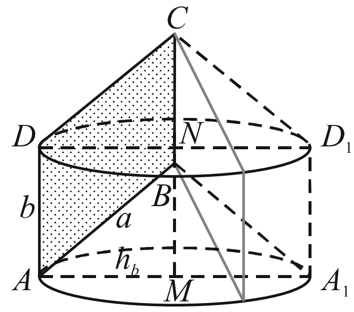
д) правата AC.

3. Успоредник $ABCD$ със страни $AB = a$ и $BC = b$ и височина h_b от върха D към BC е завъртян около страната BC. Да се намерят повърхнината S и обемът V на тяло, получено при завъртането на $ABCD$ около BC, ако:

а) $\angle B = 90°$, б) $\angle B > 90°$; в) $\angle B < 90°$.

Решение. а) Успоредникът е правоъгълник. Полученото тяло е прав кръгов цилиндър с радиус $r = a = h_b$ и височина и образуваща $h = l = b$. Повърхнината и обемът на тялото са $S = 2\pi r(r+l) = 2\pi a(a+b) = 2\pi h_b(a+b)$ и $V = \pi r^2 h = \pi a^2 b = \pi h_b{}^2 b$.

б) Нека точки A_1 и D_1 са симетрични съответно на точки A и D спрямо правата BC. Нека $AA_1 \cap BC = M$ и $DD_1 \cap BC = N$.



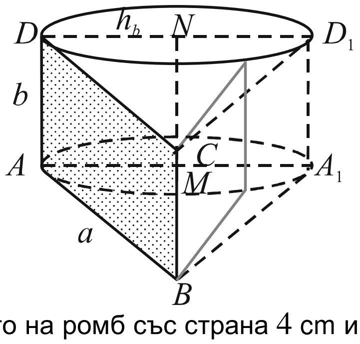
Триъгълниците AA_1B и DD_1C са еднакви $\Rightarrow$ височините им BM и CN са равни.

$AMND$ е правоъгълник $\Rightarrow$ $MN = AD = b$.

Повърхнината на полученото тяло се състои от околните повърхнини на прав кръгов цилиндър с образуваща $AD = b$, прав кръгов конус с образуваща $AB = a$ и прав кръгов конус с образуваща $DC = a$.

Или $S = 2\pi h_b b + \pi h_b a + \pi h_b a = 2\pi h_b b + 2\pi h_b a = 2\pi h_b(a+b)$.

Обемът на полученото тяло се получава като от обема на прав кръгов цилиндър, получен при завъртането на $AMND$ около MN извадим обема на прав кръгов конус, получен при завъртането на ΔAMB около MB и добавим обема на прав кръгов конус, получен при завъртането на ΔDNC около NC.



От изведените по-горе равенства лесно се вижда, че обемите на двата конуса са равни. Така получаваме, че търсеният обем е $V = \pi r^2 h = \pi h_b{}^2 b$.

в) С разсъждения, аналогични на тези от подточка б) се получава същият резултат.

И в трите случая получихме $S = 2\pi h_b(a+b)$ и $V = \pi h_b{}^2 b$. ▲

4. Намерете повърхнината и обема на тяло, получено при завъртането на ромб със страна 4 cm и остър ъгъл $60°$ около права от равнината на ромба, перпендикулярна на една от страните му и минаваща през връх на:

а) остър ъгъл; б) тъп ъгъл.

5. Триъгълник ΔABC е правоъгълен с катети $AC = 4$ и $BC = 3$. Намерете повърхнината и обема на тяло, получено при завъртането на ΔABC около:

а) хипотенузата;

б) права в равнината на триъгълника през точка A и перпендикулярна на хипотенузата.

6. Успоредник със страни a и b и лице S е завъртян около една от страните си.

а) Да се намери обемът V_a на тяло, получено при завъртането на успоредника около страна a.

б) Намерете отношението $\dfrac{V_a}{V_b}$, където V_b е обемът на тяло, получено при завъртането на успоредника около страна b.

7. Правоъгълен триъгълник с лице S и остър ъгъл α при по-големия катет се върти около ос, която минава през върха на малкия катет, успоредно на големия катет. Да се намери обемът на полученото тяло.

8. Даден е трапец $ABCD$ с голяма основа $AB = a$, малка основа $CD = b$, бедра $AD = c$, $BC = d$ и височина h. Да се намерят повърхнините и обемите на телата, получени при завъртането на трапеца около AB, CD и AD.

9. Ротационно тяло е получено при завъртането на правоъгълен трапец около права, перпендикулярна на основите и минаваща през върха на тъпия ъгъл. Малката основа и височината са съответно 4 и 6. Намерете повърхнината и обема на образуваното тяло, ако голямата основа на трапеца е:

а) 8; б) 12.

10. В трапец $ABCD$ с основи $AB = 8$ и $CD = 2$ симетралата на AD минава през точка B и $\cos\angle BAD = \frac{1}{4}$. Намерете повърхнината и обема на тялото, получено при завъртане на $ABCD$ около симетралата на AD.

11. Успоредник $ABCD$ със страни $AB = 77$ cm и $BC = 25$ cm и диагонал $BD = 74$ cm е завъртян около голямата си страна. Намерете радиуса и повърхнината на полученото ротационно тяло.

12. Равнобедрен трапец с основи 473 cm и 143 cm и бедро 219 cm е завъртян около малката си основа. Да се намери повърхнината на полученото ротационно тяло.

13. При завъртане на триъгълник със страни $a < b < c$ около всяка от страните a, b и c се получават тела с повърхнини съответно S_a, S_b и S_c и с обеми съответно V_a, V_b, V_c.

а) Да се сравнят S_a, S_b и S_c. б) Да се сравнят V_a, V_b, V_c.

2) Комбинации от ротационни тела

Темата не е включена в учебната програма, поради което е незадължителна.

Сфера и цилиндър

Сферата е описана около цилиндър, ако окръжностите на основите му лежат върху сферата.

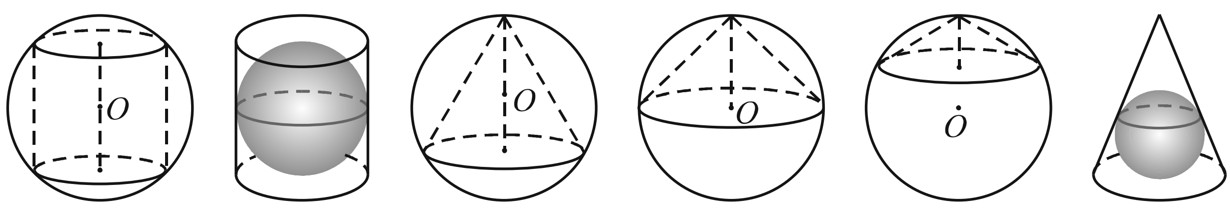
Сферата е вписана в цилиндър, ако основите му са допирателни към сферата и околната повърхнина на цилиндъра и сферата имат точно една обща окръжност.

Сфера и конус

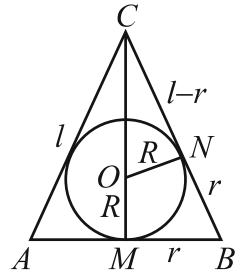
Сферата е описана около конус, ако основата на конуса е сечение на сферата и върхът му лежи на сферата.

За разположението на центъра на сферата има три възможности – да бъде вътре в конуса, да лежи на основата на конуса и да бъде вън от конуса.

Сфера е вписана в конус, ако основата му е допирателна към сферата и околната повърхнина на конуса и сферата имат точно една обща окръжност.



14. В конус с радиус r и образуваща l е вписана сфера. Да се намери радиусът на сферата.



Решение. Нека O и R са съответно центърът и радиусът на сферата. Равнина през точка O пресича сферата в голяма окръжност, а конуса в осно сечение, което е равнобедрен ΔABC с основа $AB = 2r$, образуваща $AC = BC = l$, височина $CM = h$ и вписана окръжност – голямата окръжност на сферата.

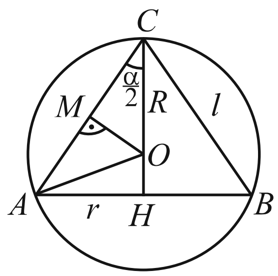
Ако $ON \perp BC$, то $OM = ON = R$, $BM = BN = r$ и $CN = l - r$.

Триъгълниците ONC и BMC са подобни, откъдето $\dfrac{CN}{CM} = \dfrac{ON}{BM}$ или

$\dfrac{l-r}{h} = \dfrac{R}{r}$. Като приложим питагоровата теорема за ΔBMC, получаваме $\dfrac{l-r}{\sqrt{l^2-r^2}} = \dfrac{R}{r}$,

$R = \dfrac{r(l-r)}{\sqrt{l^2-r^2}} = r\sqrt{\dfrac{l-r}{l+r}}$.▲

15. В сфера с радиус R е вписан конус, на който ъгълът при върха на осното му сечение е α. Да се намери повърхнината на конуса.



Решение. През центъра O на сферата построяваме равнина, която пресича сферата в голяма окръжност, а конуса в равнобедрен ΔABC с основа $AB = 2r$, бедра $AC = BC = l$, ъгъл между бедрата α и описана окръжност – голямата окръжност на сферата (r и l са съответно радиусът и образуващата на конуса).

Имаме $S_1 = \pi r(r+l)$.

Триъгълник AOC е равнобедрен ($AO = CO = R$) и ако $OM \perp AC$, от ΔMOC намираме $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{CM}{CO} = \dfrac{l}{2R} \quad \Rightarrow \quad l = 2R\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

От синусовата теорема за ΔABC получаваме $\dfrac{AB}{\sin\alpha} = 2R$, $\dfrac{2r}{\sin\alpha} = 2R \quad \Rightarrow \quad r = R\sin\alpha$.

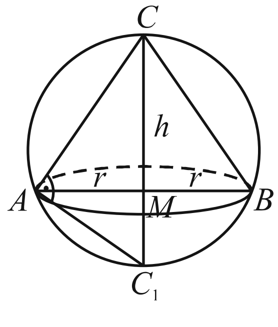
За повърхнината на конуса получаваме:

$$S_1 = \pi r(r+l) = \pi R\sin\alpha(R\sin\alpha + 2R\cos\frac{\alpha}{2}) = \pi R^2\sin\alpha(\sin\alpha + 2\cos\frac{\alpha}{2}) =$$

$$= \pi R^2\sin\alpha(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + 2\cos\frac{\alpha}{2}) = 2\pi R^2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}(\sin\frac{\alpha}{2} + 1) =$$

$$= 4\pi R^2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}).▲$$

16. Около конус с радиус r и височина h е описана сфера. Да се докаже, че диаметърът на сферата е с дължина $\dfrac{r^2+h^2}{h^2}$.



Решение. През центъра на сферата построяваме равнина, която пресича сферата в голяма окръжност, а конуса в равнобедрен ΔABC с основа $AB = 2r$, височина към основата $CM = h$ и описана окръжност k – голямата окръжност на сферата. Тогава, ако CM пресича k в точка $C_1 \neq C$, то CC_1 е диаметър на сферата и $\angle CAC_1 = 90°$.

От метричните зависимости в правоъгълния ΔAC_1C намираме

$r^2 = h.MC_1 \Rightarrow MC_1 = \dfrac{r^2}{h}$. Тъй като $CC_1 = h + MC_1$, то $CC_1 = h + \dfrac{r^2}{h} = \dfrac{r^2 + h^2}{h}$.▲

17. Около конус е описана сфера. През центъра ѝ, успоредно на основата на конуса, е прекарана равнина, която отсича към върха на конуса част с обем $\dfrac{1}{3}$ от обема на целия конус. Да се намери:

а) ъгълът α при върха на осното сечение на конуса;

б) отношението между повърхнината на конуса и повърхнината на сферата.

18. В равностранен* конус с дължина на образуващата $l = 6$ е вписано кълбо. На какво разстояние от върха на конуса трябва да се прекара равнина под центъра на кълбото, перпендикулярна на оста му, така че лицето на кръговия венец, образуван от сеченията на тази равнина с повърхнината на конуса и кълбото да бъде 4π?

19. Да се докаже, че отношението между повърхнината на една сфера и пълната повърхнина на един описан около нея кръгов конус, на който осното сечение е равностранен триъгълник, е $4:9$. Да се докаже, че същото отношение имат и обемите им.

20. В конус е вписана сфера, лицето на повърхнината на която е равно на лицето на основата на конуса. Намерете в какво отношение се дели околната повърхнина на конуса от окръжността на допирането му със сферата.

21. В прав кръгов конус е вписана сфера с лице на повърхнината два пъти по-малко от лицето на пълната повърхнина на конуса. Намерете отношението на обемите на двете тела.

22. В кълбо е вписан конус с височина h. Обемът на конуса е равен на $\dfrac{1}{4}$ от обема на кълбото. Намерете обема на кълбото.

23. В пресечен конус е вписана сфера. Образуващата на пресечения конус сключва с основата му ъгъл, равен на α. Определете пълната повърхнина на пресечения конус, ако радиусът на сферата е равен на R.

24. За конуса, вписан в сфера с радиус R, който има най-голяма околна повърхнина, да се намери:

а) косинусът на ъгъла при върха на осното сечение на конуса;

б) околната повърхнина на конуса.

25. В сфера с диаметър d да се впише цилиндър с най-голяма околна повърхнина. Намерете обема на този цилиндър.

26. Цилиндър с ъгъл α между диагоналите на осното му сечение е вписан в полусфера с радиус R, така че основите на двете тела лежат в една равнина. Да се намери $\cos\alpha$, така че обемът на цилиндъра да бъде най-голям.

* Конус е равностранен, ако осното му сечение е равностранен триъгълник.

2.4. Комбинации от многостени и сфери

1) Описана сфера

Равнината, която минава през средата на една отсечка и е перпендикулярна на нея, се нарича **симетрална равнина**. Всяка точка от симетралната равнина е на равни разстояния от краищата на отсечката и обратно.

Определение. Многостен, на който всички върхове лежат на сфера, се нарича **вписан многостен в сфера**. Също така казваме, че около многостена може да се опише сфера или че **сферата е описана** около многостен.

От определението е ясно, че всички върхове на многостена са на равни разстояние от центъра на сферата.

Теорема 1. Около многостен може да се опише сфера точно когато симетралните равнини на всички ръбове на многостена се пресичат в една точка, която е центърът на сферата.

Доказателство. Нека около многостена се описва сфера с център O. Това означава, че всички върхове са на равни разстояния от точката O, откъдето следва, че O лежи в симетралната равнина на всеки ръб на многостена, тоест O е пресечна точка на тези симетрални равнини.

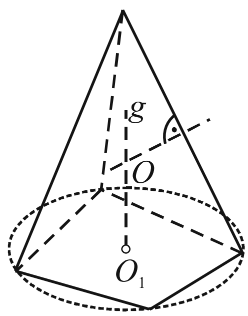
Нека сега симетралните равнини на ръбовете на даден многостен се пресичат в една точка O. Да разгледаме два ръба, които имат общ връх. Точка O лежи на симетралните им равнини, следователно е на равни разстояния от трите върха (на двата ръба). Така можем да покажем, че точка O е на равни разстояния от всички върхове и следователно е център на описана сфера.▲

<u>Пирамида и описана сфера (вписана пирамида)</u>

Теорема 2. Около пирамида може да се опише сфера, точно когато около основата ѝ може да се опише окръжност.

Доказателство. Нека основата на пирамида е многоъгълник, около който може да се опише окръжност и центъра ѝ да означим с O_1.

Нека g е правата, която минава през O_1 и е перпендикулярна на равнината на основата. Тогава всички точки върху g са на равни разстояния от върховете на основата (защото проекциите им в основата са равни).



Нека симетралната равнина на един от околните ръбове пресича g в точка O. Следователно O е на равни разстояния от върховете на основата и от върха на пирамидата, тоест всички върхове на пирамидата лежат на сфера с център O.

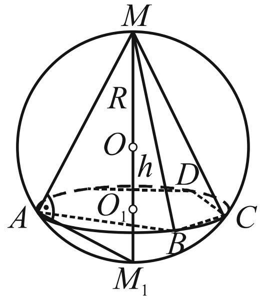
Нека сега около дадената пирамида се описва сфера с център O. Центърът на сферата е на равни разстояния от върховете на пирамидата, в частност от върховете на основата и проекцията на O в основата е точка, която е на равни разстояния от върховете на основата, което означава, че около основата може да се опише окръжност.▲

Следствие 1. Центърът на описаната сфера около пирамида лежи на перпендикуляра към основата през центъра на описаната около основата окръжност.

Следствие 2. Около всяка триъгълна пирамида може да се опише сфера.

Следствие 3. Около всяка правилна пирамида може да се опише сфера.

Следствие 4. Около всяка пирамида с равни околни ръбове може да се опише сфера и ако околните ръбове на пирамида са равни на l, то радиусът R на описаната сфера е $R=\frac{l^2}{2h}$, където h е височината на пирамидата.



Доказателство. Нека пирамидата е $ABCD\ldots M$ и проекцията на върха M е O_1. Всички околни ръбове са равни $\Rightarrow$ около основата се описва окръжност $\Rightarrow$ около пирамидата се описва сфера и центърът O на сферата лежи на височината на пирамидата.

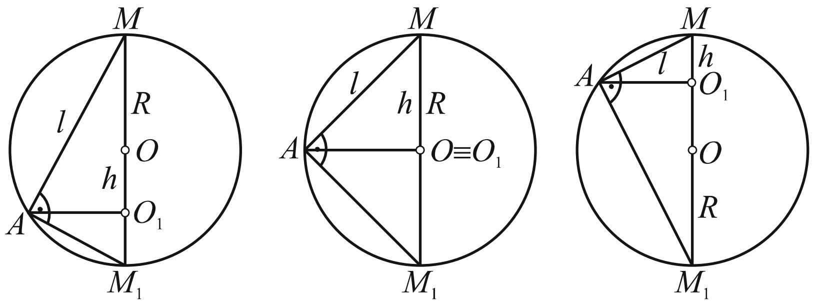
Равнината, определена от околен ръб (например AM) и височината MO_1 пресича сферата в голяма окръжност (защото $O\in MO_1$) и нека MO_1 пресича тази окръжност в точка M_1 (различна от M)

$$\Rightarrow \quad MM_1=2R \quad \text{и} \quad \angle MAM_1=90^\circ.$$

От метричните зависимости в правоъгълния ΔMAM_1 имаме $MA^2=MO_1.MM_1 \quad \Leftrightarrow \quad l^2=h2R$

$\Leftrightarrow \quad R=\frac{l^2}{2h}$.

Доказателството е в сила при различните взаимни положения на точки O и O_1, които са показани на чертежите.

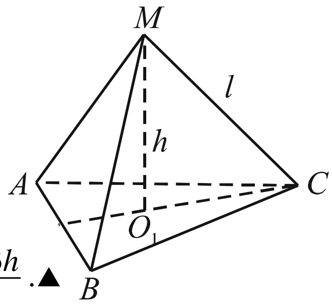


▲

Задачи – пирамида и описана сфера

1. Намерете радиуса R на описаната сфера около правилна пирамида с основен ръб a и височина h, ако пирамидата е:

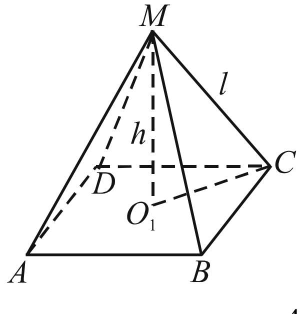
а) триъгълна; б) четириъгълна.



Решение. а) Нека $ABCM$ е правилна триъгълна пирамида с връх M, проекцията на M в (ABC) е O_1, $MO_1=h$ и $MC=l$. Ще намерим l.

В равностранния ΔABC отсечката

$$CO_1=\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow l^2=\frac{a^2}{3}+h^2=\frac{a^2+3h}{3} \Rightarrow R=\frac{l^2}{2h}=\frac{a^2+3h}{6h}.▲$$



Решение. б) Нека $ABCDM$ е правилна четириъгълна пирамида с връх M, проекцията на M в ($ABCD$) е O_1, $MO_1=h$, $MC=l$ и a е страната на $ABCD \Rightarrow CO_1=\frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow l^2=h^2+CO_1^2=h^2+\frac{a^2}{2}=\frac{a^2+2h^2}{2} \Rightarrow$

$$R=\frac{l^2}{2h}=\frac{a^2+2h^2}{4h}.▲$$

2. Да се намери радиусът на описаната сфера на правилна четириъгълна пирамида с височина 4 и основен ръб 4.

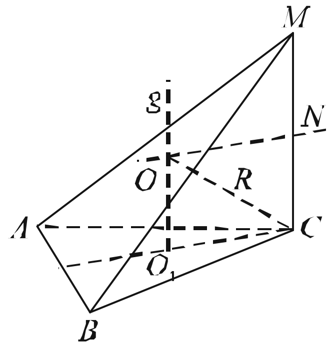
3. Да се намери радиусът на описаната сфера около правилен тетраедър с ръб a.

4. Центърът на сфера дели височината на вписана в сферата правилна четириъгълна пирамида на две части с дължини 4 cm и 5 cm. Да се намери обемът на пирамидата.

5. Околните ръбове на правилна триъгълна пирамида с височина h са взаимно перпендикулярни. Да се намери радиусът на описаната около пирамидата сфера.

6. Основата на пирамида е равностранен триъгълник със страна 3. Един от околните ръбове е с дължина 2 и е перпендикулярен на основата. Да се намери радиусът на описаната сфера.

Решение. Нека $ABCM$ е дадената пирамида, $MC \perp (ABC)$, O_1 е центърът на описаната около основата ABC окръжност и O е центърът на описаната сфера.



Нека g минава през точка O_1 и $g \perp (ABC)$ $\Rightarrow$ $O \in g$ $\Rightarrow$ равнината $\alpha = (MC, g)$ пресича сферата в голяма окръжност. Нека N е средата на MC. Симетралата на MC в α пресича g в центъра O на описаната сфера $\Rightarrow$ OO_1CN е правоъгълник и $OO_1 = 1$, $CO_1 = \sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $R^2 = OO_1^2 + CO_1^2 = 4$, $R = 2$.▲

7. Основата на пирамида е квадрат със страна 4. Един от околните ръбове е с дължина 2 и е перпендикулярен на основата. Да се намери радиусът на описаната около пирамидата сфера.

8. В кълбо с радиус R е вписана пирамида с основа правоъгълник, чиито околни ръбове образуват с основата ъгъл α, а една от околните стени образува с основата ъгъл β. Да се намери обемът на пирамидата.

Призма и описана сфера (вписана призма)

Теорема 3. Около призма може да се опише сфера точно когато призмата е права и около основата ѝ може да се опише окръжност.

Следствие 5. Центърът на описаната около призма сфера е средата на отсечката, която съединява центровете на описаните окръжности в основите.

Следствие 6. Около всяка права триъгълна призма може да се опише сфера.

Следствие 7. Около всяка правилна призма може да се опише сфера.

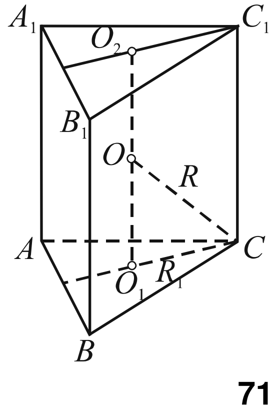
Задачи – призма и описана сфера

9. Да се намери радиусът на описаната сфера около куб, ако ръбът на куба е a.

Решение. Диагоналът на куба е диаметър на сферата $\Rightarrow$ $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.▲

10. В правилна триъгълна призма основният и околният ръб са съответно 3 и 2. Да се намери радиусът на описаната сфера.

Решение.



Равнината, определена от околен ръб (например CC_1) и O_2O_1 пресича сферата в голяма окръжност и средата O на O_2O_1 е центърът на сферата $\Rightarrow$ $OC = R$.

В ΔABC $CO_1 = R_1$ е радиусът на описаната окръжност около основата.

$\Rightarrow$ $R^2 = CO_1^2 + OO_1^2$, $R^2 = R_1^2 + (\frac{h}{2})^2$ $\Rightarrow$ $R^2 = (\sqrt{3})^2 + 1 = 4$, $R = 2$.

11. Намерете радиуса на описаната сфера около правоъгълен паралелепипед с размери 4 cm, 6 cm и 12 cm.

12. В кълбо с радиус 9 е вписана правилна четириъгълна призма с височина 14. Да се намери основният ръб на призмата.

13. Намерете радиуса на сфера, описана около правилна шестоъгълна призма с височина 8 и диагонал на околна стена 13.

14. В сфера с радиус 14 е вписана правилна триъгълна призма. Да се намери основният ръб на призмата, ако диагоналът на околната ѝ стена е 26.

15. Основата на права призма е триъгълник със страни 6 cm, 8 cm и 10 cm. Височината на призмата е 24 cm. Да се намери радиусът на описаната сфера.

16. В сфера с радиус R да се впише правилна триъгълна призма с максимален обем и да се намери стойността му.

2) Вписана сфера

Равнина, която минава през ръба на един двустенен ъгъл и сключва равни ъгли със стените му, се нарича **ъглополовяща равнина** на двустенния ъгъл. Всяка точка от ъглополовящата равнина е на равни разстояния от стените на двустенния ъгъл и обратно.

Определение. Многостен, на който всички стени се допират до сфера, се нарича **описан многостен около сфера.** Също така казваме, че в многостена може да се впише сфера или че **сферата е вписана в многостена.**

Теорема 4. (Описан многостен)

В многостен може да се впише сфера точно когато ъглополовящите равнини на всички двустенни ъгли се пресичат в една точка, която е центърът на сферата.

Доказателство. Нека в многостена се вписва сфера с център O. Това означава, че O е на равни разстояния от стените на многостена и следователно O лежи на ъглополовящите равнини на двустенните ъгли на многостена, тоест O е пресечната точка на тези равнини.

Нека сега ъглополовящите равнини на двустенните ъгли на един многостен се пресичат в една точка O. Тогава точката O ще бъде на равни разстояния от стените на многостена и значи в него може да се впише сфера.▲

Теорема 5. Ако в многостен с лице на повърхнината S_1 и обем V може да се впише сфера с радиус R, то $R = \dfrac{3V}{S_1}$.

Доказателство. Нека точка O е центърът на вписаната сфера. Многостенът може да се разглежда като съставен от пирамиди с връх O и основи стените на многостена. Всяка такава пирамида има височина R и обем $V' = \dfrac{1}{3} S_{\text{стена}}.R$. Като съберем обемите на тези пирамиди ще получим, че $V = \dfrac{1}{3}(\text{сборът от лицата на стените}).R$, тоест $V = \dfrac{1}{3} S_1 R \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{3V}{S_1}$.▲

<u>Пирамида и вписана сфера</u>

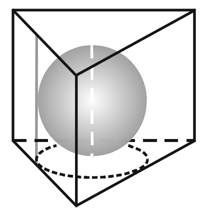
Теорема 6. Във всяка триъгълна пирамида може да се впише сфера.

Теорема 7. Ако двустенните ъгли при основата на пирамида са равни, то в пирамидата може да се впише сфера.

Призма и вписана сфера

Теорема 8. В права призма може да се впише сфера точно когато в основата ѝ може да се впише окръжност и височината на призмата е равна на диаметъра на тази окръжност.

Следствие 8. Проекцията на вписана сфера в права призма е вписаната в основата на призмата окръжност.



Задачи – призма и вписана сфера

17. Да се намери радиусът на вписаната сфера в куб с ръб a.

18. Около сфера с радиус R е описана правилна шестоъгълна призма. Намерете повърхнината на призмата.

19. Около сфера с радиус R е описана правилна триъгълна призма. Да се намерят повърхнината и обемът на призмата.

Задачи – пирамида и вписана сфера

20. Намерете радиуса на сфера, вписана в правилна пирамида с височина h и двустенен ъгъл при основата, равен на:

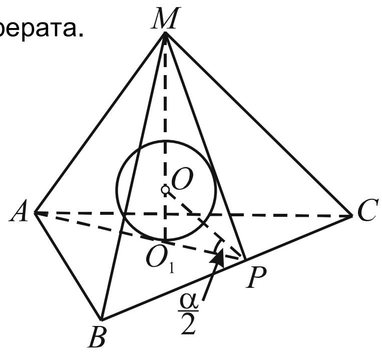
а) $60°$; б) $45°$.

21. Да се намери радиусът на вписаната сфера в правилен тетраедър.

22. За правилна триъгълна пирамида с основен ръб a и височина h намерете центъра на вписаната сфера в пирамидата.

23. За правилна четириъгълна пирамида с основен ръб a и височина h намерете центъра и радиуса на вписаната сфера.

24. В правилна триъгълна пирамида, която има основен ръб a и околната стена сключва с основата ъгъл α, е вписана сфера. Да се намери радиусът на сферата.



Решение. Нека пирамидата е $ABCM$, върхът M се проектира в точка O_1, която е центърът на вписаната в ΔABC окръжност и ако O е центърът на сферата $\Rightarrow$ $O \in MO_1$.

Тогава равнината през околния ръб AM и височината е перпендикулярна на BC и пресича сферата в голяма окръжност и $OO_1 = R$.

Нека P е средата на BC $\Rightarrow$ $\angle APM = \alpha$ е линейният ъгъл на двустенния ъгъл при основата и OP е ъглополовяща на $\angle APM$.

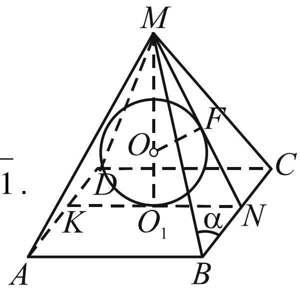
От ΔO_1PO $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{OO_1}{PO_1}$. Имаме $OO_1 = R$ и тъй като от ΔABC $O_1P = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, за R получаваме

$R = O_1P \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.▲

25. В правилна четириъгълна пирамида с основен ръб a и ъгъл между околен и основен ръб α е вписана сфера. Да се намери радиусът на сферата.

Решение. Нека пирамидата е $ABCDM$, върхът M се проектира в точка O_1, която е центърът на квадрата $ABCD$ и ако O е центърът на сферата $\Rightarrow$ $O \in MO_1$.

Тогава равнината през височината MO_1 и средата N на BC пресича сферата в голяма окръжност, която е вписаната окръжност в ΔKNM, където K е средата на AD и $OO_1 = R$.



В ΔBNM $BN = \dfrac{a}{2}$, $\angle NBM = \alpha$ (по условие) $\Rightarrow$ $MN = \dfrac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2}$.

Тъй като $NO_1 = NF = \dfrac{a}{2}$, то $MF = MN - NF = \dfrac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2} - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2}(\mathrm{tg}\,\alpha - 1)$.

Сега от ΔO_1NM по питагоровата теорема намираме: $MO_1 = \dfrac{a}{2}\sqrt{\mathrm{tg}^2\,\alpha - 1}$.

Като използваме, че $\Delta OFM \sim \Delta NO_1M$ за радиуса получаваме

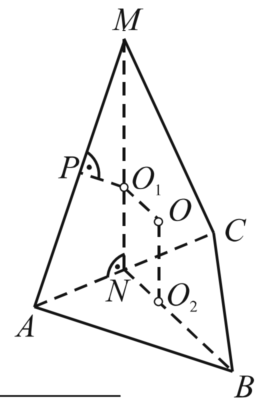
$\dfrac{R}{O_1N} = \dfrac{MF}{MO_1}$, $R = \dfrac{MF.O_1N}{MO_1} = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha - 1}{\mathrm{tg}\,\alpha + 1}}$.▲

26. Околните стени на правилна триъгълна пирамида сключват с основата ъгъл α. Ако височината на пирамидата е h, да се намери радиусът на вписаната сфера.

27. Околните ръбове на правилна четириъгълна пирамида сключват с основата ъгъл α. Ако основният ръб на пирамидата е a, да се намери радиусът на вписаната сфера.

Задачи – вписана и описана сфера

28. Основата на пирамида $ABCM$ е равностранен триъгълник ABC със страна 6. Височината на пирамидата е $MN = 9$, където N е средата на AC. Да се намери повърхнината на описаната около пирамидата сфера.



Решение. Височината $MN \perp (ABC)$ $\Rightarrow$ $MN \perp AC$ и понеже N е средата на AC, то и $BN \perp AC$ $\Rightarrow$ (MNB) е симетралната равнина на ръба AC.

Нека O_1 и O_2 са центровете на описаните окръжности съответно около стените ACM и ABC. Тогава перпендикулярите към (ACM) и (ABC), минаващи съответно през O_1 и O_2, ще лежат в равнината (MNB) и ще се пресичат. Пресечната им точка O е центърът на описаната сфера.

Радиусът на описаната сфера $R = OM$ изразяваме от ΔO_1OM: $R = \sqrt{MO_1^{\,2} + OO_1^{\,2}}$.

Четириъгълникът NO_2OO_1 е правоъгълник $\Rightarrow$ $OO_1 = NO_2 = \dfrac{1}{3}.\dfrac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Нека симетралата на AM я пресича в точка P. Тогава $\Delta PO_1M \sim \Delta NAM$

$\Rightarrow$ $\dfrac{MO_1}{MA} = \dfrac{MP}{MN}$, $MO_1 = \dfrac{MA.MP}{9} = \dfrac{MA^2}{18}$.

От правоъгълния ΔANM намираме $MA^2 = MN^2 + AN^2 = 9^2 + 3^2 = 90$ $\Rightarrow$ $MO_1 = 5$.

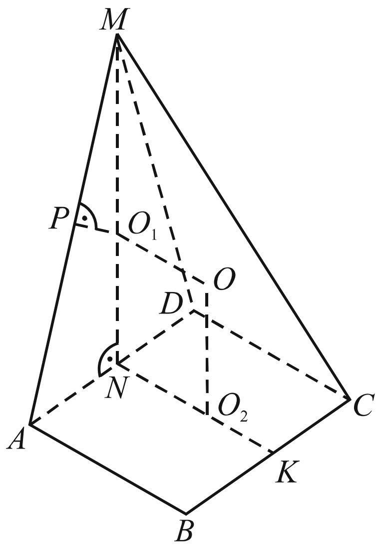
Окончателно за радиуса и повърхнината на сферата получаваме $R = \sqrt{25+3} = 2\sqrt{7}$ и $S = 4\pi R^2 = 4\pi.4.7 = 112\pi$.▲

29. Основата на пирамида $ABCM$ е равностранен ΔABC с височина 3. Височината на пирамидата е $\sqrt{3}$ и минава през средата на околен ръб. Да се намери обемът на описаното около пирамидата кълбо.

30. Равностранен ΔABC е основа на пирамида $ABCM$. Височината на пирамидата е MN, където N е средата на AC. Да се намери обемът на пирамидата, ако $MN = BN$ и радиусът на описаната около пирамидата сфера е 5.

31. Основата на пирамида $ABCDM$ е квадрат $ABCD$ със страна $2\sqrt{3}$. Височината на пирамидата е MN, където N е средата на AD. Да се намери обемът на описаното около пирамидата кълбо, ако:

а) $AM = 2\sqrt{3}$; б) $AM = 2$.



Решение. а) Височината $MN \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp AD$ и понеже N е средата на AD, то и $KN \perp AD$ (K е средата на BC) $\Rightarrow$ (MNK) е симетралната равнина на ръба AD.

Нека O_1 и O_2 са центровете на описаните окръжности съответно около стените ADM и $ABCD$. Тогава перпендикулярите към (ADM) и ($ABCD$), минаващи съответно през O_1 и O_2, ще лежат в равнината (MNK) и ще се пресичат. Пресечната им точка O е центърът на описаната сфера.

Радиусът на описаната сфера $R = OM$ изразяваме от ΔO_1OM : $R = \sqrt{MO_1^2 + OO_1^2}$.

От правоъгълника NO_2OO_1 имаме $OO_1 = NO_2 = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{3}$.

Триъгълник ADM е равнобедрен (MN е височина и медиана) и понеже $AD = 2\sqrt{3} = AM$, той е равностранен $\Rightarrow$ $MN = \dfrac{AD\sqrt{3}}{2} = 3$ и $MO_1 = \dfrac{2}{3}MN = 2$ $\Rightarrow$ $R = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$.

Обемът на описаното кълбо е $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{28\sqrt{7}\pi}{3}$.▲

32. Основата на пирамида $ABCDM$ е квадрат $ABCD$ със страна 2. Околната стена AMD е перпендикулярна на основата, $AM = DM$ и $\angle AMD = 90°$. Да се намери отношението на обема на пирамидата към обема на описаното около нея кълбо.

33. В сфера с радиус 2 е вписана пирамида $ABCDM$ с основа квадрат $ABCD$. Околната стена ADM на пирамидата е равнобедрен правоъгълен триъгълник с хипотенуза AD. Да се намери повърхнината на пирамидата.

34. В кълбо с радиус R да се впише правилна триъгълна пирамида с най-голям обем. Да се намерят този обем и ъгълът между височината и околния ръб на получената пирамида. Да се докаже, че пирамидата е правилен тетраедър.

35. В правилна четириъгълна пирамида с височина h и ъгъл β между околния ръб и основата е вписана сфера. Да се намери радиусът на сферата.

36. В правилна четириъгълна пирамида с височина $h = 20$ и основен ръб $a = 30$ е вписано кълбо. Построено е успоредно сечение на пирамидата на разстояние два пъти радиуса на кълбото от основата. В какво отношение сечението дели обема на пирамидата, считано от върха?

37 В кълбо с радиус $R = 25$ е вписана правилна пресечена четириъгълна пирамида с височина $h = 22$ и основен ръб $a = 24\sqrt{2}$ на голямата основа. Да се намери околният ръб на пресечената пирамида.

38. Около кълбо с радиус 3 cm е описана правилна пресечена четириъгълна пирамида с ръб на голямата основа 18 cm. Да се намери околната повърхнина на пресечената пирамида.

39. Основата на пирамида е правоъгълник с лице B и остър ъгъл между диагоналите φ. Околните ръбове на пирамидата сключват с равнината на основата ъгъл α. Да се намери радиусът на сферата, описана около пирамидата.

40. Сфера с радиус R е вписана в пирамида, основата на която е ромб с остър ъгъл α. Околните стени на пирамидата сключват с равнината на основата ъгъл β. Определете пълната повърхнина на пирамидата.

Общи задачи
Геометрични модели

Ротационни тела

1. Правоъгълен триъгълник с хипотенуза c е завъртян около хипотенузата си. Полученото ротационно тяло има обем V. Намерете повърхнината на тялото, ако:

а) $c = 25$ cm, $V = 1200\pi$ cm^3; б) $c = 13$ cm, $V = \frac{1200\pi}{13}$ cm^3.

2. При завъртането на равнобедрен триъгълник около бедрото му се получава тяло с обем V_1, а при завъртане около основата му – тяло с обем V_2. Да се намери отношението $V_1 : V_2$, ако ъгълът във върха на триъгълника е:

а) $120°$; б) 2α.

3. Правоъгълен триъгълник с лице S е завъртян около хипотенузата си. Намерете обема на полученото тяло, ако триъгълникът има остър ъгъл, равен на:

а) $30°$; б) $45°$; в) α.

4. Триъгълник със страни 15 cm, 37 cm и 44 cm е завъртян около най-дългата си страна. Да се намерят повърхнината и обемът на полученото тяло.

5. Трапец $ABCD$ с основи $AB = 24$ cm, $CD = 10$ cm и бедра $AD = 13$ cm и $BC = 15$ cm е завъртян около права a в равнината на трапеца. Да се намерят повърхнината и обемът на полученото ротационно тяло, ако:

а) AB лежи на a; б) CD лежи на a; в) $a \perp AB$ и $A \in a$;
г) $a \perp AB$ и $D \in a$; д) $a \perp AB$ и $C \in a$.

6. Трапец $ABCD$ с основи $AB = 74$ cm и $CD = 11$ cm и бедра $AD = 52$ cm и $BC = 25$ cm е завъртян около права в равнината на трапеца, перпендикулярна на AB и минаваща през точка D. Да се намерят повърхнината и обемът на полученото тяло.

7. Даден е ΔABC със страни $AB = 150$ cm, $BC = 145$ cm и $AC = 25$ cm. Тяло T_1 е получено при завъртане на триъгълника около AC, а тяло T_2 – около AB. Да се намери отношението на обеми $V_{T_1} : V_{T_2}$.

8. Даден е ΔABC със страни $AB = 175$ cm, $BC = 145$ cm и $AC = 40$ cm. Тяло T_1 е получено при завъртане на триъгълника около AC, а тяло T_2 – около AB. Да се намери отношението на обеми $V_{T_1} : V_{T_2}$.

Комбинации от ротационни тела

9. В прав кръгов пресечен конус е вписано кълбо. Обемът на кълбото е равен на половината от обема на конуса. Да се намери тангенсът на ъгъла, заключен между образуващата и основата на конуса.

10. Намерете радиуса на сферата, описана около пресечен конус, на който радиусите на основите са R и r, където $R > r$, а образуващата сключва с равнината на голямата основа ъгъл α.

11. В пресечен конус, образуващата на който има дължина l и сключва с основата му ъгъл с големина α, е вписана сфера. Намерете обема и лицето на повърхнината на конуса, основата на който е ограничена от окръжността на допирането на сферата и пресечения конус, а върхът му се намира в центъра на сферата.

12. В конус с радиус R и височина H е вписан цилиндър с радиус r и височина h. Да се докаже, че $\frac{r}{R}+\frac{h}{H}=1$.

13. В кръг е вписан правоъгълен триъгълник със синус на единия остър ъгъл, равен на $\frac{3}{5}$. При завъртане на триъгълника около хипотенузата му кръгът образува кълбо, а триъгълникът – вписано в кълбото тяло. Какво е отношението на обема на тялото към обема на кълбото?

14. Прав кръгов конус с височина h е пресечен с равнина, която минава през върха му и сключва с равнината на основата на конуса ъгъл α. Полученото сечение е равностранен триъгълник.

а) Намерете лицето на пълната повърхнина на конуса.

б) Намерете обема на описаното около конуса кълбо.

15. Основата на права призма е правоъгълен триъгълник с лице B и остър ъгъл α. Височината на призмата е равна на диаметъра на вписаната в основата ѝ окръжност.

а) Намерете лицето на пълната повърхнина и обема на призмата.

б) Намерете лицето на сферата, описана около призмата.

16. В кълбо с дължина на радиуса R е вписан прав кръгов конус. Големината на ъгъла между образуващата и височината на конуса е α. Да се намерят лицето на повърхнината и обемът на конуса.

17. Даден е прав кръгов конус с образуваща 13 cm и височина 12 cm.

а) Намерете обема на кълбото, вписано в конуса.

б) Права, успоредна на основата на конуса пробожда повърхнината му в две точки A и B. Намерете дължината на отсечката AB, ако разстоянията от правата до основата на конуса и до височината му са равни съответно на 6 cm и 2 cm.

18. Даден е конус с височина h, ъгъл при върха на осното сечение α и радиус на вписаната сфера R. Да се докаже, че $R=h.\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4})$.

19. Обемът на вписаното в конус кълбо е $\frac{4}{9}$ от обема на конуса. Намерете ъгъла между образуващата и равнината на конуса.

<u>Комбинации от многостени и сфери</u>

20. Основата на пирамида е ромб с остър ъгъл, равен на α. Всички околни стени образуват с равнината на основата равни двустенни ъгли, равни на β. Разстоянието от върха на пирамидата до един от основните ѝ ръбове е k. Да се намери:

а) лицето на повърхнината на пирамидата;

б) радиусът на вписаната в пирамидата сфера.

21. За основа на пирамида служи равнобедрен трапец, малката основа и бедрото на който имат дължина b, а острият ъгъл на трапеца е α. Всичките околни ръбове на пирамидата образуват с равнината на основата ѝ ъгъл β.

а) Да се намери обемът на пирамидата.

б) Да се докаже, че около пирамидата може да се опише сфера и да се намери радиусът ѝ.

22. В сфера с радиус R е вписана правилна четириъгълна пирамида, чиято височина е равна на основния ръб. През центъра на сферата е построено успоредно сечение на пирамидата. Да се намери обемът и околната повърхнина на получената пресечена пирамида.

23. Основата на пирамида е равностранен триъгълник със страна b. Височината на пирамидата минава през средата на един основен ръб и е $\frac{3}{2}b$. Намерете обема на сферата, описана около пирамидата.

24. Колко пъти обемът на правилен тетраедър е по-голям от обема на вписаното в него кълбо?

25. Намерете обема на правилна триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$, ако радиусът на сферата, вписана в частта ѝ $BCC_1B_1A_1$ е r.

26. Основата на права призма е правоъгълен триъгълник с периметър $2p$ и остър ъгъл α. Намерете околната повърхнина на призмата, ако в нея може да се впише сфера.

27. Основата на триъгълна пирамида е равнобедрен триъгълник, чието лице е B, а ъгълът при върха му е α. Намерете обема на пирамидата, ако височината на пирамидата сключва с всяка околна стена ъгъл β.

28. Основата на триъгълна пирамида $ABCM$ е равностранен ΔABC. Стената MAC е перпендикулярна на равнината (ABC) и $MA = MC = AC$. Радиусът на описаната сфера около пирамидата е $\frac{\sqrt{15}}{5}$. Да се намери радиусът на вписаната сфера в пирамидата.

29. В правилна четириъгълна пирамида, вписана в сфера, е вписано кълбо. Намерете косинуса на ъгъла между околна стена и основата, ако се знае, че двата центъра съвпадат.

30. Около правилна триъгълна пирамида е описана сфера с радиус R, центърът на която съвпада с центъра на кълбото, вписано в пирамидата. Намерете обема на вписаното кълбо.

31. Основата ABC на пирамидата $ABCM$ е равнобедрен правоъгълен триъгълник с катети $BA = BC = a$. Всички околни ръбове са равни на a. Да се намери разстоянието от центъра на вписаната сфера в пирамидата до ръба MB.

32. Намерете повърхнината на призма с лице на основата B, която е описана около сфера.

33. В права призма с основа ромб е вписана сфера. Един от ъглите на ромба е $30°$, а обемът на призмата е 16 cm^3. Намерете радиуса на сферата.

34. В четириъгълна пирамида $ABCDM$ е вписана сфера. Основата ѝ е равнобедрен трапец $ABCD$ с бедро $AD = b$ и остър ъгъл α, а околните стени MAB и MCD са равнобедрени триъгълници, които сключват с основата един и същ ъгъл β. Намерете радиуса на вписаната сфера.

35. Височината на правилна четириъгълна пирамида е h, а ъгълът между две съседни околни стени е 2δ. Намерете радиуса на вписаната в пирамидата сфера.

36. Лицето на долната основа в правилна триъгълна пресечена пирамида е 4 пъти по-голямо от лицето на горната основа. В тази пресечена пирамида може да се впише сфера. Намерете тангенса на двустенния ъгъл при основния ръб на долната основа.

37. Основният ръб на правилна триъгълна пирамида $ABCM$ е $AB = b$, а височината на пирамидата е $MO = b\sqrt{2}$. Сфера, вписана в пирамидата, се допира до стената MBC в точка T. Да се намери дължината на отсечката AT.

38. Околните стени на триъгълна пирамида $ABCM$ с връх M образуват равни двустенни ъгли с основата на пирамидата. Известно е, че $\angle AMB = 105°$, $\angle BMC = 90°$, $\angle MCA = 60°$. Да се намери частното от лицата на ΔABO и ΔABC, където O е ортогоналната проекция на върха M върху основата.

39. Две страни на триъгълник са 8 cm и 12 cm, а мерките на ъглите срещу тях се отнасят както $1:2$. Този триъгълник служи за основа на пирамида с лице на околната повърхнина 60 cm^2. Намерете обема на пирамидата, ако околните ѝ стени сключват с основата равни ъгли.

40. Основите на паралелепипед са квадрати със страна b, а всички околни стени са ромбове. Един от върховете на горната основа е равноотдалечен от върховете на долната основа. Намерете обема на паралелепипеда.

41. Основата на пирамида е правоъгълник със страни a и b ($b < a < 3b$). Лежащите срещу тези страни в околните стени на пирамидата ъгли се отнасят съответно както $3:1$. Да се намери радиусът на описаната сфера около пирамидата, ако всичките ѝ околни ръбове са равни.

42. Дадена е пирамида с основа трапец и равни околни ръбове. Височината на пирамидата е 4 cm, а радиусът на окръжността, описана около трапеца, е 2 cm. Намерете радиуса на описаната сфера около пирамидата.

43. Околният ръб на правилна триъгълна пирамида е l, а радиусът на описаната сфера около нея е R. Да се намери обемът на пирамидата.

44. Основата на четириъгълна пирамида $ABCDM$ е трапец $ABCD$ с периметър 90 и малка основа $CD = 18$. Диагоналът BD разполовява $\angle ADC$. Да се намери радиусът на описаната сфера около пирамидата, ако дължините на всичките ѝ околни ръбове са равни на 20.

45. Права призма с височина 4 cm има основа правоъгълен триъгълник с катети 2 cm и 4 cm. Около нея е описана сфера. Да се намери радиусът на сферата.

46. Намерете радиуса на сфера, описана около правоъгълен паралелепипед с диагонали на стените 20 cm, 19 cm, 11 cm.

47. Да се намери радиусът на описаната сфера около правилна триъгълна пресечена пирамида с околен ръб 13, височина 12 и отношение между дължините на двата основни ръба $2:1$.

48. В сфера с радиус R е вписана пирамида $ABCDM$ с основа трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$), за който $CD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB$ и $\angle ABC = 75°$. Околната стена MAB е равнобедрен триъгълник с бедра $MA = MB$ и е перпендикулярна на равнината на основата.

а) Ако h е височината на пирамидата, да се изрази обемът на пирамидата чрез R и h.

б) Измежду всички такива пирамиди, вписани в дадена сфера, да се намери тази, която има най-голям обем и да се пресметне този обем.

49. Върховете на равнобедрен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) лежат върху сфера с радиус R. Острият ъгъл на трапеца е равен на 2α. Да се намери разстоянието от центъра на сферата до равнината на трапеца, ако е известно, че голямата му основа AB има дължина R и $AD = BC = CD$.

50. Основата $ABCD$ на пирамида $ABCDM$ е трапец с бедра, равни на малката основа, голяма основа с дължина a и тъп ъгъл α. Ако околните ръбове на пирамидата сключват с височината на пирамидата ъгъл $30°$, да се намери:

а) обемът на пирамидата;

б) обемът на описаното кълбо около пирамидата;

в) ъгълът α, когато правите BC и MA са перпендикулярни.

51. Основата на пирамида е правоъгълник, ъгълът между диагоналите на който е α. Единият ѝ околен ръб е перпендикулярен на основата, а най-големият ѝ околен ръб образува с равнината на основата също ъгъл α. Радиусът на сферата, описана около пирамидата е R. Намерете обема ѝ.

52. Основата на триъгълна пирамида $ABCM$ е правоъгълният ΔABC, $\angle C = 90°$. Нека $MA = MB = MC = 5$ cm и $AB = 8$ cm.

а) Да се докаже, че центърът на описаната сфера около $ABCM$ е вън от $ABCM$ и да се намери радиусът на тази сфера.

б) Ако $\angle ABC = 45°$, да се намери ъгълът между равнините (ABC) и (MBC).

в) Да се намерят пълната повърхнина и обемът на пирамидата, ако $\angle ABC = 45°$.

53. Правилна четириъгълна пирамида е вписана в сфера. Намерете обема на пирамидата, ако радиусът на сферата е 12 cm, а радиусът на окръжността, описана около основата на пирамидата, е равен на 6 cm.

54. Намерете обема на кълбо, описано около правилна триъгълна пирамида с основен ръб b и околен ръб, равен на радиуса на кълбото.

55. В сфера с радиус R е вписана правилна триъгълна пирамида с ъгъл 2α между околните ръбове. Намерете височината на пирамидата.

56. Основата ABC на триъгълна пирамида $ABCM$ е равностранен триъгълник със страна b. Околният ръб AM също е равен на b, а другите два са равни на $b\sqrt{2}$. Намерете радиуса на описаната сфера около пирамидата.

57. Основата на пирамида $ABCM$ е равнобедрен триъгълник ABC с бедра $AC = BC = b$ и $\angle ACB = \alpha$. Околният ръб MC е перпендикулярен на основата, а стената ABM сключва с основата ъгъл α. Намерете радиуса на вписаната сфера.

58. Основата $ABCD$ на пирамида $ABCDM$ е квадрат със страна a. Околните стени BCM и DCM са перпендикулярни на равнината на основата, а другите две стени сключват с основата ъгъл α. Докажете, че в пирамидата може да се впише сфера и намерете радиуса ѝ.

<u>Екстремални задачи</u>

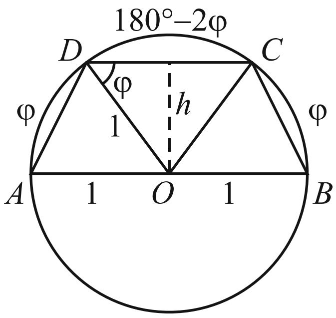
59. В окръжност с радиус 1 е вписан трапец $ABCD$ с основа $AB = 2$ и остър ъгъл между диагоналите AC и BD φ.

а) Да се докаже, че лицето на трапеца е равно на $\sin\varphi(1+\cos\varphi)$.

б) Да се намери онази стойност на φ, за която лицето на трапеца е най-голямо.

Решение.

а) Трапецът е равнобедрен, защото е вписан в окръжност. По условие окръжността е с радиус 1 и $AB = 2$ $\Rightarrow AB$ е диаметър и средата O на AB е центърът на окръжността.



Ъгълът φ между диагоналите на трапеца е остър следователно $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} = \varphi$, $\overset{\frown}{DC} = 180° - 2\varphi$. Тогава $\angle DOC = 180° - 2\varphi$, централен ъгъл и $\angle ODC = \varphi$ – от равнобедрения ΔDOC. За малката основа и височината на трапеца получаваме: $\frac{CD}{2} = 1.\cos\varphi$, $CD = 2\cos\varphi$ и $h = 1.\sin\varphi$.

$\Rightarrow S = \frac{2+CD}{2}h = \frac{2+2\cos\varphi}{2}\sin\varphi = \sin\varphi(1+\cos\varphi)$.

б) Нека $S(\varphi) = \sin\varphi(1+\cos\varphi) = \sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi = \sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}$, $\varphi \in (0, 90°)$.

$S'(\varphi) = \cos\varphi + \frac{2\cos 2\varphi}{2} = \cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos\varphi + 2\cos^2\varphi - 1 = 0$.

$2\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = -1$ или $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, но $\varphi \in (0, 90°) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = 60°$ е единствен корен на уравнението $S'(\varphi) = 0$ в интервала $(0, 90°)$.

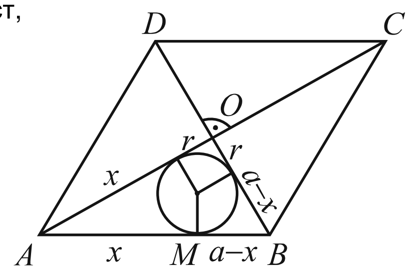
$S''(\varphi) = -\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin\varphi = -\sin\varphi - 2\sin 2\varphi < 0$, $\varphi \in (0, 90°) \quad \Rightarrow$ лицето на трапеца е най-голямо при $\varphi = 60°$.

При $\varphi = 60°$ трапецът, за който $AD = DC = BC$, удовлетворява условието на задачата.▲

60. Върху отсечка AB с дължина a лежи точка M като $AM = x$. Нека $ABCD$ е ромб с пресечна точка на диагоналите O, а вписаната в ΔABO окръжност минава през точка M. Да се определи:

а) лицето на ромба $ABCD$ като функция на x;

б) положението на точка M, когато лицето на ромба е най-голямо и да се намери това лице.



Решение. а) Нека r е радиусът на вписаната в ΔABO окръжност, $AM = x$ и $BM = a - x$. Като използваме, че допирателните към окръжност през външна точка са равни, за лицето на ΔABO получаваме:

$2S_{ABO} = AO.BO = (x+r)(a-x+r)$ или

$2S_{ABO} = ax - x^2 + ar + r^2$.

От друга страна $S_{ABO} = \frac{2ar}{2} + r^2 = ar + r^2$

$\Rightarrow 2S_{ABO} = ax - x^2 + S_{ABO} \Rightarrow S_{ABO} = ax - x^2$, откъдето получаваме $S_{ABCD} = 4(ax - x^2)$.

б) Разглеждаме функцията $S(x) = 4(ax - x^2)$, $x \in (0, a)$.

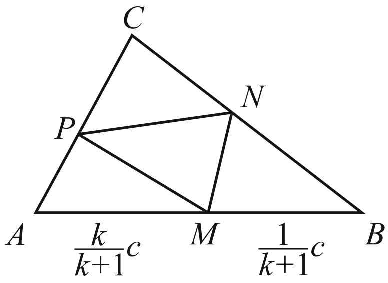
Квадратната функция $ax - x^2$ приема най-голяма стойност при $x = \frac{a}{2} \in (0, a)$.

$\Rightarrow \max\limits_{(0,a)} S(x) = S(\frac{a}{2}) = a^2$. При $x = \frac{a}{2}$ ромбът е квадрат със страна a и изпълнява условието на задачата.▲

61. Даден е ΔABC. Върху страните му AB, BC и AC са взети съответно точки M, N и P, така че $AM : MB = BN : NC = CP : PA = k$.

а) Намерете дължините на отсечките MN, NP и MP, ако $k = 2$ и ΔABC е правоъгълен с катети $AC = b$ и $BC = a$.

б) Определете k, така че сумата $S = MN^2 + NP^2 + MP^2$ да е най-малка за произволен триъгълник.



Решение. $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{BN}{CN} = \dfrac{CP}{PA} = k$.

а) Дължините са $\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2}$, $\frac{1}{3}\sqrt{a^2+4b^2}$, $\frac{1}{3}\sqrt{4a^2+b^2}$.

б) Нека в ΔABC страните и ъглите са a, b, c и α, β, γ и да фиксираме a, b и c.

$\Delta NPM \sim \Delta ABC$.

По косинусовата теорема за триъгълниците AMP, MBN и PNC последователно намираме:

$$MP^2 = \left(\frac{k}{k+1}c\right)^2 + \left(\frac{1}{k+1}b\right)^2 - 2\frac{k}{(k+1)^2}bc\cos\alpha;$$

$$MN^2 = \left(\frac{k}{k+1}a\right)^2 + \left(\frac{1}{k+1}c\right)^2 - 2\frac{k}{(k+1)^2}ac\cos\beta;$$

$$NP^2 = \left(\frac{k}{k+1}b\right)^2 + \left(\frac{1}{k+1}a\right)^2 - 2\frac{k}{(k+1)^2}ab\cos\gamma.$$

Събираме тези три равенства и получаваме: $MP^2 + MN^2 + NP^2 =$

$$= \frac{1}{(k+1)^2}\left(k^2c^2 + k^2a^2 + k^2b^2 + b^2 + c^2 + a^2 - k(2bc\cos\alpha + 2ac\cos\beta + 2ab\cos\gamma)\right).$$

От косинусовата теорема за ΔABC имаме $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$, $2ac\cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$ и $2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2$. Заместваме с тези равенства и получаваме: $MP^2 + MN^2 + NP^2 =$

$$= \frac{1}{(k+1)^2}\left(k^2(a^2+b^2+c^2) + a^2 + b^2 + c^2 - k(a^2+b^2+c^2)\right) = \frac{k^2-k+1}{(k+1)^2}(a^2+b^2+c^2).$$

Достатъчно е да разгледаме функцията $\varphi(k) = \dfrac{k^2-k+1}{(k+1)^2}$, $k > 0$, тъй като a, b и c са фиксирани.

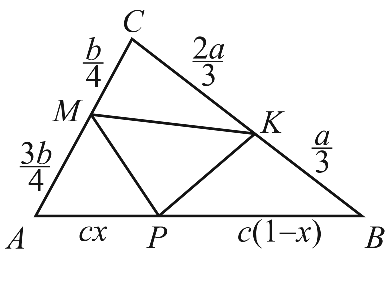
$$\varphi'(k) = \frac{(2k-1)(k+1)^2 - (k^2-k+1)2(k+1)}{(k+1)^4} = \frac{3(k-1)}{(k+1)^3} = 0$$ и $k = 1$ е единствен корен.

При $k = 1$ $\varphi(k)$ достига минимум в $(0, 1)$ $\Rightarrow$ при $k = 1$ сумата $MP^2 + MN^2 + NP^2$ е най-малка и ΔMNP е триъгълникът с върхове средите на страните на ΔABC.▲

62. Лицето на ΔABC е 12. На страните BC, CA и AB лежат съответно точките K, M и P като $BC : BK = 3$, $CA : CM = 4$ и $AP = x.AB$. Определете:

а) лицето на ΔKMP като функция на x;

б) положенията на P, при които ΔKMP има най-голямо и най-малко лице.



Решение. $S_{ABC} = \dfrac{bc\sin\alpha}{2} = \dfrac{ac\sin\beta}{2} = \dfrac{ab\sin\gamma}{2} = 12$.

$S_{KMP} = S_{ABC} - S_{AMP} - S_{PBK} - S_{MKC} =$

$$= 12 - \frac{3bcx\sin\alpha}{8} - \frac{ac(1-x)\sin\beta}{6} - \frac{2ab\sin\gamma}{12.2} =$$

$= 12 - \frac{3x}{4}.12 - \frac{(1-x)}{3}.12 - \frac{2}{12}.12 \ = \ 6 - 5x$.

$\varphi(x) = 6 - 5x$, $x \in [0,1]$.

$\varphi(x)$ е линейна намаляваща функция $\Rightarrow$ $\max \varphi(x) = \varphi(0)$ и $\min \varphi(x) = \varphi(1)$.

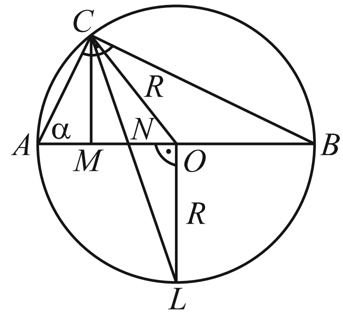
При $x = 0$ $P \equiv A$ и триъгълникът с най-голямо лице е ΔAKM. При $x = 1$ $P \equiv B$ и триъгълникът с най-малко лице е ΔBKM. ▲

63. В окръжност с център точката O и радиус R е вписан правоъгълният ΔABC, $\angle BAC = \alpha > 45°$, ъглополовящата на правия $\angle ACB$ пресича окръжността в точка L $(L \neq C)$, а петата на височината към хипотенузата AB е точка M.

а) Намерете лицето на четириъгълника $CMLO$.

б) За каква стойност на ъгъла α лицето на този четириъгълник е най-голямо? Намерете най-голямото лице, ако $R = 2$ cm.

Решение.



Точка L е средата на дъгата $\overset{\frown}{AB}$ $\Rightarrow$ $OL \equiv s_{AB}$ $\Rightarrow$ $CM \parallel OL$.

$\angle MCL = \angle LCO = 45° - (90° - \alpha) = \angle CLO$.

Нека $CM = h$. От ΔMOC: $\frac{h}{R} = \sin(180° - 2\alpha)$ $\Rightarrow$ $h = R \sin 2\alpha$.

$\frac{OM}{R} = \cos(180° - 2\alpha) = -\cos 2\alpha$ $\Rightarrow$ $OM = -R\cos 2\alpha$.

$$S_{CMLO} = \frac{OM.h}{2} + \frac{OM.R}{2} = \frac{OM}{2}(h+R) \ = \ -\frac{R\cos 2\alpha}{2}(R\sin 2\alpha + R) \ = \ \frac{-R^2(\sin 2\alpha + 1)\cos 2\alpha}{2}.$$

б) Разглеждаме функцията $S(\alpha) = \frac{-R^2}{2}(\sin 2\alpha + 1)\cos 2\alpha$, $\alpha \in (45°, 90°)$.

$$S'(\alpha) = \frac{R^2}{2}\left(-2\cos 2\alpha . \cos 2\alpha + 2(\sin 2\alpha + 1)\sin 2\alpha\right) \ = \ R^2(2\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha - 1) =$$

$$= R^2(\sin 2\alpha + 1)(2\sin 2\alpha - 1).$$

При $\alpha \in (45°, 90°)$ $\sin 2\alpha + 1 > 0$ следователно производната се анулира при $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$, откъдето $2\alpha = 30°$, $\alpha = 15° \notin (45°, 90°)$ или $2\alpha = 150°$ $\Rightarrow$ $\alpha = 75° \in (45°, 90°)$ е единственият корен на $S'(\alpha)$ в този интервал.

$$S''(\alpha) = R^2(2.2\sin 2\alpha \cos 2\alpha.2 + \cos 2\alpha.2) \ = \ R^2(8\sin 2\alpha\cos 2\alpha + 2\cos 2\alpha).$$

При $2\alpha = 150°$ $S''(75°) < 0$ $\Rightarrow$ $S(\alpha)$ има максимум и най-голяма стойност.

При $R = 2$ и $\alpha = 75°$ четириъгълникът $CMLO$ съществува и лицето му е $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

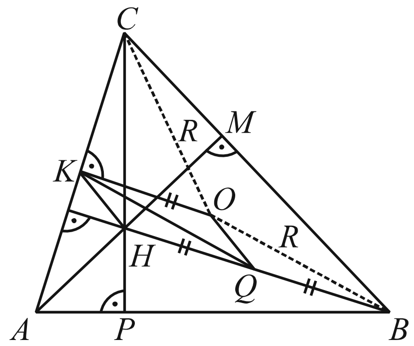
64. В остроъгълния ΔABC AM и CP са височини. Описаната около ΔABC окръжност е с център O и радиус R. Центровете на описаните около ΔAMP и ΔBMP окръжности са съответно точки K и Q.

а) Докажете, че $KQ = R$.

б) Докажете, че ако $AB = R\sqrt{2}$, правите AO и KQ са перпендикулярни.

в) Намерете стойността на $\angle ABC$, при която лицето на четириъгълника $MKPQ$ е най-голямо.

Решение. Нека $AM \cap CP = H$.



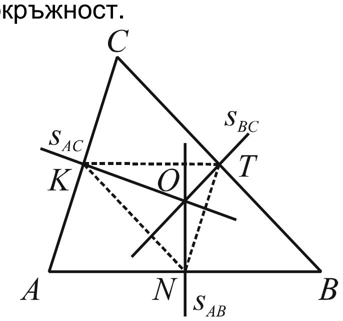
K е център на описаната около ΔAMP окръжност.

Тъй като $\angle APC = \angle AMC = 90°$, то около четириъгълника $APMC$ се описва окръжност с център средата на AC, т.е. K е средата на AC и $KP = KM = KC = KA$.

Аналогично, $\angle BPH = \angle BMH = 90°$ следователно около четириъгълника $PBMH$ се описва окръжност с център средата на BH, т.е. Q е средата на BH и $QP = QM = QB = QH$.

а) Ще използваме следното .

Твърдение. Ортоцентърът на триъгълника с върхове средите на страните на даден триъгълник съвпада с центъра на описаната около дадения триъгълник окръжност.



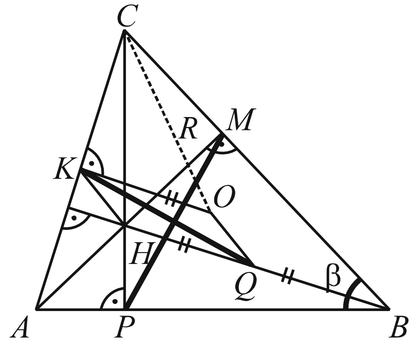
Доказателство. Нека точки N и T са среди съответно на AB и BC $\Rightarrow$ ΔKNT е триъгълникът с върхове средите на страните на ΔABC. Симетралата на страната AB минава през N и е перпендикулярна на AB и на KT $\Rightarrow$ височината през N в ΔKNT лежи на симетралата на AB. Аналогично се установява, че и другите две височини в ΔKNT лежат на симетрали в ΔABC $\Rightarrow$ ортоцентърът на ΔKNT съвпада с пресечната точка на симетралите на ΔABC, която е точка O, с което доказахме твърдението.

$\Delta KNT \sim \Delta BCA$ с коефициент на подобие $1:2$ $\Rightarrow$ разстоянието от K до ортоцентъра O на ΔKNT е $\frac{1}{2}$ от разстоянието от B до ортоцентъра H на ΔABC $\Rightarrow$ $KO = \frac{BH}{2} = BQ$.

От друга страна $KO \perp AC$ (като симетрала на AC) и $BH \perp AC$ $\Rightarrow$ четириъгълникът $KQBO$ е успоредник $\Rightarrow$ $KQ = BO = R$.

б) Страните на ΔABO са R, R и $R\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\angle AOB = 90°$ или $AO \perp BO$, но $BO \| KQ$ $\Rightarrow$ $AO \perp KQ$.

в) Нека $\angle ABC = \beta$.



Както вече показахме $KP = KM$ и $QP = QM$ $\Rightarrow$ KQ е симетрала на PM и диагоналите на четириъгълника $KPQM$ са перпендикулярни.

От а) имаме $KQ = R$. Остава да намерим PM.

От ΔABC по синусовата теорема намираме $AC = 2R\sin\beta$.

От правоъгълния ΔKOC намираме

$KO = \sqrt{CO^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - R^2\sin^2\beta} = R\cos\beta$. ($\beta$ е остър ъгъл и следователно $\cos\beta > 0$.)

Описаната окръжност около ΔPBM е с радиус BQ и по синусовата теорема намираме PM:

$PM = 2QB\sin\beta = 2KO\sin\beta = 2R\sin\beta\cos\beta = R\sin 2\beta$.

$\Rightarrow S_{KPQM} = S(\beta) = \frac{KQ.PM}{2} = \frac{R^2\sin 2\beta}{2}$, $\beta \in (0, 90°)$.

$S'(\beta) = R^2 \cos 2\beta = 0$ и тъй като $\beta \in (0, 90°)$, то $2\beta = 90°$ и $\beta = 45°$ е единственият корен.

$S''(\beta) = -2R^2 \sin 2\beta$ и $S''(45°) = -2R^2 \sin 90° = -2R^2 < 0$ $\Rightarrow$ четириъгълникът $KPQM$ има най-голямо лице при $\beta = 45°$. При $\beta = 45°$ четириъгълник $KPQM$ съществува.▲

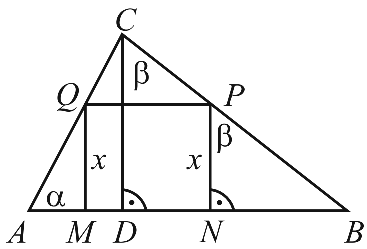
65. В ΔABC петата D на височината CD лежи на отсечката AB. $AB = c$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCD = \beta$. В ΔABC е вписан правоъгълник $MNPQ$, така че върховете му M и N лежат на AB, P – на BC и Q – на AC.

а) Ако α и β са фиксирани, намерете максималното лице на $MNPQ$.

б) Ако $\angle ACB = 90°$, намерете α и β, за които лицето на $MNPQ$ е най-голямо.

Решение. Нека $QM = PN = x$.

От ΔAMQ $AM = \dfrac{x}{\operatorname{tg}\alpha}$, от ΔBNP $BN = x \operatorname{tg}\beta$.



$$\Rightarrow MN = c - AM - BN = c - \frac{x}{\operatorname{tg}\alpha} - x\operatorname{tg}\beta = c - x\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right) =$$

$$= c - x\left(\frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}\right) = c - x\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}.$$

$$S_{MNPQ} = S(x) = MN.x = cx - x^2\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}.$$

Да означим $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cos\beta} = \theta$. По условие α и β са фиксирани следователно θ е константа и да запишем $S(x)$ във вида $S(x) = cx - x^2\theta$, $x \in (0, \dfrac{c}{\theta})$.

Квадратната функция $S(x) = cx - x^2\theta$ достига максимум при $x = \dfrac{c}{2\theta} \in (0, \dfrac{c}{\theta})$.

Максималното лице на $MNPQ$ е $S(\dfrac{c}{2\theta}) = \dfrac{c^2}{4\theta} = \dfrac{c^2 \sin\alpha\cos\beta}{4\cos(\alpha-\beta)}$.

б) $\angle ACB = 90°$ $\Rightarrow$ $\alpha = \beta$.

Нека α е фиксирано. От а) $\Rightarrow$ $\max S = \dfrac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{4} = \dfrac{c^2 \sin 2\alpha}{8}$.

Нека сега $\alpha \in (0, 90°)$. Търсим за кое α изразът $\dfrac{c^2\sin 2\alpha}{8}$ има най-голяма стойност.

$2\alpha \in (0°, 180°)$ $\Rightarrow$ $\sin 2\alpha$ има най-голяма стойност при $2\alpha = 90°$ $\Rightarrow$ $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Лицето на $MNPQ$ е най-голямо при $\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{4}$.▲

Тест 1
Геометрични модели

1. Ромб с височина h и лице 5 е завъртян около една от страните си. Обемът на полученото тяло е:

☒ **А)** $5\pi h$ Б) $5\pi h^2$ **В)** $25\pi h$ **Г)** $25\pi h^2$

2. Правоъгълен трапец с основи 8 и 4 и височина 2 е завъртян около права в равнината на основата, перпендикулярна на основите и минаваща през върха на тъпия ъгъл. Повърхнината на полученото ротационно тяло е равна на:

☒ **А)** 8π **Б)** 16π **В)** 32π **Г)** 64π

3. В трапец $ABCD$ с основи $AB = 8$ и $CD = 4$ симетралата на AD минава през точка B и $\angle BAD = 60°$. Да се намерят повърхнината и обемът на ротационното тяло, получено при завъртането на $ABCD$ около симетралата на AD.

4. Триъгълник ABC със страна $AC = 4$ и височина към нея $h_b = 3$ е завъртян около AC. Обемът на полученото тяло е:

☒ **А)** 14π **Б)** 12π **В)** 10π **Г)** 8π

5. Ромб $ABCD$, в който $AB = 6$ и $\angle BAD = 60°$ е завъртян около права от равнината на ромба, минаваща през точка A и перпендикулярна на AB. Обемът на образуваното тяло е:

☒ **А)** $104\sqrt{3}$ **Б)** $93\sqrt{3}$ **В)** $85\sqrt{3}$ **Г)** $81\sqrt{3}$

6. В кълбо с обем $4851\ \text{cm}^3$ е вписан правоъгълен паралелепипед, чиито измерения се отнасят както $2:3:6$. Намерете повърхнината на паралелепипеда, като използвате $\dfrac{22}{7}$ за стойност на π.

7. Квадрат с лице 8 се върти около ос, прекарана през края на единия му диагонал, успоредно на другия. Обемът на полученото тяло е:

☒ **А)** $\dfrac{64\pi}{3}$ **Б)** 85π **В)** 128π **Г)** $\dfrac{448\pi}{3}$

8. Пирамида $ABCDM$ с основа квадрат $ABCD$ е вписана в сфера. Околната стена ADM на пирамидата е перпендикулярна на основата и M се проектира в средата на AD. Да се намери радиусът на описаната около пирамидата сфера, ако $AB = 8$ и височината на пирамидата е 8.

☒ **А)** $\sqrt{21}$ **Б)** $\sqrt{41}$ **В)** 5 **Г)** 9

9. Основата на четириъгълна пирамида $ABCDM$ е квадрат $ABCD$. Височината на пирамидата е $MN = 1$, където точка N е средата на AD. Да се намери обемът на пирамидата, ако около нея може да се опише сфера с радиус $\sqrt{34}$ и центърът на сферата е на разстояние 4 от основата на пирамидата.

На задача 10 напишете пълно решение с необходимите обосновки.

10. Основата $ABCD$ на пирамидата $ABCDM$ е трапец с голяма основа $AB = a$. Бедрото BC на трапеца $ABCD$ сключва с основата AB ъгъл α и е перпендикулярно на диагонала AC. Околните ръбове на пирамидата сключват с равнината на основата равни ъгли. Ако $S_{\Delta ABM} = 2S_{ABCD}$ да се намери стойността на α, за която обемът на пирамидата е най-голям.

Тест 2
Геометрични модели

1. Ромб с височина h и лице 7 е завъртян около една от страните си. Обемът на полученото тяло е:

☒ **А)** $49\pi h^2$ **Б)** $7\pi h^2$ **В)** $49\pi h$ **Г)** $7\pi h$

2. Правоъгълен трапец с основи 5 и 2 и височина 2 е завъртян около права в равнината на основата, перпендикулярна на основите и минаваща през върха на тъпия ъгъл. Повърхнината на полученото ротационно тяло е равна на:

☒ **А)** 8π **Б)** 16π **В)** 32π **Г)** 64π

3. В трапец $ABCD$ с основи $AB = 4$ и $CD = 2$ симетралата на AD минава през точка B и $\angle BAD = 60°$. Да се намерят повърхнината и обемът на ротационното тяло, получено при завъртането на $ABCD$ около симетралата на AD.

4. Триъгълник ABC със страна $BC = 6$ и височина към нея $h_a = 2$ е завъртян около BC. Обемът на полученото тяло е:

☒ **А)** 2π **Б)** 4π **В)** 6π **Г)** 8π

5. Ромб $ABCD$, в който $AB = 8$ и $\angle BAD = 60°$ е завъртян около права от равнината на ромба, минаваща през точка A и перпендикулярна на AB. Обемът на образуваното тяло е:

☒ **А)** $185\sqrt{3}$ **Б)** $192\sqrt{3}$ **В)** $204\sqrt{3}$ **Г)** $212\sqrt{3}$

6. В кълбо с обем $14130\ \text{cm}^3$ е вписан правоъгълен паралелепипед, чиито измерения се отнасят както $3:5:7$. Намерете повърхнината на паралелепипеда, като използвате $3{,}14$ за стойност на π.

7. Квадрат с лице 2 се върти около ос, прекарана през края на единия му диагонал, успоредно на другия. Обемът на полученото тяло е:

☒ **А)** $\frac{56\pi}{3}$ **Б)** 16π **В)** $\frac{32\pi}{3}$ **Г)** 12π

8. Пирамида $ABCDM$ с основа квадрат $ABCD$ е вписана в сфера. Околната стена ADM на пирамидата е перпендикулярна на основата и M се проектира в средата на AD. Да се намери радиусът на описаната около пирамидата сфера, ако $AB = 6$ и височината на пирамидата е 9.

☒ **А)** $2\sqrt{2}$ **Б)** 5 **В)** $\sqrt{34}$ **Г)** $\sqrt{41}$

9. Основата на четириъгълна пирамида $ABCDM$ е квадрат $ABCD$. Височината на пирамидата е $MN = 2$, където точка N е средата на AD. Да се намери обемът на пирамидата, ако около нея може да се опише сфера с радиус $\sqrt{41}$ и центърът на сферата е на разстояние 3 от основата на пирамидата.

На задача 10 напишете пълно решение с необходимите обосновки.

10. Основата на пирамидата $ABCM$ е правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза $AB = 1$ и остър ъгъл α. Околните ръбове на пирамидата сключват с равнината на основата равни ъгли. Ако $S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ABM} = 3$ да се намери стойността на α, за която обемът на пирамидата е най-голям.

3. Емпирични разпределения

3.1. Проблем – данни – модел – изводи. Примери на реални експерименти

Изучаването на процесите и явленията в заобикалящия ни свят поставя различни задачи пред статистиката. За решаването им се използват различни статистически методи за събиране на необходимата емпирична информация, обработка на данните и анализ на резултатите. **Научният метод** е начин за получаване, събиране, натрупване, обработка на информация с оглед изучаването на определен обект. Може да се разграничат следните етапи на научния метод:

– Определяне на целите, обектите и задачите на изследването.
– Събиране на статистическа информация – данни.
– Формиране на модел.
– Интерпретиране на получените резултати.
– Изготвяне на прогнози.

Научният експеримент е метод на статистическото моделиране, който е съвкупност от целенасочени действия за разкриване същността на обекта на моделиране и изследване. Обикновено се наблюдават два етапа – планиране и провеждане на експерименти за събиране на емпирични данни и прилагане на подходящ метод за математически анализ.

Събирането на данни се осъществява чрез прилагане на статистическите методи върху статистическа съвкупност – обективно съществуващо крайно множество, елементите (единиците) на което са определени за дадено място и време. Статистическите съвкупности биват генерални (включва всички единици) и извадкови. Извадката трябва да бъде представителна (репрезентативна). Тя трябва да съдържа приблизително всички особености на генералната съвкупност и да възпроизвежда нейната структура. Казва се, че извадката трябва да бъде умален модел на генералната съвкупност. Това може да се постигне със случаен избор и достатъчен обем. Относно обема на извадката са разработени критерии, на които няма да се спираме. С данните от извадката се съставя модел и се изчисляват някои статистически характеристики. В зависимост от конкретната задача, експериментално получените резултати се сравняват с теоретичните (за този модел). Това дава възможност да се формулират различни хипотези относно генералната съвкупност и да се направят статистически изводи.

Статистическото наблюдение обхваща всички операции по организацията и събирането на сведенията. За всяко статистическо наблюдение се подготвя организационен план, чрез който се решават въпроси за единицата на наблюдение, времето и мястото на наблюдение, начин на регистрация на наблюденията и др. Грешките при статистическото наблюдение могат да бъдат случайни и систематични.

Случайните грешки се получават, когато част от даващите сведения посочват по-високи значения на признака, а други – по-ниски. Тези случайни отклонения са малки по размер и са в двете посоки (в плюс и в минус) и проявяват тенденция взаимно да се компенсират. Обикновено те не водят до деформации в разпределението на единиците по значението на наблюдавания признак.

Систематични са грешките, които изменят истинските значения на признака при единиците само в една посока и е невъзможно компенсиране на отклоненията. Например, като правило хората посочват по-ниски доходи; част от хората съобщават по-висока степен на образование и т.н. Систематични грешки се получават и когато неправилно е определена извадката, като тя не отразява точно характеристиките на генералната съвкупност. Например, наблюдава се заетостта в страната, а се взема извадка само от съвкупността на живеещите в София.

Най-често използваните методи за анализ на резултатите са средноаритметичната стойност на извадката, дисперсията, стандартното отклонение, корелационния анализ, регресионния анализ и други.

Пример. Фирма решава да проучи зависимостта между увеличаване цената на даден продукт и потребителското търсене. Тя решава да направи експеримент в десет свои магазина. Фирмата избира по случаен начин пет магазина, в които продуктът ще се продава по нова по-висока цена, а в останалите пет цената остава непроменена.

Групата магазини, в които цената е увеличена, се нарича експериментална група, а другата – контролна група. Цената на продукта е независима променлива, която се определя от изследователя. Преди експеримента са констатирани продажбите в десетте магазина за един месец. В експерименталната група се организира експеримент.

След един месец фирмата отново констатира резултатите от продажбите в десетте магазина. Резултатите се анализират и се правят изводи.▲

3.2. Кодиране и трансформации на данни

Признаците, с които се характеризират обектите на генерална съвкупност, са два вида – **количествени** (числени) и **категорни** (качествени, нечислени).

- **Количествените** признаци могат да се характеризират с някаква числена стойност. Те са два вида – **дискретни** и **непрекъснати** (интервални).

Дискретни са тези признаци, които могат да приемат краен брой числени стойности или стойностите им могат да се подредят в редица.

Непрекъснати са тези признаци, които могат да приемат всички числа от даден интервал. Например признака "ръст", "тегло".

- **Категорните** признаци не могат да се характеризират с числена стойност. Те са два вида – **номинални** и **ординални**.

Номинални са тези, които не подлежат на количествено сравнение. Например "цвят на очите" може да приема стойности "син", "зелен" и "кафяв". Те не могат да се подредят.

Към номиналните признаци спадат и така наречените **дихотомни** признаци, които имат две стойности: "да" – "не"; "одобрява" – "не одобрява" и т.н.

Ординални са тези признаци, които подлежат на количествено сравнение. Например, оценката на даден продукт: "лошо", "средно", "добро" и "много добро".

Сведенията за изучаваните признаци са крайният резултат на статистическото изследване. Те подлежат на допълнителна обработка, като се извършват някои трансформации на данните.

Ктегорните признаци (променливи) се класифицират във взаимно изключващи се класове (категории) според разглеждания признак. Класовете могат да се **кодират** (означават) с различни символи, най-често числа. Обикновено дихотомните променливи се кодират се две числа. Например дихотомния признак „пол" се кодира „мъж" – 1, „жена" – 2.

Ординалните променливи може да се подредят по интензитета на признака и да се кодират с числа, които определят мястото им в подреждането. Например „лошо" – 1, „средно" – 2, „добро" – 3, „много добро" – 4 или при класиране на място в състезание „първо" – 1, „второ" – 2, „трето" – 3.

Числата, използвани за кодиране на категорни променливи, нямат количествена мярка.

Друга трансформация на данните е свързана със стандартизацията им.

Стандартизацията на данните в статистиката се налага, за да се обезпечи възможността за коректно съпоставяне на наблюденията, събрани с еднакви методи, но при различни условия. Например раждаемостта е по-висока в населените места, в които преобладава население на възраст 20-30 години.

Стандартизацията се извършва като от всяко наблюдение се извади средноаритметичната стойност на извадката и получената разлика се раздели на стандартното отклонение. Така получените данни имат нулева средноаритметична стойност и стандартно отклонение единица.

Привеждането на данните към една и съща мерна единица също е стандартизация.

Преброяването и групирането на данните е част от обработката им. При подредбата и групирането на данните се получават статистически редове, които се наричат **вариационни редове**. Резултатите се обобщават в **статистически таблици**.

Ако наблюдаваният признак е с малко на брой значения, преброяваме и записваме съответните честоти на единиците.

Пример 1.

Годишни оценки по математика на учениците в едно училище

Оценка	Брой ученици
2	0
3	117
4	198
5	375
6	312
Общо	**1002**

Наблюдаваният признак (оценка) е дискретен и с малко на брой значения.

Всяко от значенията формира група.

▲

Ако са наблюдавани повече от един признак за един и същ обект, тогава в първата колона на таблицата се записва обектът на направеното наблюдение, а в следващите колони се записват стойностите на наблюдаваните признаци за този обект.

Пример 2. Направено е проучване в група по интереси относно признаците „Пол”, „Години”, „Интерес”.

Обект	**Признак**		
Дете	Пол	Години	Интерес
А	Мъж	8	Рисуване
Б	Мъж	10	Работа с глина
В	Жена	9	Работа с глина
Г	Мъж	10	Рисуване
Д	Жена	10	Рисуване

Наблюдаваните признаци са два категорни – „Пол” (дихотомен) и „Интерес” и един количествен – „Години”.

Казваме, че данните са подредени в таблица обект по признак.

Категорният признак „Пол” може да бъде кодиран с числа – например „мъж”-1 и „жена”-2, но те не могат да бъдат използвани за числови операции▲.

Ако наблюдаваният признак е непрекъснат или има голям брой значения, тогава данните се разпределят в групи. Броят на групите се определя от изследователя и обикновено е от 5 до 15. Групите са интервали с еднаква ширина, която се определя по формулата $h = (x_{\max} - x_{\min}) / k$, където $x_{\max}$ и $x_{\min}$ са съответно най-голямото и най-малкото значение на признака, а k е броят на интервалите (групите). Преброяват се единиците във всяка група.

Пример 3.

Продажби, реализирани от фирма за една година

Размер на продажбите (хил. лв.)	Брой продажби
над 5 до 15	6
над 15 до 25	15
над 25 до 35	34
над 35 до 45	42
над 45 до 55	4
над 55 до 65	2
Общо	**103**

Стойностите на наблюдавания признак (размер на продажбите, измерени в хиляди лева) са разпределени в шест групи с равни дължини. Границите на групите са зададени, така че е недвусмислено към коя група да се отнесе всяка единица и за всяка единица има интервал, в който да попадне.▲

1. Стойностите в лева на продажбите в един магазин по реда на получаването им са дадени в редицата. Изберете подходящ брой групи и направете статистическа таблица за резултатите.

10, 42, 15, 100, 128, 53, 25, 25, 60, 65, 82, 38, 40, 140, 140, 120, 100, 35, 85, 75, 78, 128, 95, 145, 140, 150, 55, 45, 80, 80, 60, 60, 55.

2. Резултатите от проучване сред спортуващите в един град по възраст в години са:

Фитнес: 20, 18, 26, 48, 32, 32, 24, 24, 24, 42, 54, 60, 28, 32, 33, 39, 45, 36, 34, 33, 49, 50, 50, 50, 46, 45, 48, 22, 23, 33, 31, 40, 40, 40.

Плуване: 55, 40, 18, 18, 18, 22, 20, 26, 28, 34, 35, 31, 30, 30, 45, 48, 60, 39, 36, 36, 24, 24, 24, 32, 31, 30, 30, 30, 30, 20, 20, 22.

Йога: 18, 60, 40, 45, 46, 44, 45, 35, 32, 32, 38, 38, 39, 25, 28, 31, 22, 33, 39, 40, 40, 45, 45, 48, 44, 46, 47.

Групирайте данните в 6 групи по възраст и направете таблица за разпределение на единиците по възраст и вид спорт.

3. Направено е проучване сред група от 20 ученици за чуждия език, който изучават. Резултатите по пол – М–"мъж" и Ж–"жена" в реда на получаването им са:

М-ФЕ, Ж-АЕ, Ж-АЕ, Ж-ИЕ, М-АЕ, М-НЕ, Ж-НЕ, М-НЕ, Ж-АЕ, Ж-АЕ, Ж-ИЕ, М-АЕ, М-НЕ, М-НЕ, Ж-НЕ, М-АЕ, М-РЕ, М-ИЕ, Ж-ФЕ, Ж-РЕ.

Направете таблица по признаците пол и изучаван чужд език.

3.3. Емпирично разпределение и описателни статистики, изключения (аутлаери)

Нека $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ е вариационният ред на наблюденията на извадка с обем n, получени при статистическо изследване.

Вариационният ред може да бъде записан заедно с честотите на съответните стойности в обща таблица:

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
f_i	f_1	f_2	$\cdots$	f_k

където k е броят на различните стойности в извадката и $f_1 + f_2 + ... + f_k = n$.

Тази таблица се нарича **честотна таблица**.

Когато към честотната таблица се добавят и относителните честоти $p_i = \dfrac{f_i}{n}$, $i = 1, 2, ..., k$, получаваме честотна таблица с относителни честоти:

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
f_i	f_1	f_2	$\cdots$	f_k
$p_i = \dfrac{f_i}{n}$	$\dfrac{f_1}{n}$	$\dfrac{f_2}{n}$	$\cdots$	$\dfrac{f_k}{n}$

За относителните честоти е изпълнено $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$.

Наистина $p_1 + p_2 + ... + p_k = \dfrac{f_1}{n} + \dfrac{f_2}{n} + ... + \dfrac{f_k}{n} = \dfrac{f_1 + f_2 + ... + f_k}{n} = \dfrac{n}{n} = 1$.

В практически задачи закръгляме пресметнатите относителни честоти.

1. Да се намерят относителните честоти на извадката, зададена с честотната таблица.

x_i	2	4	6	8
f_i	30	40	50	20

2. Да се начертае честотната таблица с относителни честоти на извадката.

а)

7	1	5	3	1	1	2	2	4	5	5	5	4	1	7	2	3	3	2	3	4	4	4	5

б)

27	27	25	25	25	27	27	27	25	25	30	27
30	30	25	30	30	27	30	27	30	30	30	30

в)

740	518	518	518	620	518	620	620	518	518	620	620	361	361	361
620	620	620	518	740	518	361	361	740	740	361	620	740	620	740
740	740	620	620	620	620	361	361	740	740	361	518	518	518	518

г)

24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
24	23	23	23	24	25	25	25	25	21	21	21
23	25	24	25	24	23	23	24	25	24	23	23

Определение. Емпирична функция на разпределение на извадка се нарича функцията

$$F_n(x)=\begin{cases} 0 & x\le x_1 \\ p_1 & x_1<x\le x_2 \\ p_1+p_2 & x_2<x\le x_3 \\ \dots & \\ p_1+p_2+\dots+p_{m-1} & x_{m-1}<x\le x_m \\ \dots & \\ p_1+p_2+\dots+p_{k-1} & x_{k-1}<x\le x_k \\ p_1+p_2+\dots+p_k=1 & x_k<x \end{cases}$$

Пример 1. Да се намери емпиричната функция на разпределение на извадката, зададена с таблицата и да се начертае графиката ѝ.

x_i	3	5	8	10	12
f_i	12	15	18	25	10

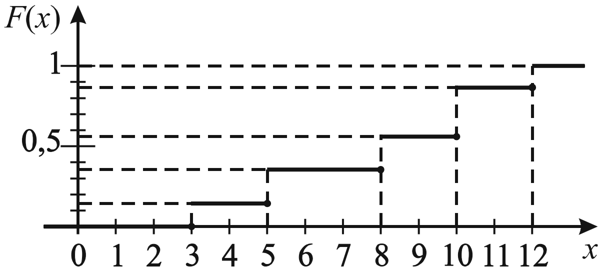
Решение. Обемът на извадката е $12+15+18+25+10=80$, т.е. $n=80$.
Намираме относителните честоти.

x_i	$x_1=3$	$x_2=5$	$x_3=8$	$x_4=10$	$x_5=12$
f_i	$f_1=12$	$f_2=15$	$f_3=18$	$f_4=25$	$f_5=10$
$p_i=\frac{f_i}{n}$	$\frac{12}{80}=0{,}15$	$\frac{15}{80}=0{,}19$	$\frac{18}{80}=0{,}23$	$\frac{25}{80}=0{,}31$	$\frac{10}{80}=0{,}12$

Най-малкото наблюдение е $3 \Rightarrow F_{80}(x)=0$ при $x \le 3$.

$$F_{80}(x)=\begin{cases} 0 & x \le 3 \\ 0,15 & 3 < x \le 5 \\ 0,15+0,19=0,34 & 5 < x \le 8 \\ 0,15+0,19+0,23=0,57 & 8 < x \le 10 \\ 0,15+0,19+0,23+0,31=0,88 & 10 < x \le 12 \\ 0,15+0,19+0,23+0,31+0,12=1 & 12 < x \end{cases}$$

Начертаваме графиката на $F_{80}(x)$, като за по-голяма нагледност използваме различни деления по двете оси.



▲

От графиката се вижда, че емпиричната функция на разпределение е прекъсната стъпаловидна функция, която приема стойности в интервала $[0,\ 1]$.

Когато наблюдаваният признак има голям брой различни стойности или е непрекъснат, данните се групират в интервали. В този случай честотната таблица се прави по интервални групи.

Пример 2. При измерване ръста в сантиметри на учениците от един клас са получени следните данни:

155	155	163	170	150
164	165	152	155	172
168	165	165	164	158
164	163	163	158	163
163	169	165	163	152

Ще групираме данните в 5 интервални групи. Имаме $x_{\max}=172$, $x_{\min}=150$.

Дължината на един интервал е $h=\dfrac{x_{\max}-x_{\min}}{k}=\dfrac{172-150}{5}=4,4$.

Обемът на извадката е 25. Честотната таблица с относителните честоти е:

x_i	$(150;154,4]$	$(154,4;158,8]$	$(158,8;163,2]$	$(163,2;167,6]$	$(167,6;172]$
f_i	3	5	6	7	4
p_i	0,12	0,2	0,24	0,28	0,16

▲

Да преговорим

Медианата е число, което разделя ранговия ред на две равни части, т.е. 50% от данните са по-малки от нея и 50% от данните са по-големи от нея. Означава се с Me.

Квартили са числа, които разделят ранговия ред на четири равни части. Във всяка част попадат 25% от данните. Означават се с Q_1, Q_2, Q_3.

25% от данните са по-малки от Q_1,

50% от данните са по-малки от $Q_2 \quad \Rightarrow \quad Q_2 = Me$,

25% от данните са по-големи от Q_3.

$R = x_{\max} - x_{\min}$ – размах на извадката, $Q_3 - Q_1$ – междуквартилен размах.

Q_1 е медианата на първата половина от данните,

Q_3 е медианата на втората половина от данните.

Пример 3. Разпределението на оценките по физика на учениците от пет класа в едно училище са дадени в таблицата.

x_i	$[3;3,5)$	$[3,5;4,5)$	$[4,5;5,5)$	$[5,5;6]$
f_i	20	27	40	38

Да се намерят медианата, първи и трети квартил, размахът и междуквартилният размах на данните.

Решение. Определяме обема на извадката $n = 20 + 27 + 40 + 38 = 125$.

Намираме номера на медианата: $N_{Me} = \dfrac{125+1}{2} = 63$.

В първия и втория интервал има общо $20 + 27 = 47$ оценки, 63-тата оценка попада в интервала $[4,5;5,5)$ и тя е $63 - (20 + 27) = 16$-тата оценка поред в този интервал.

16-тата поред оценка в този интервал е $4,5 + \dfrac{16}{40}.1 = 4,5 + 0,4 = 4,9 \quad \Rightarrow \quad Me = 4,9$.

Намираме номера на Q_1: $N_{Q_1} = \dfrac{1+63}{2} = 32$, 32-рата оценка попада в интервала $[3,5;4,5)$ и тя е $32 - 20 = 12$-тата поред оценка в този интервал.

12-тата поред оценка в този интервал е $3,5 + \dfrac{12}{27}.1 = 3,94 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = 3,94$.

Намираме номера на Q_3: $N_{Q_3} = 63 + \dfrac{125-63}{2} = 94$.

94-тата оценка поред в интервала $[5,5;6]$ е $94 - (20 + 27 + 40) = 7$-мата оценка в този интервал.

7-мата оценка в този интервал е $5,5 + \dfrac{7}{38}.0,5 = 5,5 + 0,09 = 5,59 \quad \Rightarrow \quad Q_3 = 5,59$.

Размахът на извадката е $R = 6 - 3 = 3$.

Междуквартилният размах е $5,59 - 3,94 = 1,65$.▲

3. При статистическо наблюдение са получени данни, показани в таблицата.

x_i	2	3	4	5	6
f_i	2	4	6	5	3

Да се намерят медианата, първи и трети квартил, размахът и междуквартилният размах на данните.

4. Да се намери емпиричната функция на разпределение на извадката с показаната честотна таблица и да се начертае графиката ѝ.

x_i	2	4	6	8
f_i	7	9	8	6

5. Да се намери емпиричната функция на разпределение на извадката с показаната честотна таблица.

x_i	1	2	3	4
f_i	5	7	6	3

6. Да се намери емпиричната функция на разпределение на извадката с показаната честотна таблица.

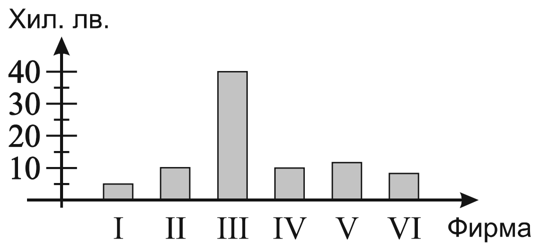
x_i	2	4	5	8	10	11
f_i	11	12	14	14	10	9

В някои случаи в извадката може да попаднат стойности, които рязко се различават от останалите (аутлаери) – или са много малки, или много големи. Това са минималният, или максималният член на вариационния ред на извадката. Такива стойности се отстраняват от извадката.

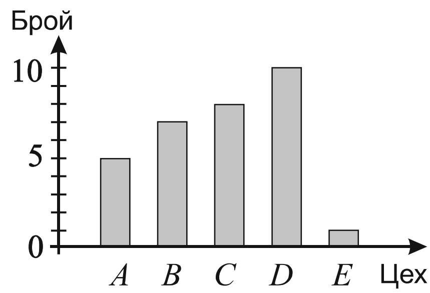
Ние ще покажем някои диаграми, на които да открием рязко отличаващи се стойности.

7. Кои стойности на диаграмата рязко се различават от останалите?

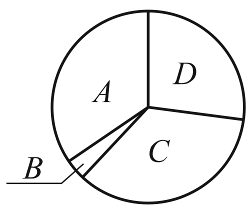
а) Разходи за реклама в хил. лв. на шест фирми със сходни дейности за един месец



б) Брой дефектни изделия от 200, произведени в шест цеха



в)



Разпределение на продадените мобилни устройства в четири магазина - A, B, C, D

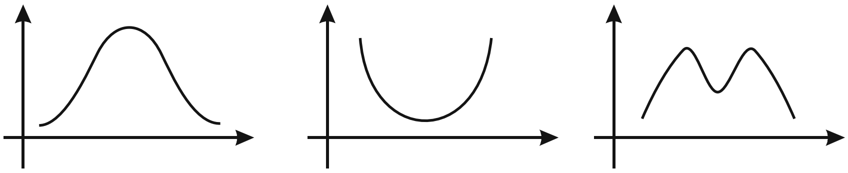
Според формата си емпиричните разпределения са симетрични и асиметрични.

Симетрични са тези разпределения, за които съществува права, перпендикулярна на абсцисната ос, която е ос на симетрия на полигона на разпределението.

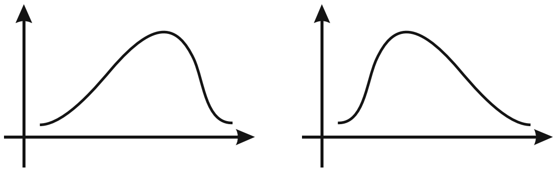
Едно от най-често срещаните симетрични разпределения е това, което има камбановидна форма. Характерното за него е, че в центъра на разпределението има най-голям брой единици и с отдалечаване от центъра в двете посоки броят на единиците намалява.

Симетрични са и равномерното правоъгълно разпределение, при което всички значения на признака имат еднаква честота, U-образното разпределение, както и бимодалното разпределение.

При U-образното разпределение граничните стойности се срещат много по-често от средните. То има два върха, разположени на границите на разпределението. Два върха има и бимодалното разпределение.



При **асиметричните** разпределения върхът на разпределението (максималният брой единици) е изместен към по-високите или към по-ниските значения на признака.



3.4. Анализ на диаграми на категорна и количествена променлива

За по-лесно възприемане на връзките и тенденциите в изследваните явления се построяват диаграми. Елементите на една диаграма са:

– заглавие – показва статистическата съвкупност;

– мащаб – показва отношението на намалените размери на показаното явление към съответните действителни;

– скала – линии с деления, получени чрез последователно нанасяне на мащабите;

– графичен образ (съдържание) – построява се с помощта на геометрични фигури; може да бъде линейна, двумерна, тримерна;

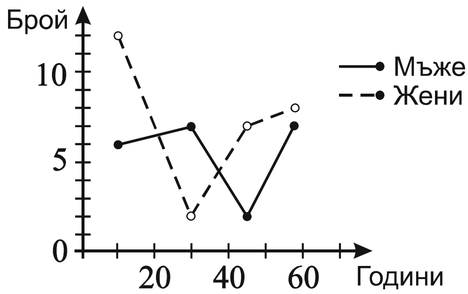
– легенда – пояснява съдържанието на графичното изображение.

За сравняване на две или повече статистически величини се използват различни видове двумерни диаграми – най-често с правоъгълници. Диаграмата с правоъгълници се нарича още блокова диаграма или диаграма със стълбове.

Пример 1. Резултатите от наблюдение на възрастта на мъжете и жените във фирма X са показани в таблицата. Постройте линейна диаграма по данните в таблицата.

Възраст	Мъже	Жени
до 20 г.	6	12
от 21 до 40 г.	7	2
от 41 до 50 г.	2	7
от 51 до 65 г.	7	8

Брой на работешите мъже и жени във фирма X по възраст

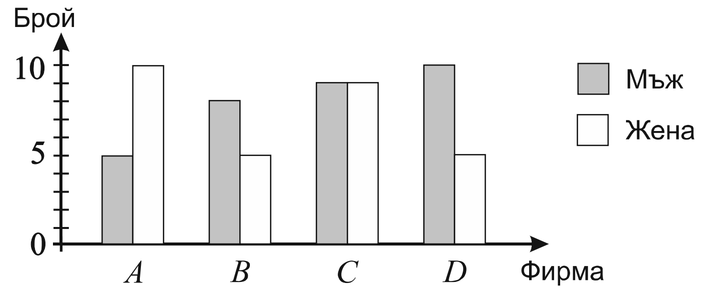


Решението е показано на диаграмата.

Пример 2. При наблюдение на броя на мъжете и жените в четири фирми са получени следните данни: във фирма A работят 5 мъже и 10 жени, във фирма B – 8 мъже и 5 жени, във фирма C – 9

мъже и 9 жени и във фирма D – 10 мъже и 5 жени. Да се построи диаграма със стълбове, която да представя разпределението на мъжете и жените в четирите фирми.

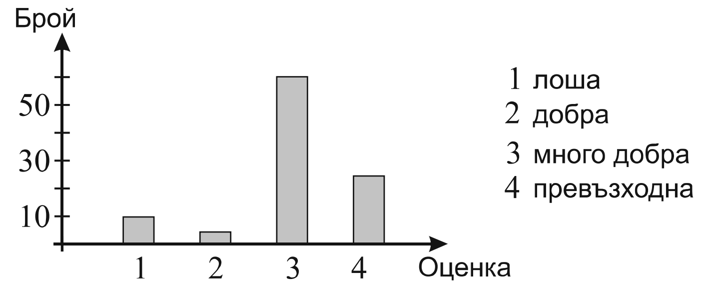
Решение.



Брой на мъжете и жените в пет фирми ▲

Пример 3. Направена е анкета за проучване на потребителската оценка на даден продукт A. Регистрирани са следните отговори: „лоша” – 10; „добра” – 5, „много добра” – 60 и „превъзходна” – 25. Да се построи диаграма със стълбове, която да представя данните от анкетата.

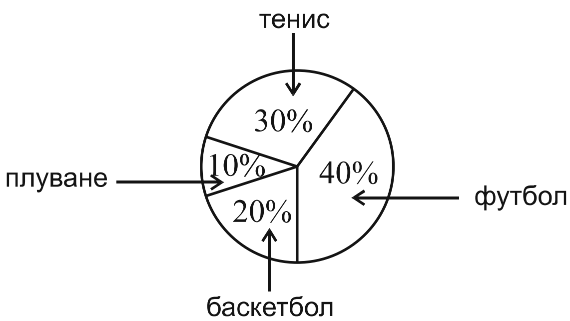
Решение.



Оценка на потребителите за продукта A ▲

Пример 4. В проучване по интернет анкетираните трябва да изберат един от четири вида спорт, който предпочитат да гледат и 40% от анкетираните посочили футбол, 20% – баскетбол, 30% – тенис и 10% – плуване. Да се построи кръгова диаграма, която да отразява получените данни.

Решение.



Участници в интернет анкета за предпочитания вид спорт ▲

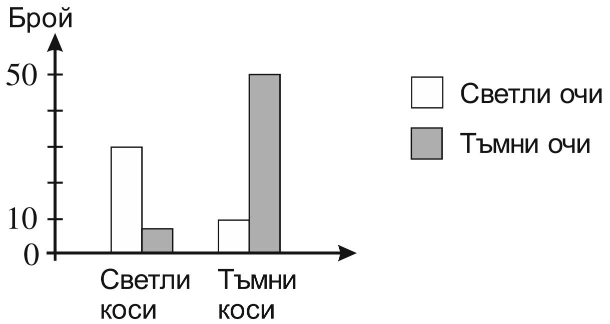
1. В книжарница са реализирани следните продажби на тетрадки (Т) и химикалки (Х) за една седмица: понеделник 8 Т и 7 Х, вторник 3 Т и 8 Х, сряда 12 Т и 11 Х, четвъртък 6 Т и 7 Х, петък 7 Т и 3 Х. Да се направи блокова диаграма за продажбите по дни и вид продукт.
2. В магазин за бяла техника за един месец са продадени 350 готварски печки, 410 хладилника и 240 перални. Постройте кръгова диаграма за процентното разпределение на продажбите.

3. В едно събитие участват 60 мъже под 40 години, 80 мъже над 60 години, 50 жени под 40 години и 10 жени над 60 години. Постройте линейна диаграма за разпределение на участниците по възраст и пол.

3.5. Анализ на диаграма – зависимост на две категорни променливи

Пример 1. При проучване на зависимост между цвета на очите и цвета на косите са получени следните данни. Със светли очи и светли коси са 30 от изследваните единици, със светли очи и тъмни коси са 10, с тъмни очи и светли коси – 8 и с тъмни очи и тъмни коси – 50. Да се направи диаграма със стълбове по получените данни.

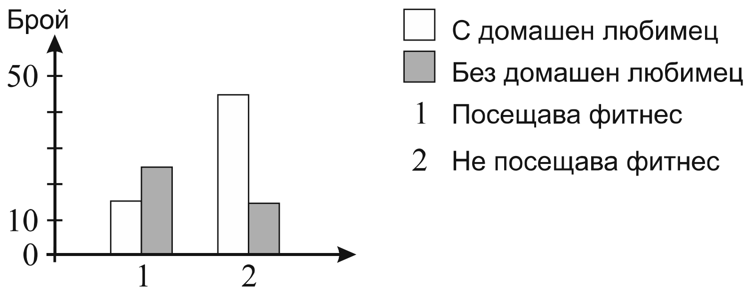
Решение.



▲

Пример 2. Проучване изследва зависимостта между отглеждането на домашен любимец и посещенията на фитнес. От стопаните на домашни любимци 15 посещават фитнес и 45 не посещават. От тези, които не отглеждат домашен любимец 25 посещават фитнес и 15 не посещават. Да се построи диаграма със стълбове, която да отразява данните.

Решение.



▲

1. Трима дегустатори A, B и C дават оценка за четири вида храни, като ги подреждат от 1 до 4 (4 е най-високата оценка). Резултатите са показани в таблицата. Да се състави диаграма със стълбове, която да представя данните.

	Вид храна			
Дегустатор	I	II	III	IV
A	3	4	2	1
B	1	4	3	2
C	2	3	4	1

2. В четири склада се съхранява продукция. Разпределението на редовните и дефектните изделия е показано в таблицата. Да се състави диаграма със стълбове, която да отразява данните от таблицата.

	Склад			
Детайли	*A*	*B*	*C*	*D*
Редовни	12	30	35	22
Дефектни	2	1	2	2

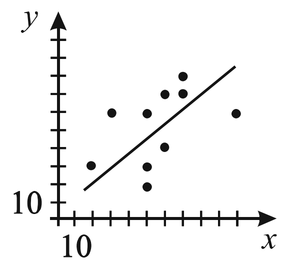
3.6. Диаграма на разсейване, корелационна зависимост

Взаимовръзките и влиянията между различните величини са най-разнообразни. В много практически задачи трябва да се установи и оцени зависимостта между две числови променливи. Съществуват връзки, които са функционални – например зависимостта между пътя и времето при постоянна скорост. На практика явленията протичат под въздействието на много фактори и връзките губят своята функционалност. За такива зависимости казваме, че са **корелационни**, т.е. това са зависимости, при които върху въздействието на независимата променлива върху зависимата оказват влияние и други фактори. За първоначално определяне на корелационната зависимостта при статистическото ѝ изучаване се построява точкова диаграма, наречена **диаграма на разсейването**. Емпирично получените данни от дадено изследване за стойностите на двете променливи се нанасят като точки в първи квадрант на правоъгълна координатна система.

Диаграмата се използва за откриване на типа на зависимост, като се анализира множеството от точки. Например в случай на **линейна зависимост** точките се групират в по-голяма или в по-малка степен около права. Освен това зависимостта може да бъде полиномна, експоненциална и друга. Когато няма ясно изразена зависимост между двете променливи, казваме, че **няма корелация.**

1. В таблицата са дадени резултатите на 10 ученици от тест по математика (x) и от тест за интелигентност (y). Да се построи диаграма на разсейването и да се определи каква е зависимостта.

x	60	20	50	50	50	30	60	100	70	70
у	40	30	60	40	30	60	70	60	80	70



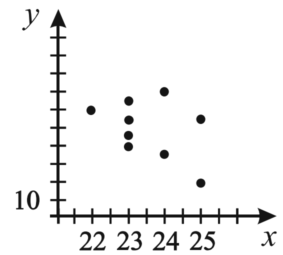
Решението е показано на точковата диаграма.

Може да се каже, че точките се подреждат около права линия, т.е. зависимостта е линейна.

При създаване на регресионен линеен модел резултатите ще се анализират, за да се прецени доколко моделът отговаря на зависимостта, получена от експеримента.

2. В таблицата са дадени резултатите за направените мартеници (y) от учениците на 10 класа в едно училище в зависимост от броя на учениците в класа (x). Да се построи диаграма на разсейването и да се определи каква е зависимостта.

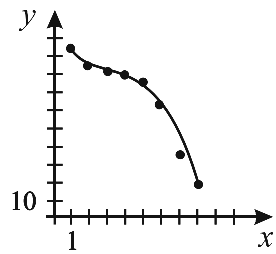
x	22	23	23	25	24	23	23	24	25	23
у	60	55	40	20	70	65	55	35	55	45



Решението е показано на точковата диаграма.

Няма ясно изразена корелационна зависимост.

3. В таблицата са дадени резултатите от процента (y) на кълняемост на семена от домати в продължение на 8 години (x) след производството им. Да се построи диаграма на разсейването и да се определи каква е зависимостта.



x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	95	88	82	80	77	62	37	20

Решението е показано на точковата диаграма.

Може да се каже, че точките се подреждат около графиката на функция от трета степен. Казваме, че зависимостта е полиномна.

4. В таблицата са дадени броят клиенти на ден (y) и броят работни часове на ден (x) в десет магазина. Да се построи диаграма на разсейването и да се определи каква е зависимостта.

x	8	8	9	8	10	9,5	8	10	12	9,5
y	53	54	55	48	57	57	48	51	56	57

5. В таблицата са дадени резултатите за кълняемостта на патладжани, където x е броят години след прибиране на семената, а y е процентът на кълняемост. Да се построи диаграма на разсейването и да се определи каква е зависимостта.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	95	92	87	85	83	78	72	71	68	67

6. В таблицата са показани броят на оценките x (от изпитванията) по биология на група от 10 ученици и y – оценката по биология на съответния ученик. Да се построи диаграма на разсейване. Да се определи има ли зависимост на x от y.

x	1	2	2	3	3	3	4	4	4	5
y	5	2	4	3	6	5	4	3	6	3

7. Да се построи диаграма на разсейване. Да се определи има ли зависимост на x от y.

x	7	2	8	8	5	3	3	5	2	2
y	7	2	7	7	3	3	2	2	3	2

Тест 1
Емпирични разпределения

1. В резултат на статистическо проучване е направена извадката:

32	32	39	35	32	32	32	39	35
35	39	32	34	35	34	34	34	32
34	34	35	39	32	32	35	34	34
34	32	35	35	39	39	39	39	34
35	34	34	34	34	34	35	35	35
32								

а) Да се начертае честотната таблица с относителни честоти.
б) Да се намери емпиричната функция на разпределение на извадката.
в) Да се начертае графиката на емпиричната функция на разпределение на извадката.
г) Да се намерят медианата, първи и трети квартил на извадката.

Тест 2
Емпирични разпределения

1. В резултат на статистическо проучване е направена извадката:

38	38	38	38	38	39	39	39
40	40	40	38	39	39	39	37
37	37	40	37	38	39	37	37
38	40	40	37	39	40	38	39
37	38	38	39	37	39	40	40
38	38	37	38	38	37	37	38

а) Да се начертае честотната таблица с относителни честоти.
б) Да се намери емпиричната функция на разпределение на извадката.
в) Да се начертае графиката на емпиричната функция на разпределение на извадката.
г) Да се намерят медианата, първи и трети квартил на извадката.

Практикум
Емпирични разпределения

Ще се запознаем с някои функции за обработка на статистическа информация. Те са вградени в повечето електронни таблици. В записа на десетичните дроби вместо десетична запетая се използва точка.

Нека в електронна таблица са въведени данните от извадка.

Функция AVERAGE
Функцията пресмята средноаритметичната стойност на данните от извадката.

Функция MODE
Функцията пресмята модата на данните от извадката.

Функция MEDIAN
Функцията пресмята медианата на данните от извадката.

Функция QUARTILE(област от клетки,N)
N – число 1, 2, 3 или 4, показващо номера на квартила.
Функцията пресмята N-ти квартил на данните от извадката.

Функция VAR
Функцията пресмята дисперсията на данните от извадката.

Функция STDEV
Функцията пресмята стандартното отклонение на данните от извадката.

Чрез повечето електронни таблици могат да се правят диаграми на разпределение на данните.

1. При статистическо проучване са получени следните данни:

52	53	54	52	53	52	53	55	55	55
52	52	52	52	52	53	54	54	54	55
54	54	54	54	55	55	53	54	55	55

Въведете данните в електронна таблица. Пресметнете чрез изброените по-горе вградени функции средната стойност на данните, модата, медианата, 1-ви, 2-ри и 3-ти квартил, дисперсията и стандартното отклонение.
Направете диаграма със стълбове и кръгова диаграма.

2. Потърсете допълнителна информация, за която да изпълните изискванията на задача 1.

3. Потърсете допълнителна информация за категорни променливи и начертайте диаграма, съответстваща на данните.

4. Елементи от комбинаториката

4.1. Съединения с повторения

Определение. Нека A е множество с n различни елемента. Всяка крайна редица $(a_1, a_2, ..., a_k)$ от k елемента на A (сред тях може да има повтарящи се) се нарича **съединение от k-ти клас** или **извадка с обем k**.

Извадките могат да бъдат:

– **Извадка без връщане.** Изваждаме един елемент от множеството A и го записваме, но не го връщаме обратно. След това изваждаме втори елемент и го записваме без да го връщаме и т.н., докато извадим k елемента. Получената извадка е с различни елементи, защото след изваждане на даден елемент, той не се връща в множеството A и няма как да бъде избран повторно. За k имаме $k \le n$.

– Извадка с връщане. Изваждаме един елемент от множеството A, записваме го и след това го връщаме обратно в A. По този начин изваждаме k елемента. В получената извадка може да има повтарящи се елементи и извадката може да има произволен обем. За k имаме $k < n$ или $k = n$, или $k > n$.

– Наредена извадка. Извадка, в която извадените елементи се подреждат в реда, в който са извадени, се нарича наредена извадка.

– Ненаредена извадка. Извадка, в която елементите не се подреждат, се нарича ненаредена извадка.

- Наредени извадки без връщане с обем $k = n$ се наричат **пермутации на n елемента**.

Броят на различните пермутации на n елемента се означава с P_n и $P_n = n!$.

Наредени извадки без връщане с обем $k \le n$ се наричат **вариации от n елемента k-ти клас**.

Броят на вариациите от n елемента k-ти клас се означава с V_n^k и $V_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

- Ненаредени извадки без връщане с обем $k \le n$ се наричат **комбинации от n елемента k-ти клас**. Броят на комбинациите от n елемента k-ти клас се означава с C_n^k и $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dbinom{n}{k}$.

В тази тема предстои да изучим извадките с връщане, т.е. извадки, в които има повтарящи се елементи.

1) Вариации с повторение

Определение. Вариации с повторение от n елемента k-ти клас наричаме всяка наредена извадка с връщане с обем k, избрана от множество с n елемента.

Обемът k на извадката може да бъде по-малък, равен или по-голям от n, т.е. $k < n$ или $k = n$ или $k > n$.

Две вариации с повторение са различни, ако имат поне един елемент, който участва различен брой пъти в двете или ако на позиция с един и същ номер в двете вариации стоят различни елементи.

Броят на различните вариации с повторение от n елемента k-ти клас се означава с $\widetilde{V}_n^k$.

Коментар

Вариация с повторение от n елемента k-ти клас е редица с дължина k, чиито елементи са избрани измежду n елемента, които могат да се повтарят и редът на елементите в редицата има значение.▲

Пример 1. Нека множеството A има $n=3$ елемента и $A=\{a,b,c\}$. Правим извадка с обем k с връщане, като записваме и поредния номер на извадените елементи. Да се намери броят на получените различни съединения, ако:

а) $k=2$;

б) $k=4$.

Решение. Според определението, получените съединения са вариации с повторение от $n=3$ елемента, k-ти клас.

а) $k=2$.

I начин.

Преброяваме вариациите, като ги изброим:

$$\begin{matrix} aa & ab & ac \\ bb & ba & bc \\ cc & ca & cb \end{matrix}$$

Следователно броят им е $\widetilde{V}_3^2=9$.

II начин.

Разсъждаваме така:

Има две позиции $(k=2)$, на които можем да поставим елемент от A. Елементите на A са 3 следователно на първа позиция можем да поставим всеки от трите елемента. След като сме поставили един елемент на първа позиция, то на втора можем да поставим отново всеки от трите елемента (защото се допуска повторение).

Сега от принципа за умножение в комбинаториката получаваме, че общият брой е $3.3=3^2=9$, т.е. $\widetilde{V}_3^2=3^2=9$.

б) $k=4$.

Трябва да запишем редиците с дължина $k=4$, чиито елементи са избрани от a, b и c с повторение, като редът им има значение. Такива редици са $aaaa$, $aaab$, $aaba$ и т.н.

Оказва се, че броят им е твърде голям, за да изброим всички, ето защо ще ги преброим по начина, използван във II начин на подусловие а).

Има четири позиции $(k=4)$, на които можем да поставим елемент от A.

На първа позиция можем да поставим всеки от трите елемента. След като сме поставили един елемент на първа позиция, то на втората можем да поставим отново всеки от трите елемента (защото се допуска повторение) и т.н. на всяка от четирите позиции можем да поставим всеки от трите елемента.

От принципа за умножение в комбинаториката следва, че общият брой е $3.3.3.3$, т.е. $\widetilde{V}_3^4=3.3.3.3=3^4=81$.▲

С аналогични разсъждения може да се докаже следващата теорема.

Теорема 1. Да се докаже, че броят на различните вариации с повторение от n елемента k-ти клас е $\tilde{V}_n^k = n^k$.

Доказателство.

Има k позиции, на които можем да поставим всеки един от n-те елемента:

На първа позиция можем да поставим всеки един от n-те елемента. След като вече сме поставили елемент на първа позиция, на втора позиция отново можем да поставим всеки един от n-те елемента (защото се допуска повторение на елементи) и т.н. на всяка позиция можем да поставим всеки един от n-те елемента, като позициите са k.

От принципа за умножение в комбинаториката следва, че общият брой е $\underbrace{n.n...n}_{k \text{ пъти}}$.

Следователно $\tilde{V}_n^k = \underbrace{n.n...n}_{k \text{ пъти}} = n^k$.▲

Коментар

Във формулата n^k степента k е дължината на редиците, които образуваме, а n е броят на елементите, от които избираме.▲

1. Да се намери броят на числата, записани с цифрите $1, 2, ..., 9$, които са:

а) трицифрени;

б) десетцифрени.

Решение.

В условието няма изискване числата да бъдат с различни цифри.

а) Числата, които са трицифрени и записани с цифрите от 1 до 9, като цифрите могат да се повтарят, са редиците с дължина 3, в които участват някои от цифрите $1, 2, ..., 9$. По определение това са вариациите с повторение от 9 елемента 3-ти клас. Техният брой е $\tilde{V}_9^3 = 9^3$.

б) Десетцифрените числа, записани с цифрите от 1 до 9, като цифрите могат да се повтарят, са редиците с дължина 10, в които участват 9 елемента. По определение това са вариациите с повторените от 9 елемента 10-ти клас. Броят им е $\tilde{V}_9^{10} = 9^{10}$.▲

2. Да се намери броят на числата, записани с цифрите от 0 до 9, които са шестцифрени.

Решение. В условието няма изискване числата да бъдат с различни цифри.

I начин.

Както и в предходната задача, установяваме, че шестцифрените числа са редиците с дължина 6, записани с някои от дадените цифри, които могат да се повтарят, т.е. това са вариациите с повторение от 10 елемента 6-ти клас, чийто брой е $\tilde{V}_{10}^6 = 10^6$. Но тук има една особеност – когато една такава редица започва с 0, тя не е шестцифрено число.

Ето защо от този брой трябва да извадим вариациите, които започват с 0. Те се получават като към всяка вариация с повторение от 10 елемента $(0, 1, 2, ..., 9)$ 5-ти клас добавим първа цифра 0. Броят им е $\tilde{V}_{10}^5$.

Търсеният брой е $\tilde{V}_{10}^6 - \tilde{V}_{10}^5 = 10^6 - 10^5 = 9.10^5$.

II начин.

Задачата може да се реши и като използваме разсъжденията, с които доказахме теоремата.

Като първа цифра (на първа позиция) можем да поставим всеки един от 9-те елемента (цифрите от 1 до 9). На втора и всяка следваща позиция можем да поставим всеки от 10-те елемента (цифрите от 0 до 9). От принципа за умножение получаваме, че общият брой е $9.10.10.10.10.10 = 9.10^5$.▲

3. Хвърлят се седем различни зара. Колко са различните възможни резултати?
Решение.

При хвърляне на 7 зара получаваме редици с дължина 7, в които участват някои от числата 1, 2, 3, 4, 5, 6 (може и всички), които са наредени и могат да се повтарят. По определение това са вариации от 6 елемента 7-ми клас и броят им е $\widetilde{V}_6^7 = 6^7$.▲

4. Учениците в един клас са 25. Всеки от тях се записва за изучаване на точно един от три чужди езика. По колко начина може да стане това?

Решение. Трябва да преброим редиците с дължина 25, в които участват три елемента. Те са $\widetilde{V}_3^{25} = 3^{25}$.▲

Коментар

Защо отговорът на тази задача не е 25^3?

Този брой може да получим, ако разсъждаваме така: за първия чужд език могат да се запишат 25 ученици, за втория и третия – също по 25 ученици, т.е. общият брой на възможностите е 25^3. По този начин обаче един ученик може да бъде записан за изучаване на повече от един чужд език. Ето защо тези разсъждения не отговарят на условието на задачата и не са нейно решение.

Условието на задачата предполага да разглеждаме редици с дължина 25, чиито елементи се избират измежду един от трите вида езици.▲

5. Колко е броят на шестцифрените числа, записани само с нечетните цифри?

6. Колко е броят на десетцифрените числа, завършващи на 5.

7. Колко е броят на k-цифрените числа, записани с n цифри без нулата?

8. Колко е броят на k-цифрените числа, записани с n цифри?

9. Ученик има 2 различни тетрадки и трябва да пише в тях по 5 различни учебни предмета, като по даден предмет пише само в една тетрадка. По колко начина може да стане това?

Решение. Да означим тетрадките с 1 и 2. Трябва да съставим редици с дължина 5 (броя на предметите), съставени от някои от числата 1 и 2 (все едно правим 5-цифрени числа с цифрите 1 и 2). Търсеният брой е $\widetilde{V}_2^5 = 32$.▲

2) Пермутации с повторение

Да разгледаме редицата 233232221. В нея числото 2 се повтаря пет пъти, числото 3 – три пъти, а числото 1 участва един път.

Казваме, че това е пермутация с повторение на числата 1; $2, 2, 2, 2, 2$; $3, 3, 3$. В случая имаме дадени 9 елемента (сред които има повтарящи се) и сме подредили тези елементи по един начин.

Пермутациите с повторение няма да разглеждаме като извадка от n елемента, а като редици от дадени n елемента, сред които има повтарящи се и тези n елемента подреждаме по всички начини.

Определение. Пермутация с повторение от n елемента k-ти клас наричаме съединение, в което елементът a_1 се повтаря n_1 пъти, елементът a_2 се повтаря n_2 пъти и т.н. елементът a_k се повтаря n_k пъти, така че $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

В горния пример елементът $a_1 = 1$ се повтаря $n_1 = 1$ път, елемент $a_2 = 2$ се повтаря $n_2 = 5$ пъти и елементът $a_3 = 3$ се повтаря $n_3 = 3$ пъти и $n_1 + n_2 + n_3 = 1 + 5 + 3 = 9 = n$.

Следователно редицата 233232221 е пермутация с повторение от 9 елемента 3-ти клас, в която в първия клас числото 1 участва 1 път, във втория клас числото 2 участва 5 пъти, в третия клас числото 3 участва 3 пъти, така че $1 + 5 + 3 = 9$.

Две пермутации са различни, ако имат позиция с един и същ номер, на която стоят различни елементи.

Броят на различните пермутации с повторение означаваме $\widetilde{P}_n(n_1, n_2, ..., n_k)$. Когато $k = n$, т.е. всичките n елемента са различни, се получават пермутации от n елемента без повторение.

Коментар

Пермутация от n елемента е редица с дължина n. Класът k е броят на различните елементи сред тези n елемента. За да получим всички пермутации с повторение, правим всички различни подреждания на n-те елемента.▲

Теорема 2. Да се докаже, че $\widetilde{P}_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}$, $\quad n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Доказателство.

Елементите, които участват в пермутациите, са $\underbrace{\underbrace{a_1, a_1, ..., a_1}_{n_1}; \underbrace{a_2, a_2, ..., a_2}_{n_2}, ..., \underbrace{a_k, a_k, ..., a_k}_{n_k}}_{\text{общо } n \text{ броя}}$.

Пермутациите на тези n елемента са, както знаем, $n!$.

Но в този брой не всички пермутации са различни, защото:

– a_1 се повтаря n_1 пъти и значи ще заеме $n_1!$ позиции и тези $n_1!$ пермутации ще бъдат еднакви;

– a_2 се повтаря n_2 пъти и значи ще заеме $n_2!$ позиции и тези $n_2!$ пермутации ще бъдат еднакви;

– и т.н. a_k се повтаря n_k пъти, ще получим нови $n_k!$ еднакви пермутации.

Сега от принципа за умножение в комбинаториката получаваме, че $n_1!n_2!...n_k!$ е общият брой на повтарящите се пермутации.

Броят на различните пермутации е $\widetilde{P}_n(n_1, n_2, ..., n_k)$.

Тогава, отново от принципа за умножение, получаваме, че всички пермутации са $\widetilde{P}_n(n_1, n_2, ..., n_k).n_1!n_2!...n_k!$, но този брой също така е $n!$, следователно $\widetilde{P}_n(n_1, n_2, ..., n_k).n_1!n_2!...n_k! = n!$, откъдето $\widetilde{P}_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}$.▲

Коментар

Понякога може да изпускаме индекса n. Например вместо $\widetilde{P}_7(3,4)$ ще пишем $\widetilde{P}(3,4)$, което е еднозначно, тъй като $7 = 3 + 4$.▲

10. Да се намери броят на седемцифрените числа, образувани от цифрите:

а) 3, 3, 5, 5, 5, 9, 9;

б) 8, 8, 8, 8, 3, 3, 6;

в) 1, 1, 1, 5, 5, 5, 5.

Решение. а) Имаме три групи съответно с 2, 3 и 2 елемента, като във всяка група елементите са еднакви и $2+3+2=7$. Следователно търсеният брой е $\widetilde{P}_7(2,3,2)=\dfrac{7!}{2!3!2!}=\dfrac{4.5.6.7}{2.2}=210$.▲

11. На витрината на спортен магазин трябва да се наредят 3 еднакви топки за тенис на корт и 5 еднакви топчета за тенис на маса. По колко различни начина може да стане това?

12. Колко различни сигнала може да се подадат с подреждането в редица на 1 червен, 3 зелени и 2 сини флага?

13. За изпълнение на проект учениците от един клас трябва да се разделят на 4 групи, като в първата група има 7 ученици, във втората – 6 ученици, в третата – 6 ученици и в четвъртата – 5 ученици. По колко различни начина може да стане това?

Решение. Общият брой на учениците в класа е $7+6+6+5=24$.

Да номерираме учениците по номера $1, 2, 3, ..., 24$ и първите 7 да разпределим в първа група; следващите 6 – във втора група; следващите 6 – в трета група и останалите 5 – в четвърта група.

Броят на пермутациите на 24 елемента е $24!$ и всяка такава пермутация задава разпределение на учениците по групи.

Тъй като няма значение редът на учениците в първа група, то ще имаме $7!$ еднакви разпределения.

Аналогично от втора, трета и четвърта група ще получим по $6!$, $6!$ и $5!$ еднакви разпределения.

Следователно $24!$ трябва да се раздели на $7!6!6!5!$ и получаваме $\dfrac{24!}{7!6!6!5!}$ различни разпределения, което е точно формулата за $\widetilde{P}_{24}(7,6,6,5)$.

За пълнота на разглежданията ще отбележим, че няма друго разпределение на учениците, освен преброените. Наистина, ако допуснем, че има такова, то ще е някоя пермутация на числата от 1 до 24 и значи вече е преброено.▲

<u>Коментар</u>

1) В случая имаме множество от n елемента, което искаме да разбием на k групи и считаме, че попадналите елементи във всяка от тези k групи са еднакви. При пермутациите с повторение имаме дадени n елемента, в които има k различни групи от елементи. Оказва се, че броят на пермутациите с повторение съвпада с броя на различните разбивки на множеството, които правим.▲

С разсъжденията, използвани в предходната задача, може да се докаже следното

Твърдение. Нека множеството A, което има n елемента, е разбито на k групи, така че в първата група има n_1 елемента, във втората – n_2 и т.н. в k-тата – n_k елемента, където $n_1+n_2+...+n_k=n$. Броят на различните разбивки на множеството A е равен на $\widetilde{P}_n(n_1,n_2,...,n_k)=\dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$.

14. По колко начина могат да се разпределят 10 топки в три кутии, така че в първата да има 2 топки, във втората – 4 и в третата – 4.

Решение. Разделяме множеството от 10 топки на три групи съответно по 2, 4 и 4 топки. Във всяка група елементите са еднакви $\Rightarrow$ те могат да се подредят по $\widetilde{P}_{10}(2,4,4)=\dfrac{10!}{2!4!4!}$ начина.

Задачата може да се реши и така.

От 10 топки избираме 2 по C_{10}^{2} начина. От останалите 8 избираме 4 по C_{8}^{4} начина и последните 4 избираме по C_{4}^{4} начина.

От принципа за умножение получаваме $C_{10}^{2}\,C_{8}^{4}\,C_{4}^{4}=\frac{10!}{2!8!}.\frac{8!}{4!4!}.\frac{4!}{4!0!}=\frac{10!}{2!4!4!}$.

Така получихме, че $\widetilde{P}_{10}(2,4,4)=C_{10}^{2}\,C_{8}^{4}\,C_{4}^{4}=\frac{10!}{2!4!4!}$.▲

3) Комбинации с повторение

Определение. Комбинация с повторение от n елемента k-ти клас наричаме всяка ненаредена извадка с връщане с обем k, избрана от множество с n елемента.

Обемът k на извадката може да бъде по-малък, равен или по-голям от n, т.е. $k<n$ или $k=n$ или $k>n$.

Две комбинации от n елемента от k-ти клас съвпадат точно когато и двете съдържат едни и същи елементи, независимо от реда, в който са записани.

Броят на различните комбинации с повторение от n елемента k-ти клас означаваме с $\widetilde{C}_{n}^{k}$.

Коментар

Комбинация с повторение от n елемента k-ти клас е редица с дължина k, чиито елементи са избрани измежду n елемента, които могат да се повтарят и редът на елементите в редицата няма значение.▲

Пример. Да се намери броят на комбинациите с повторение от 3 елемента $\{a,b,c\}$ 6-ти клас.

Решение. Нека имаме три кутии и в тях слагаме съответно избраните елементи a, b и c. Нека a е избран k_1 пъти, $b-$ k_2 пъти и $c-$ k_3 пъти, така че $k_1+k_2+k_3=6$.

Заместваме елемента a с k_1 единици, b – с k_2 единици и c – с k_3 единици.

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{k_1 \quad k_2 \quad k_3}}_{6}} \end{array}$$

Между кутиите поставяме числото 0, което служи за „преграда”.

Ето някои възможни случаи:

– $k_1=3$, $k_2=1$, $k_3=2$

$\boxed{111}\,0\,\boxed{1}\,0\,\boxed{11}$ – редица с 6 единици и 2 нули.

– $k_1=1$, $k_2=0$, $k_3=5$

$\boxed{1}\,0\,\boxed{}\,0\,\boxed{11111}$ – редица с 6 единици и 2 нули.

– $k_1=0$, $k_2=6$, $k_3=0$

$\boxed{}\,0\,\boxed{111111}\,0\,\boxed{}$ – редица с 6 единици и 2 нули.

Ясно е, че на всяка комбинация можем да съпоставим редица от 6 единици и 2 нули. И на различни комбинации съпоставяме различни редици.

Нека сега имаме редица от 6 единици и 2 нули. Дали тя ще съответства на някоя комбинация?

Да разгледаме някои случаи.

– 10101111 – съответства на $\underset{k_1=1}{\boxed{a}}\ 0\ \underset{k_2=1}{\boxed{b}}\ 0\ \underset{k_3=4}{\boxed{c}}$

– 11110011 – съответства на $\underset{k_1=4}{\boxed{a}}\ 0\ \underset{k_2=0}{\boxed{b}}\ 0\ \underset{k_3=2}{\boxed{c}}$

– 11111100 – съответства на $\underset{k_1=6}{\boxed{a}}\ 0\ \underset{k_2=0}{\boxed{b}}\ 0\ \underset{k_3=0}{\boxed{c}}$

Така по описания начин на всяка редица от 6 единици и 2 нули можем еднозначно да съпоставим комбинация. Следователно броят на комбинациите в разглежданата задача е равен на броя на редиците, в които има две групи – едната група се състои от 6 елемента, а другата – от 2. Броят на тези редици, според твърдението е $\widetilde{P}_8(6,2) \quad \Rightarrow \quad \widetilde{C}_3^6 = \widetilde{P}_8(6,2) = \dfrac{8!}{6!2!}$.▲

В разглеждания пример имахме $n=3$, $k=6$. Редиците, които образувахме имаха $k=6$ единици и $n-1=2$ нули.

Да заместим тези означения в резултата, получен в задачата:

$$\widetilde{C}_n^k = \widetilde{P}(k,n-1) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Това е и формулата за броя на $\widetilde{C}_n^k$, която ще докажем със следващата теорема.

Теорема 3. Да се докаже, че броят на комбинациите с повторение на n елемента k-ти клас е

$$\widetilde{C}_n^k = \widetilde{P}(k,n-1) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k.$$

Доказателство.

Доказателството следва разсъжденията, използвани в примера.

Избираме от n на брой различни елемента $a_1, a_2, ..., a_n$. Нека a_1 е избран k_1 пъти, a_2 – k_2 пъти и т.н. a_n – k_n пъти, където $k_1+k_2+...+k_n=k$ и някои от числата $k_1,...,k_n$ може да бъдат нули.

$$\boxed{a_1} \quad \boxed{a_2} \quad \cdots \quad \boxed{a_n}$$

$$\underbrace{k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n}_{k}$$

Елемента a_1 заместваме с k_1 единици, a_2 заместваме с k_2 единици и т.н. a_n заместваме с k_n единици – общият брой на единиците е k.

Между n-те групи слагаме преградни нули, които са $n-1$ на брой.

Ако някой от елементите $a_1, a_2, ..., a_n$ не се среща, тоест някое от числата $k_1, k_2, ..., k_n$ е 0, тогава не пишем единицата, но преградната нула остава.

Така на всяка комбинация от числата съпоставяме редица от k единици и $(n-1)$ нули.

Ясно е, че на различни комбинации се съпоставят различни редици.

Нека сега вземем една произволна редица от k единици и $(n-1)$ нули.

Нулите разбиват единиците на n части и да означим с $k_1, k_2, ..., k_n$ броя на единиците във всяка такава част, като някои от k_i, $i=1,2,...,n$ може да бъдат нули, но $k_1+k_2+...+k_n=k$.

На тази редица съответства комбинация, в която a_1 участва k_1 пъти, a_2 участва k_2 пъти и т.н. a_n участва k_n пъти.

Така получихме, че броят на комбинациите от n елемента k-ти клас е равен на броя на редиците с k единици и $n-1$ нули.

Броят на редиците, които имат две групи елементи – едната с k елемента, а другата с $n-1$ елемента, според твърдението, е равен на пермутациите с повторение от $n+k-1$ елемента от $n-1$-ви клас, който се означава с $\widetilde{P}(k,n-1)$.

$\Rightarrow \quad \widetilde{C}_n^k = \widetilde{P}(k,n-1) = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

По определение $C_{n+k-1}^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n+k-1-k)!} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$, с което теоремата е доказана.▲

15. От четири различни партиди от даден детайл трябва да се изберат 8 детайла за проверка на качеството. По колко различни начина може да стане това?

Решение. Нека елементите на множеството A са имената на партидите – П1, П2, П3, П4. Всеки избран детайл означаваме с името на партидата, от която е избран. Така получаваме редици с дължина 8, съставени от някои от 4-те елемента П1, П2, П3, П4, които не подреждаме.

Примери за такива редици са: $\{$П1, П1, П1, П1, П1, П1, П1, П1$\}$ (избрали сме осемте детайла само от партида 1); $\{$П2, П2, П2, П3, П3, П4, П4, П4$\}$, $\{$П1, П2, П3, П4, П1, П2, П3, П4$\}$ и т.н.

Следователно търсеният брой е $\widetilde{C}_4^8 = \dfrac{(4+8-1)!}{8!(4-1)!} = \dfrac{11!}{8!3!} = 165$.▲

16. По колко начина 10 балона може да се разпределят на 4 деца?

Решение. Задачата ще трансформираме така: На 4 деца да се разпределят 10 балона.

Да означим децата с A, B, C, D. Трябва да намерим броя на редиците с дължина 10, съставени от някои от елементите A, B, C, D, които може да се повтарят и редът им няма значение. Търсеният брой е $\widetilde{C}_4^{10} = 286$.▲

Коментар

Задачата се различава от задачите за разбиване на множество, в които е указан броят елементите в групите.▲

17. По колко начина могат да се оцветят 6 кръга с три цвята, ако:

а) кръговете не са наредени;

б) кръговете са наредени?

Всеки кръг се оцветява в един цвят.

Коментар

Всяка от редиците $\oplus\oplus\otimes\otimes\odot\odot$ и $\oplus\otimes\odot\oplus\otimes\odot$ представлява 6 кръга, оцветени в три цвята. Ако кръговете не са наредени, тези две редици са една и съща комбинация с дължина 6 от 3 елемента (цветовете). Ако кръговете са наредени, тези две редици са две различни вариации с дължина 6 от 3 елемента (цветовете).▲

18. По колко начина могат да се разпределят 10 еднакви топки в 5 кутии? (Кутиите може да съдържат произволен брой топки)

Общи задачи
Съединения с повторения

1. Пресметнете:

а) $\widetilde{V}_2^3$; б) $\widetilde{V}_3^4$; в) $\widetilde{V}_8^2$.

2. Пресметнете:

а) $\widetilde{P}_5(2,3)$; б) $\widetilde{P}_5(4,1)$; в) $\widetilde{P}_{10}(2,3,5)$.

3. Пресметнете:

а) $\widetilde{C}_2^3$; б) $\widetilde{C}_3^3$; в) $\widetilde{C}_3^2$; г) $\widetilde{C}_1^5$;

д) $\widetilde{C}_5^1$; е) $\widetilde{C}_1^n$; ж) $\widetilde{C}_n^1$.

4. Пресметнете:

а) $\widetilde{P}_8(3,2,3)$; б) $\widetilde{V}_2^5$ и $\widetilde{C}_2^5$; в) $\widetilde{C}_4^6$.

5. По колко начина могат да се разпределят 12 специалисти по четири цеха, така че във всеки цех да има по 3 специалисти?

6. Дадени са n квадратчета. Във всяко от тях записваме $+$ или $-$. По колко различни начина може да стане това?

7. Катинар се отваря посредством четири пръстена, върху всеки от които има по 10 деления с цифрите от 0 до 9. Катинарът се отваря само при едно разположение на пръстените. Колко най-много опита трябва да се направят, за да се открие отключващото разположение на пръстените?

8. Зар се хвърля 4 пъти. Колко са различните съединения от падналите се числа, ако редът на хвърляне има значение?

9. Монета се хвърля 7 пъти. Колко са различните съединения, които могат да се получат, ако редът на хвърляне има значение?

10. Колко комбинации с повторение 5-ти клас могат да се образуват от елементите a, b, c, x, y, z, които съдържат:

а) a поне веднъж;

б) a точно един път.

11. Колко са четирицифрените числа, които могат да се запишат с:

а) цифрите 3 и 5;

б) нечетните цифри;

в) четните цифри?

12. Дадени са буквите a, b, b, b, c, c. Колко пермутации започват с:

а) a; б) bc; в) bbc?

13. По колко начина може да се разместят множителите в произведението:

а) a^3bc^4; б) ab^{n-1}; в) $a^2b^nc^{n-1}$?

14. В цветарски магазин има 5 вида цветя. По колко начина може да се направят букети, в които има по 7 стръка цветя?

15. По колко начина могат да се наредят на витрина 3 еднакви гривни, 5 еднакви пръстена и 2 еднакви колиета?

16. Да се намери броят на различните пермутации на буквите в думата АНАЛИЗ.

17. Четири деца имат общо 30 стикера. По колко начина могат да си ги разделят, ако видът на стикерите няма значение?

18. Четири деца имат 20 стикера и 15 топчета. По колко начина могат да си ги разделят? Видът на стикерите и на топчетата няма значение.

Решение. Четири деца могат да си разделят 20 стикера по $\tilde{C}_4^{20}$ начина и могат да си разделят 15 топчета по $\tilde{C}_4^{15}$ начина. От принципа за умножение търсеният брой е $\tilde{C}_4^{20}.\tilde{C}_4^{15}$.▲

19. В три магазина трябва да се разпределят 15 еднакви чанти. По колко начина може да стане това?

20. Три деца събрали 10 кестена и 8 ореха. По колко начина могат да си ги разделят?

21. На две картончета е написана цифрата 3, на 5 картончета е написана цифрата 6 и на 3 картончета е написана цифрата 7. Колко числа могат да се получат при нареждане на всички картончета?

22. В кутия има 5 бели и 4 черни топки. Направена е наредена извадка без връщане с обем 9. Колко различни редици може да се получат?

23. По колко начина може да се разделят 6 топки в 2 различни кутии, ако:
а) топките са еднакви;
б) топките са различни?

24. Колко е броят на четирицифрените четни числа, записани с цифрите $1, 2, 3, 4, 5$?

25. Колко е броят на трицифрените числа, записани с цифрите $0, 1, 2, 3, 4, 5$?

26. Колко различни съчетания могат да се образуват от буквите на думата КАСИС?

27. Колко е броят на шестцифрените числа, които могат да се запишат с цифрите $6, 5, 5, 5, 4, 4$?

28. Майстор готвач създава рецептите на три различни салати. Всяка салата може да съдържа и чери домати. Общо в трите салати трябва да сложи 10 еднакви чери домата. По колко начина може да разпредели доматите по салатите?

29. Група от 20 участници и трима водачи е на екскурзия. В един от дните тримата водачи минават по различни маршрути и участниците се разпределят в три групи (има значение само броят участници във всяка група). По колко различни начина участниците могат да се разпределят по маршрутите?

30. На едно парти има 40 гости. Всеки от гостите е избрал точно един от три вида сок. Производителят на соковете е решил, ако има сок, който не е избран от никой от гостите да потърси нова рецепта. Каква е вероятността производителят да смени рецептата точно на един сок?

31 Едно събитие има 7 спонсора. Дизайнер на плакат за събитието може да разполага емблемите на спонсорите в горната или в долната част на плаката, като няма значение подредбата им. Колко различни проекта е направил, ако е създал всички възможности за разполагане на емблеми?

32. В един випуск има 100 ученици. Учителят по история е задал проекти върху първа или втора част на учебника. Всеки ученик избира проект само по едната част. Каква е вероятността учителят да проверява проекти:
а) само по втора част;
б) само по една от частите?

Тест 1
Съединения с повторения

1. Пресметнете $\widetilde{P}_3(2,1)$.

2. Колко е броят на вариациите с повторение от 3 елемента 2-ри клас?

3. Колко е броят на комбинациите с повторение от 3 елемента 5-ти клас?

4. Колко е броят на четирицифрените числа, записани с цифрите 2, 3 и 8?

5. Колко различни съчетания могат да се образуват от буквите на думата АНАНАС?

6. Колко четирицифрени числа могат да се образуват от цифрите 0, 9, 8, 7, 6?

7. По колко начина могат да се разпределят 4 различни топки в 3 различни кутии?

8. По колко начина могат да се разпределят 12 еднакви тетрадки на 4 деца?

9. Хвърлят се 4 зара. Колко е броят на различните начини, при които на 2 зара се падат единици, а на останалите шестици?

10. В ресторант се предлагат 3 вида супи и 4 вида основно ястие. По колко начина може да се състави меню от супа и основно ястие за 5 човека?

☒ **А)** $C_5^3 C_5^4$ **Б)** $\widetilde{C}_3^5 + \widetilde{C}_4^5$ **В)** $\widetilde{C}_5^7$ **Г)** $\widetilde{C}_3^5\, \widetilde{C}_4^5$

Тест 2
Съединения с повторения

1. Пресметнете $\widetilde{P}_4(3,1)$.

2. Колко е броят на вариациите с повторение от 2 елемента 4-ти клас?

3 Колко е броят на комбинациите с повторение от 2 елемента 4-ти клас?

4. Колко е броят на петцифрените числа, записани с цифрите 3, 5 и 6?

5. Колко различни съчетания могат да се образуват от буквите на думата ИЗПИТИ?

6. Колко трицифрени числа могат да се образуват от цифрите 0, 5, 6, 7, 8, 9?

7. По колко начина могат да се разпределят 5 различни топки в 4 различни кутии?

8. По колко начина могат да се разпределят 10 еднакви тетрадки на 3 деца?

9. Хвърлят се 5 зара. Колко е броят на различните начини, при които на 3 зара се падат петици, а на останалите тройки?

10. В ресторант се предлагат 4 вида супи и 2 вида основно ястие. По колко начина може да се състави меню от супа и основно ястие за 7 човека?

☒ **А)** $\widetilde{C}_4^7\, \widetilde{C}_3^2$ **Б)** $\widetilde{C}_4^7\, \widetilde{C}_2^7$ **В)** $\widetilde{C}_4^7 + \widetilde{C}_3^2$ **Г)** $\widetilde{C}_6^7$

Модул IV
Вероятности и анализ на данни

1. Вероятност

1.1. Вероятност и независимост. Пълна група събития и формула на пълната вероятност

1) Преговор

а) Събитие

Всеки възможен изход при извършване на даден опит се нарича **елементарно събитие**. Множеството от елементарните събития се означава с Ω.

Всяко подмножество A на Ω, ($A \subset \Omega$) се нарича **събитие**. Елементарните събития на A се наричат **благоприятни изходи**. Броят им означаваме с $v(A)$.

$\varnothing$ – невъзможно събитие, Ω – достоверно събитие.

Казваме, че събитието A се е **сбъднало** (настъпило, осъществило) при изпълнението на опит, ако резултатът от опита е елементарно събитие ω, което се съдържа в A, $\omega \in A$.

Събитието, което се сбъдва, когато не се сбъдва A, се нарича **противоположно** събитие на A и се означава с $\overline{A}$.

Сума (или обединение) $A \cup B$ на събитията A и B се нарича събитието, което се сбъдва, когато се сбъдва A или B, т.е. поне едно от A или B.

Произведение (или сечение) $A \cap B$ на събитията A и B се нарича събитието, което се сбъдва, когато се сбъдват и двете събития. Произведение означаваме още и така $AB = (A \cap B)$.

Несъвместими събития A и B, ако $A \cap B = \varnothing$ или $AB = \varnothing$.

Съвместими събития A и B, ако $A \cap B \neq \varnothing$ или $AB \neq \varnothing$.

б) Вероятност

Нека $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, т.е. $v(\Omega) = n$ и нека събитието A има m благоприятни изхода, т.е. $v(A) = m$.

Формула за класическа вероятност

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{v(A)}{v(\Omega)} = \frac{\text{благоприятни изходи}}{\text{всички изходи}}, \quad 0 \le P(A) \le 1,\ P(\varnothing) = 0,\ P(\Omega) = 1.$$

Вероятност на сума $P(A \cup B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, ако A и B са несъвместими,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, ако A и B са съвместими.

Условна вероятност. Нека $P(B) > 0$. Условна вероятност $P(A|B)$ на събитието A при условие, че се е сбъднало събитието B (при условие B) се нарича отношението

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(\text{сечението})}{P(\text{условието})}.$$

Също така $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$, $P(A) > 0$.

Вероятност на произведение $P(AB)$

$P(AB)=P(B)P(A|B)$

$P(AB)=P(A)P(B|A)$

Тези равенства са известни и като **теорема за умножение на вероятностите**.

Независими събития

Събитията A и B се наричат независими, ако е изпълнено равенството

$P(AB)=P(A)P(B)$.

Нека $P(B)>0$. Събитията A и B са независими $\Leftrightarrow$ $P(A|B)=P(A)$.

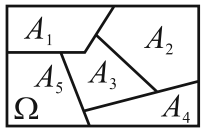
Нека $P(A)>0$. Събитията A и B са независими $\Leftrightarrow$ $P(B|A)=P(B)$.

Последните равенства показват, че събитията A и B са независими точно когато условната им вероятност съвпада с безусловната им вероятност.

Ако в една от двойките (A,B), $(\overline{A},B)$, $(A,\overline{B})$, $(\overline{A},\overline{B})$ събитията са независими, то и в останалите двойки събитията са независими.

Пълна група от събития.

Събитията $A_1,A_2,...,A_n$ образуват пълна група от събития, ако две по две са несъвместими и в резултат на проведен опит винаги настъпва някое от тях, т.е. $A_i\cap A_j=\varnothing$, $i,j=1,2,...,n, i\neq j$ и $A_1\cup A_2\cup...\cup A_n=\Omega$.



Ако $A_1,A_2,...,A_n$ образуват пълна група от събития,

то $P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1$.

Събитията A и $\overline{A}$ образуват пълна група от събития.

Пример 1. Монета се хвърля три пъти. Да означим събитията:

$A=\{$пада се ези (E) при първото хвърляне$\}$

$B=\{$пада се тура (T) при второто хвърляне$\}$

$C=\{$пада се точно едно ези$\}$

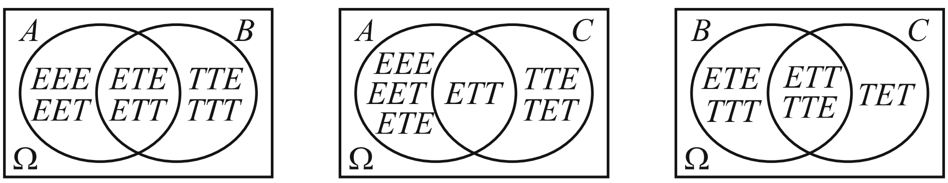
а) Да се намерят вероятностите на A, B и C.

б) Да се намерят $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(A|C)$, $P(C|A)$, $P(B|C)$, $P(C|B)$.

Решение.

Имаме $\Omega=\{EEE, EET, ETE, ETT, TEE, TET, TTE, TTT\}$ и $v(\Omega)=\widetilde{V}_2^3=2^3=8$.

Ще изобразим множествата A, B и C чрез диаграми на Ойлер-Вен.



а) $P(A)=\dfrac{v(A)}{v(\Omega)}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$, $P(B)=\dfrac{v(B)}{v(\Omega)}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$, $P(C)=\dfrac{v(C)}{v(\Omega)}=\dfrac{3}{8}$.

б) $P(A|B)$ означава, че събитието B се е сбъднало (случило се е). Тогава „влизаме" в B и от елементарните събития на B (които са 4), преброяваме тези, които са и от A (2 броя) $\Rightarrow$ $P(A|B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, с което в конкретния случай показахме, че $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Аналогично намираме останалите вероятности.

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{8}}{\frac{4}{8}}=\frac{1}{2},\ P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{1}{3},\ P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{1}{4},$$

$$P(B|C)=\frac{P(BC)}{P(C)}=\frac{2}{3},\ P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{1}{2}.\blacktriangle$$

Пример 2. Да се провери кои от двойките събития A и B, A и C, B и C от пример 1 са независими.

Решение.

$$\left.\begin{array}{l} P(AB)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4} \\ P(A)P(B)=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)\quad\Rightarrow\quad A \text{ и } B \text{ са независими.}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(AC)=\frac{1}{8} \\ P(A)P(C)=\frac{1}{2}.\frac{3}{8}=\frac{3}{16}\end{array}\right\}\Rightarrow P(AC)\neq P(A)P(C)\quad\Rightarrow\quad A \text{ и } C \text{ НЕ са независими.}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(BC)=\frac{1}{4} \\ P(B)P(C)=\frac{1}{2}.\frac{3}{8}=\frac{3}{16}\end{array}\right\}\Rightarrow P(BC)\neq P(B)P(C)\quad\Rightarrow\quad B \text{ и } C \text{ НЕ са независими.}\blacktriangle$$

1. Монета се хвърля три пъти. Разглеждаме събитията: A={падат се поне две ези}; B={пада се тура при първо хвърляне}; C={пада се точно два пъти тура}.

а) Да се намерят вероятностите на събитията A, B и C.

б) Да се намери $P(C|B)$, $P(B|C)$ и $P(A|B)$.

в) Да се провери кои от двойките събития A и B; B и C са независими.

Пример 3. Хвърля се зар един път. Да се намери вероятността да се падне число, което се дели на 2, ако се е паднало число, по-голямо от 3.

Решение. $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Означаваме $A=\{\text{пада се число, което се дели на } 2\}$ и $B=\{\text{пада се число по-голямо от } 3\}$. Трябва да намерим $P(A|B)$.

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{2}{3}.\blacktriangle$$

Коментар

1) Задачата е различна от задачата: „Да се намери вероятността да се падне число, което се дели на 2 и е по-голямо от 3.”, в която се изисква да се случи едновременно числото да се дели на 2 и да е по-голямо от 3, вероятността за което е $\frac{1}{3}$.

2) В дадената задача събитието „пада се число, по-голямо от 3” вече се е случило и при това условие се търси вероятността числото, което се е паднало, да се дели на 2.▲

2. Хвърля се зар един път. Да означим събитието $A = \{\text{пада се четно число}\}$ и събитието $B = \{\text{пада се просто число}\}$. Да се намерят вероятностите $P(A|B)$ и $P(B|A)$.

3. Хвърля се зар един път. Да се намери вероятността да се падне:
а) число, което се дели на 3, ако се е паднало число по-малко от 5;
б) число по-голямо от 1, ако се е паднало четно число;
в) 1, ако се е паднало нечетно число.

4. Хвърля се зар 2 пъти. Докажете, че събитията $A = \{\text{при първо хвърляне се пада } 6\}$ и $B = \{\text{при второ хвърляне се пада нечетно число}\}$ са независими.

5. Хвърлят се два зара един път. Да се намери вероятността да се падне:
а) на двата зара еднакви числа, ако се е паднал сбор по-малък от 6;
б) сбор по-малък от 6, ако на двата зара са се паднали еднакви числа;
в) на единия зар 5, ако на другия се е паднало число по-голямо от 2;
г) на единия зар число по-малко от 4, ако на другия се е паднало 3;
д) на единия да се падне 1, ако се е паднал сбор по-голям от 6;
е) сбор по-голям от 5, ако на единия се е паднало 3.

6. Хвърля се един зар два пъти. Да се намери вероятността да се падне:
а) при първо хвърляне четно число, ако при второ се е паднало просто число;
б) при първо хвърляне число по-голямо от 1, ако при второ хвърляне се е паднало четно число;
в) при второ хвърляне нечетно число, ако се е паднал сбор 8 от двете хвърляния.

7. В кутия има 5 бели и 6 черни топки. Извадени са 3 последователно и без връщане. Каква е вероятността третата извадена топка да бъде черна, ако първите две извадени са бели?

8. В две кутии има бели и черни топки. В първата има 5 бели и 4 черни, във втората – 4 бели и 7 черни. Нека A е събитието $\{$извадена е 1 бяла топка от първата кутия$\}$, а B е събитието $\{$извадена е 1 бяла топка от втората кутия$\}$. Да се докаже, че A и B са независими събития.

Решение. Намираме $P(A) = \frac{5}{9}$ и $P(B) = \frac{4}{11}$.

Една бяла топка от първата кутия избираме по 5 начина. Една бяла топка от втората кутия избираме по 4 начина. От принципа за умножение в комбинаториката следва, че изваждането на една бяла топка от първата кутия и една бяла топка от втората става по 5.4 начина.

Аналогично намираме, че изваждането на една топка от първата кутия и на една топка от втората става по 9.11 начина.

Тогава $P(AB) = \frac{5.4}{9.11} = \frac{5}{9}.\frac{4}{11} = P(A)P(B)$. Следователно събитията A и B са независими.▲

9 В три кутии има бели и черни топки, като в първата има 2 бели и 3 черни, във втората – 4 бели и 2 черни, в третата 3 бели и 4 черни. От случайно избрана кутия е извадена 1 топка. Каква е вероятността тази топка да е бяла?

Решение.

Кутиите са три и случайно е избрана една от тях. Тогава изваждането на 1 бяла топка от първата кутия се случва при едновременното сбъдване на събитията:

Кутия 1	Кутия 2	Кутия 3
2 бели 3 черни	4 бели 2 черни	3 бели 4 черни

$A = \{$избрана е първата кутия$\}$ и

$B = \{$извадена е една бяла топка от първата кутия$\}$.

Ще намерим вероятността $P(AB)$. От теоремата за умножение на вероятностите имаме

$$P(AB) = P(A)P(B|A).$$

$P(A) = \dfrac{1}{3}$ (защото кутиите са три и се избира случайно една от тях).

Да намерим $P(B|A)$. Събитието A е настъпило. Тогава „влизаме” в първата кутия и избираме една бяла топка с вероятност $\dfrac{2}{5} \Rightarrow P(B|A) = \dfrac{2}{5}$.

Следователно $P(AB) = P(A)P(B|A) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{2}{5}$ – вероятността да извадим една бяла топка от първата кутия.

Аналогично намираме, че вероятността да извадим една бяла топка от втората кутия е $\dfrac{1}{3}.\dfrac{4}{6}$, а от третата е $\dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{7}$.

Топката е извадена от първата или от втората или от третата кутия. Следователно търсената вероятност е $\dfrac{1}{3}.\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{3}.\dfrac{4}{6}+\dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{7}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{6}+\dfrac{3}{7}\right)$.▲

10. В три кутии има бели и черни топки, като в първата има 3 бели и 4 черни, във втората – 4 бели и 2 черни, в третата – 5 бели и 3 черни. От случайно избрана кутия е извадена 1 топка. Каква е вероятността тази топка да е бяла?

11. В три кутии има бели и черни топки, като в първата има 2 бели и 4 черни, във втората – 3 бели и 3 черни, в третата – 5 бели и 2 черни. От случайно избрана кутия е извадена 1 топка. Каква е вероятността тази топка да е бяла?

12. В три кутии има бели и черни топки, като в първата има 3 бели и 4 черни, във втората – 4 бели и 5 черни, в третата – 5 бели и 3 черни. От случайно избрана кутия са извадени 2 топки без връщане. Каква е вероятността:

а) двете топки да са бели;
б) двете да са еднакъв цвят;
в) двете да са с различен цвят?

13. В три кутии има бели и черни топки. В първата има 5 бели и 7 черни, във втората – 4 бели и 6 черни, в третата – 8 бели и 3 черни. От случайно избрана кутия са извадени 2 топки без връщане. Каква е вероятността:

а) двете топки да са бели;
б) двете да са едноцветни;
в) двете да са разноцветни?

14. В три кутии има бели и черни топки. В първата има 4 бели и 4 черни, във втората – 3 бели и 6 черни, в третата – 5 бели и 3 черни. От случайно избрана кутия са извадени 2 топки без връщане. Каква е вероятността:

а) двете топки да са бели;

б) двете да са едноцветни;

в) двете да са разноцветни?

15. В кутия има само бели и черни топки. Извадени са две без връщане. Кои от събитията образуват пълна група от събития събитията:

а) $A_1=\{$първата извадена топка е бяла$\}$ и $A_2=\{$първата извадена топка е черна$\}$;

б) $A_1=\{$извадени са две бели топки$\}$, $A_2=\{$извадени са две черни топки$\}$ и $A_3=\{$извадена е една бяла и една черна топка$\}$?

16. В кутия има 5 бели и 4 черни топки. От кутията се изваждат две топки без връщане. Нека A, B и C са събитията: $A=\{$извадени са две едноцветни топки$\}$, $B=\{$извадени са две разноцветни топки$\}$ и $C=\{$извадена е поне една бяла топка$\}$.

а) Образуват ли някои от изброените събития пълна група?

б) Да се намери $P(A|C)$.

17. Зар се хвърля два пъти. Образуват ли пълна група от събития събитията:

а) $A=\{$сборът от точките при двете хвърляния е по-малък или равен на $7\}$,
$B=\{$сборът от точките при двете хвърляния е по-голям от $6\}$;

б) $A=\{$при второто хвърляне се пада число по-малко от $4\}$,
$B=\{$при първото хвърляне се пада число по-малко от 4, а при второто – число по-голямо от $3\}$,
$C=\{$при първото хвърляне се пада число по-голямо от 3, а при второто – по-голямо от $3\}$?

18. В кутия има 5 бели и 6 черни топки. Изваждат се случайно 3 от тях без връщане. Опишете пълна група събития, съответстваща на опита. Намерете вероятностите на събитията от пълната група.

19. В кутия има 4 бели и 2 черни топки. По случаен начин се изваждат две топки без връщане. Да се опише пълна група събития, съответстваща на опита. Да се намерят вероятностите на събитията от пъпната група.

20. Хвърлят се два зара един път. Да означим събитията: $A=\{$поне на единия зар се пада числото $2\}$, $B=\{$поне на единия зар се пада съставно число$\}$ и $C=\{$падат се две еднакви числа$\}$. Да се намери вероятността:

а) на всяко от събитията A, B и C;

б) на събитието A при условие, че е настъпило събитието B;

в) на събитието B при условие, че е настъпило събитието C;

г) на събитието C при условие, че е настъпило събитието A.

2) Пълна вероятност

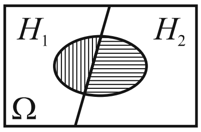
Нека Ω е множеството от елементарните събития при извършване на даден опит.

Теорема. (Формула на пълната вероятност)

Ако H_1, H_2, ..., H_n образуват пълна група от събития и $P(H_k)>0$ за $k=1,...,n$, то за всяко събитие A е изпълнено $P(A)=\sum_{k=1}^{n} P(H_k).P(A|H_k)$.

Записана без знака за сума, формулата е:

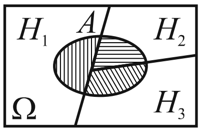
$$P(A)=P(H_1).P(A|H_1)+P(H_2).P(A|H_2)+...+P(H_n).P(A|H_n).$$



При $n=2$ и $n=3$ формулата на пълната вероятност изглежда така:

$$P(A)=P(H_1).P(A|H_1)+P(H_2).P(A|H_2),$$

$$P(A)=P(H_1).P(A|H_1)+P(H_2).P(A|H_2)+P(H_3).P(A|H_3).$$



Коментар

Верността на формулата за пълна вероятност установихме в конкретния случай на задача **9.**▲

Пример 4. Дадени са три еднакви кутии, като кутия 1 съдържа 10 топки, от които 4 са бели; кутия 2 съдържа 8 топки, от които 3 са бели; кутия 3 съдържа 4 топки, от които 2 бели. От случайно избрана кутия е извадена една топка. Каква е вероятността тази топка да е бяла?

Решение.

За хипотези избираме пълната група от събития:

H_1={избрана е кутия 1}, H_2={избрана е кутия 2} и H_3={избрана е кутия 3}

Кутия 1	Кутия 2	Кутия 3
10 топки 4 бели	8 топки 3 бели	4 топки 2 бели

$\Rightarrow \quad P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\dfrac{1}{3}$.

Нека A={извадена е бяла топка} $\Rightarrow \quad P(A|H_1)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$, $P(A|H_2)=\dfrac{3}{8}$, $P(A|H_3)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

По формулата на пълната вероятност получаваме

$$P(A)=P(H_1).P(A|H_1)+P(H_2).P(A|H_2)+P(H_3).P(A|H_3)=\frac{1}{3}.\frac{2}{5}+\frac{1}{3}.\frac{3}{8}+\frac{1}{3}.\frac{1}{2}=\frac{17}{40}.$$ ▲

Събитията от пълната група H_1, H_2, ..., H_n се наричат **хипотези**. Вероятностите $P(H_1)$, $P(H_2)$, ..., $P(H_n)$ се наричат **априорни[1] вероятности** на хипотезите H_1, H_2, ..., H_n.

Коментар

При провеждане на опита имаме два етапа:

– избира се кутия;

– изважда се една топка.

Хипотезите са пълна група от събития, които изчерпват възможностите от първия етап – избира се кутия 1, кутия 2 или кутия 3. Априорните вероятности $P(H_i)$ са известни преди втори етап.

Събитието A, чиято вероятност търсим, е възможен изход от втория етап, като то се осъществява при условието на хипотезите от първи етап. ▲

[1] a priori – по-рано. Независимо от опита.

Пример 5. В кутия има 6 бели и 7 черни топки. По случаен начин е извадена една топка и без да се връща е извадена втора. Каква е вероятността втората топка да бъде бяла?

Решение. Означаваме с A събитието, чиято вероятност търсим, $A = \{$втората топка е бяла$\}$.

Избираме пълна група от събития $H_1 = \{$първата извадена топка е бяла$\}$ и $H_2 = \{$първата извадена топка е черна$\}$ $\Rightarrow$ $P(H_1) = \frac{6}{13}$, $P(H_2) = \frac{7}{13}$, $P(A|H_1) = \frac{5}{12}$, $P(A|H_2) = \frac{6}{12}$.

По формулата на пълната вероятност намираме $P(A) = P(H_1).P(A|H_1) + P(H_2).P(A|H_2)$ $=$ $\frac{6}{13}.\frac{5}{12} + \frac{7}{13}.\frac{6}{12} = \frac{6}{13}$.▲

21. В кутия има 12 бели и 8 черни топки. Изваждат се по случаен начин 2 топки без да се връщат. Каква е вероятността втората извадена топка да е черна?

22. В кутия има 8 бели и 3 черни топки. Извадена е случайно една топка и след нея още 2.Топките се изваждат без да се връщат. Каква е вероятността втората и третата топка да са едноцветни?

23. В кутия има 8 бели, 3 зелени и 5 червени топки. Последователно се изваждат две топки без да се връщат. Каква е вероятността втората извадена топка да е зелена?

24. В три кутии има бели и черни топки, като в първата има 2 бели и 3 черни, във втората – 1 бяла и 4 черни, в третата – 3 бели и 3 черни. Случайно е избрана кутия и от нея е извадена една топка. Каква е вероятността топката да е бяла?

25. В четири кутии има бели и черни топки, като в първата има 5 бели и 5 черни, във втората – 1 бяла и 2 черни, в третата – 2 бели и 5 черни и в четвъртата – 3 бели и 7 черни. Случайно се избира кутия и от нея една топка. Каква е вероятността тази топка да е черна?

26. Партида от детайли е произведена в три завода, като 20% от детайлите са произведени в първия завод, 30% – във втория и 50% – в третия завод. Вероятностите да бъде произведен дефектен детайл в първия, втория и третия завод са съответно $0{,}05$; $0{,}01$ и $0{,}06$. Каква е вероятността произволно избран детайл да бъде дефектен?

27. В кутия има 4 бели, 8 зелени и 2 червени топки. Изваждат се по случаен начин без връщане три топки. Каква е вероятността третата извадена топка да е бяла?

28. В плик има N бонбона – шоколадови и ментови, като шоколадовите са m. Деца последователно си вземат бонбони от плика. Кой има по-голяма вероятност да извади шоколадов бонбон: този, който взема първи или този, който взема втори?

1.2. Формула на Бейс

Нека Ω е множеството от елементарните събития при извършване на даден опит и нека A е събитие от Ω.

Нека H_1, H_2, ..., H_n образуват пълна група събития.

Теорема. (Формула на Бейс)

Ако $P(A) > 0$, то е в сила формулата

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k).P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i).P(A|H_i)} = \frac{P(H_k).P(A|H_k)}{P(A)} \text{ за } k = 1, 2, ..., n.$$

<u>Коментар</u>

При всяко $k = 1, 2, ..., n$ получаваме формула, тоест формулите са n на брой. Ще ги запишем при $n = 2$ и $n = 3$.

<u>$n = 2$</u>

$$k = 1,\ P(H_1|A) = \frac{P(H_1).P(A|H_1)}{P(H_1).P(A|H_1) + P(H_2).P(A|H_2)} = \frac{P(H_1).P(A|H_1)}{P(A)}.$$

$$k = 2,\ P(H_2|A) = \frac{P(H_2).P(A|H_2)}{P(H_1).P(A|H_1) + P(H_2).P(A|H_2)} = \frac{P(H_2).P(A|H_2)}{P(A)}.$$

<u>$n = 3$</u>

$k = 1$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1).P(A|H_1)}{P(H_1).P(A|H_1) + P(H_2).P(A|H_2) + P(H_3).P(A|H_3)} = \frac{P(H_1).P(A|H_1)}{P(A)}.$$

$k = 2$

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2).P(A|H_2)}{P(H_1).P(A|H_1) + P(H_2).P(A|H_2) + P(H_3).P(A|H_3)} = \frac{P(H_2).P(A|H_2)}{P(A)}.$$

$k = 3$

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3).P(A|H_3)}{P(H_1).P(A|H_1) + P(H_2).P(A|H_2) + P(H_3).P(A|H_3)} = \frac{P(H_3).P(A|H_3)}{P(A)}.\blacktriangle$$

Пример 1. В три кутии има бели и черни топки, като в първата има 7 бели и 6 черни, във втората има 8 бели и 2 черни, а в третата – 6 бели и 6 черни. От случайно избрана кутия е извадена една топка. Ако извадената топка е черна, каква е вероятността тя да е извадена от първата, втората и третата кутия?

Решение. Нека $A = \{$извадената топка е черна$\}$. За хипотеза избираме пълната група:

$H_1 = \{$избрана е първата кутия$\}$;

$H_2 = \{$избрана е втората кутия$\}$;

$H_3 = \{$избрана е третата кутия$\}$.

Кутия 1	Кутия 2	Кутия 3
7 бели	8 бели	6 бели
6 черни	2 черни	6 черни

Търсим вероятностите $P(H_1|A)$, $P(H_2|A)$ и $P(H_3|A)$.

Последователно намираме $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$.

$P(A|H_1)=\dfrac{6}{13}$, $P(A|H_2)=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$, $P(A|H_3)=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$.

Сега прилагаме формулата на Бейс.

$$P(H_1|A)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{13}}{\frac{1}{3}\left(\frac{6}{13}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{60}{151},\quad P(H_2|A)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{1}{3}\left(\frac{6}{13}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{52}{151},$$

$$P(H_3|A)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\left(\frac{6}{13}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{65}{151}.\blacktriangle$$

Коментар

Постановката на задачата е същата както при формулата за пълната вероятност – опитът се осъществява на два етапа и хипотезите изчерпват възможностите от първия етап. Събитието A е възможен изход от втория етап, като настъпването или не настъпването на A може да промени представата за настъпването на събитията H_i $i=1,2,3$ от пълната група.

Вероятностите $P(H_i|A)$ изразяват вероятностите на събитията от пълната група, но вече в зависимост от резултата на събитието A. Те се наричат **апостериорни**[2] вероятности.▲

1. В две кутии има бели и черни топки като в кутия 1 има 7 бели и 2 черни, а в кутия 2 – 7 бели и 5 черни. От случайно избрана кутия се изваждат последователно без връщане две топки. Ако са извадени две бели топки, каква е вероятността те да са извадени от първата кутия?

Пример 2. В кутия има 3 бели и 2 черни топки, а във втора кутия – 2 бели и 3 черни. От първата кутия е извадена една топка и е прехвърлена във втората, след което от втората кутия е извадена една бяла топка. Каква е вероятността прехвърлената топка да е черна?

Решение.

Коментар

Пълната група събития е свързана с прехвърлянето на топката от едната кутия в другата. В задачата се търси вероятността на събитие от пълната група в зависимост от резултата на опит (втората топка е бяла), т.е. търси се апостериорна вероятност, следователно ще използваме формулата на Бейс.

Избираме хипотезите: $H_1=\{$прехвърлената топка е бяла$\}$ и $H_2=\{$прехвърлената топка е черна$\}$ и нека $A=\{$втората извадена топка е бяла$\}$.

Последователно намираме $P(H_1)=\dfrac{3}{5}$, $P(H_2)=\dfrac{2}{5}$, $P(A|H_1)=\dfrac{3}{6}$ и $P(A|H_2)=\dfrac{2}{6}$.

Прилагаме формулата на Бейс и получаваме $P(H_2|A)=\dfrac{\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{6}}=\dfrac{4}{13}$.▲

2. В кутия има 3 бели, 5 зелени и 4 червени топки. Последователно без връщане по случаен начин са извадени три топки. Каква е вероятността първата топка да е бяла, ако втората и третата са червени?

3. В три кутии има бели и черни топки, като в първата има 11 бели и 8 черни топки, във втората – 12 бели и 9 черни, а в третата – 11 бели и 9 черни. От случайно избрана кутия се изваждат две

[2] a posteriori – който почива върху опита

топки без да се връщат. Ако топките са разноцветни, каква е вероятността да са извадени от втората кутия? Отговорът да се закръгли до стотните.

4. В три кутии има бели и черни топки, като в първата има 17 бели и 6 черни, във втората – 12 бели и 7 черни, а в третата – 11 бели и 11 черни топки. От случайно избрана кутия са извадени последователно 3 топки без връщане. Да се намери вероятността топките да са извадени от третата кутия, ако и трите са бели. Отговорът да се закръгли до стотните.

5. В две кутии има бели и черни топки, като в първата има 5 бели и 3 черни, а във втората – 8 бели и 5 черни топки. От първата кутия е извадена една топка и е прехвърлена във втората кутия, след което от втората кутия е извадена една черна топка. Да се намери вероятността прехвърлената топка да е черна.

6. На три щанда в магазин са поставени портокали и мандарини, пакетирани по 1 kg: На първия щанд има 8 kg плодове, на втория – 6 kg, а на третия – 4 kg плодове, като портокалите и мандарините на всеки щанд са по равни количества. Гражданин, без да забележи, че плодовете са два вида, взел случайно един пакет от случайно избран щанд. Ако е купил 1 kg портокали, каква е вероятността да са от втория щанд?

7. Производството на машинна част е разпределено в три завода, като те произвеждат 20%, 30% и 50% от необходимите количества съответно с брак 5%, 4% и 2%. Ако случайно избрана част е дефектна, намерете вероятността да е била произведена от първия, от втория и от третия завод.

8. Едно дете има в левия си джоб 3 розови и 1 ментов бонбон, а в десния – 2 розови и 2 ментови бонбона. То изважда от случайно избран джоб два случайно избрани бонбона, които се оказват различни. Каква е вероятността бонбоните да са извадени от десния джоб?

9. Всеки от учениците от едно училище се записва за посещение или на театър, или на концерт. Вероятността ученик да се запише за посещение на театър е $0{,}3$, а за посещение на концерт – $0{,}7$. Вероятността театърът да се проведе е $0{,}9$, а концертът – $0{,}8$. Произволно избран ученик е посетил мероприятието, за което се е записал. Каква е вероятността той да е посетил:

а) театър;

б) концерт?

10. В една детска градина 20% от децата са в 1 група, 35% са във 2 група и 45% – в 3 група. Обичайно процентът на отсъстващите за деня деца от 1 група е 10%, от 2 група – 8%, от 3 група – 5%. Каква е вероятността произволно избрано дете от списъка на всички деца да отсъства днес?

11. В една кутия има 4 бели и 3 черни топки, а в друга – 3 бели и 5 черни. От първата кутия е прехвърлена една топка във втората, след което от втората са извадени две едноцветни топки. Каква е вероятността прехвърлената топка да е бяла?

12. Разполагаме с 13 кутии: $Y_1, Y_2, ..., Y_{13}$, при което Y_k съдържа k бели и $13-k$ черни топки, $k = 1, 2, ..., 13$. Избира се кутия с вероятност, пропорционална на броя на съдържащите се в нея бели топки. От тази кутия по случаен начин се изваждат 2 топки, които се оказват с различен цвят. На коя от кутиите е най-голяма вероятността да са принадлежали тези две топки?

2. Случайна величина

2.1. Разпределение на дискретна крайна случайна величина. Примери на разпределения. Функция на разпределение

1) Случайна величина

Пример 1. Хвърля се монета. Събитията A_1={пада се лице} и A_2={пада се гръб} образуват пълна група събития.

Да разгледаме функцията, дефинирана в Ω и приемаща реални стойности, за която:

на A_1 от Ω съпоставяме числото 0;

на A_2 от Ω съпоставяме числото 1.

Функцията приема стойности 0 и 1 по случаен начин, защото при хвърлянето на монетата не знаем какво точно ще се падне – лице или гръб. Не знаем коя стойност ще приеме, но искаме да знаем вероятността, с която функцията ще приеме стойност 0 или 1.

В нашия пример $P(A_1)=\dfrac{1}{2}$ и $P(A_2)=\dfrac{1}{2}$ са вероятностите, с които функцията приема стойност 0 или 1.

Така разгледаната функция, която е дефинира в Ω и приема реални стойности, с вероятности $P(A_1)$ и $P(A_2)$ се нарича случайна величина.▲

По-точно ще дадем следното определение:

Определение. Нека $A_1, A_2, ..., A_n$ образуват пълна група от събития в Ω. Функция X, която на всяко събитие A_i съпоставя числото x_i, $i=1,...,n$ и вероятностите функцията да приеме тези стойности са съответно $P(A_1)=p_1$, $P(A_2)=p_2, ..., P(A_n)=p_n$, се нарича **дискретна случайна величина**.

Обикновено ще казваме само случайна величина.

Тъй като $A_1, A_2, ..., A_n$ образуват пълна група събития, то $p_1+p_2+...+p_n=1$.

Случайните величини означаваме с големите латински букви X, Y, ..., като аргументите A_i, $i=1,2,...,n$ обикновено не се пишат, но трябва да се подразбират.

Нека X е случайна величина: $\Omega \to \mathbb{R}$, т.е. X : $A_i \in \Omega \to x_i \in \mathbb{R}$ и $P(A_i)=p_i$, $i=1,2,...,n$.

Записваме $P(X=x_i)=p_i$ и четем: Вероятността X да приеме стойност x_i е равна на p_i.

Определение. Съответствието между стойностите на X и вероятностите, с които X приема тези стойности, се нарича **закон за разпределение** (вероятностно разпределение или разпределение) на случайната величина X.

Нека $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$. Таблицата

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

се нарича **таблица на разпределение** на X.

Коментар

1) В първия ред на таблицата се записват стойностите, които приема X, а във втория – вероятностите, с които X приема тези стойности.

2) Обърнете внимание: $x_1, x_2, ..., x_n$ са стойности, а не аргументи на X.▲

Пример 2. В кутия има 4 бели и 3 черни топки. По случаен начин се изваждат 2 топки. Събитията: $A_0 = \{$извадени са 0 бели топки$\}$, $A_1 = \{$извадена е 1 бяла топка$\}$ и $A_2 = \{$извадени са 2 бели топки$\}$ образуват пълна група от събития.

Нека X е случайната величина, която е равна на броя на извадените бели топки. Това означава, че:

на събитието A_0 случайната величина X съпоставя числото 0;

на събитието A_1 случайната величина X съпоставя числото 1;

на събитието A_2 случайната величина X съпоставя числото 2,

т.е. стойностите на X са числата 0, 1 и 2.

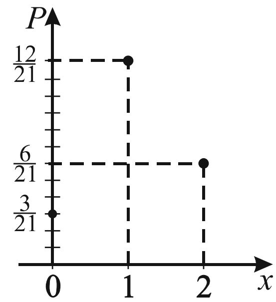
Да пресметнем вероятностите, с които X приема тези стойности.

$$P(X=0) = P(A_0) = \frac{C_4^0 C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21}, \qquad P(X=1) = P(A_1) = \frac{C_4^1 C_3^1}{C_7^2} = \frac{12}{21},$$

$$P(X=2) = P(A_2) = \frac{C_4^2 C_3^0}{C_7^2} = \frac{6}{21}.$$

Законът за разпределението на X, записан таблично, е:

X	0	1	2
P	$\frac{3}{21}$	$\frac{12}{21}$	$\frac{6}{21}$



Графично законът за разпределението е показан на чертежа.▲

Обърнете внимание. По абсцисната ос се нанасят **стойностите** на X. Аргументите на X са събития. Те не се нанасят на графиката. По ординатната ос се нанасят **вероятностите** на тези събития.▲

1. В кутия има 5 бели и 3 черни топки. Извадени са 3 топки. Случайната величина X е броят на извадените бели топки. Да се намери законът за разпределение на X. Да се попълни таблица на разпределение и да се начертае диаграма.

2. В кутия има 4 бели и 4 черни топки. Извадени са 3 топки. Случайната величина X е броят на извадените бели топки. Да се намери законът за разпределение на X.

2) Функция на разпределение

Определение. Нека X е случайна величина. Функцията $F(x) = P(X < x)$, $x \in (-\infty, \infty)$ се нарича **функция на разпределение** на случайната величина X.

Коментар

1) $F(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Аргументът x на $F(x)$ лежи на оста Ox, където нанасяме стойностите на случайната величина X.

2) Ако X е дискретна (крайна) тя има краен брой стойности, които нанасяме по Ox, но $F(x)$ е дефинирана за всяко $x \in \mathbb{R}$, т.е. за всяко x върху Ox.

3) Означението $F(x)=P(X<x)$ четем: Стойността на F в точката x е равна на вероятността X да приеме стойности по-малки от x.▲

Пример 3. Нека X е случайната величина от пример 2, чиято таблица на разпределение е

X	0	1	2
P	$\frac{3}{21}$	$\frac{12}{21}$	$\frac{6}{21}$

X приема точно три стойности – 0, 1 и 2. Да пресметнем някои от стойностите на $F(x)$:

– $F(0)=P(X<0)$, $F(0)$ е вероятността X да приеме стойности по-малки от 0. Но X не приема стойности по-малки от 0 $\Rightarrow$ $P(X<0)=0$ $\Rightarrow$ $F(0)=P(X<0)=0$.

По същия начин можем да получим, че ако $x<0$, то $F(x)=P(X<x<0)=0$.

Следователно за $x\in(-\infty,0]$ $F(x)=0$.

– $F(1)=P(X<1)$, $F(1)$ е вероятността X да приеме стойности по-малки от 1. Единствената стойност, по-малка от 1, която приема X, е 0 и $P(X=0)=\frac{3}{21}$

$\Rightarrow$ $F(1)=P(X<1)=\frac{3}{21}$.

По същия начин, ако $x\in(0,1)$, то $F(x)=P(X<x<1)=\frac{3}{21}$.

Следователно за $x\in(0,1]$ $F(x)=\frac{3}{21}$.

– $F(2)=P(X<2)$. Стойностите, по-малки от 2, които приема X са 0 и 1.

Тъй като събитието $\{X<2\}=\{X=0\}\cup\{X=1\}$ е сума на две независими събития, то

$P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{3}{21}+\frac{12}{21}=\frac{15}{21}$ и

$F(2)=P(X<2)=\frac{15}{21}$.

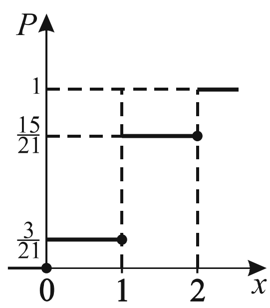
Както и по-горе може да се покаже, че за $x\in(1,2]$ $F(x)=P(X<2)=\frac{15}{21}$.

– Нека сега $x\in(2,+\infty)$.

$F(x)=P(X<x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$.

Да обобщим получените резултати:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0\\ \frac{3}{21}, & \text{при } 0<x\le 1\\ \frac{3}{21}+\frac{12}{21}=\frac{15}{21}, & \text{при } 1<x\le 2\\ \frac{3}{21}+\frac{12}{21}+\frac{6}{21}=1, & \text{при } 2<x\end{cases}$$



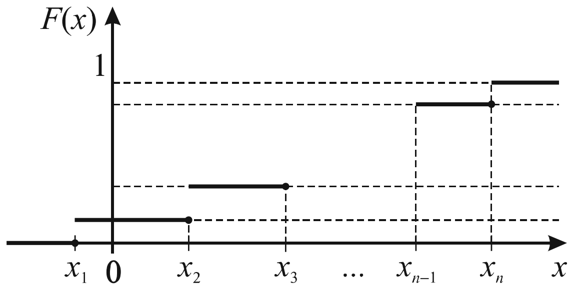
Графиката на $F(x)$ е показана на чертежа.▲

Аналогично на разглеждания пример може да се покаже, че функцията на разпределение на произволна случайна величина X с таблично разпределение,

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

има вида:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x \le x_1 \\ p_1, & \text{при } x_1 < x \le x_2 \\ p_1+p_2, & \text{при } x_2 < x \le x_3 \\ p_1+p_2+p_3, & \text{при } x_3 < x \le x_4 \\ \dots \\ p_1+p_2+p_3+\dots+p_{n-1}, & \text{при } x_{n-1} < x \le x_n \\ p_1+p_2+p_3+\dots+p_n=1, & \text{при } x_n < x \end{cases}$$



Графиката ѝ е стъпаловидна и е показана на чертежа.

От графиката са видни основните свойства на функцията на разпределение $F(x)$:

1) $0 \le F(x) \le 1$.
2) $F(x)$ е ненамаляваща функция в $(-\infty, +\infty)$.
3) $F(x)$ е непрекъсната отляво за всяко x.
4) $F(x)$ има n точки на прекъсване.

3. Хвърля се зар. Нека X е случайна величина, която е равна на утроения брой точки от горната страна на зара. Да се намери:

а) законът за разпределение на X;

б) функцията на разпределение на X и да се начертае графиката ѝ.

4. Нека m е броят на точките върху горната стена на правилен зар, а n е броят на точките върху долната стена на зара. Намерете разпределението и функцията на разпределение на случайната величина X, която на всеки елементарен изход съпоставя числото mn. (Сборът от точките на две срещуположни стени на правилен зар е 7).

5. В две кутии има бели и черни топки. В първата има 3 бели и 2 черни, а във втората – 4 бели и 3 черни. От първата кутия е извадена 1 топка, а от втората са извадени 2 топки. Случайната величина X е броят на извадените бели топки. Да се намери законът за разпределение и функцията на разпределение на X.

6. В две кутии има бели и черни топки. В първата има 7 бели и 5 черни, а във втората – 3 бели и 9 черни. Извадена е по една топка от всяка кутия. Случайната величина X е броят на извадените бели топки. Да се намери законът за разпределение и функцията на разпределение на X.

7. Хвърлят се два зара. Да се намери законът за разпределение на случайната величина, чиито стойности са сборът от точките на горните стени на заровете.

8. Хвърлят се два зара. Нека X е случайната величина, която приема стойност 0, 1 или 2, ако съответно сборът от точките от горните стени на заровете е число, което се дели на 3, дава остатък 1 при делене на 3 или дава остатък 2 при делене на 3. Да се намери разпределението и функцията на разпределение на X.

9. Хвърлят се два зара. Случайната величина X приема стойност 0, ако сборът от точките на заровете е по-малък от 7, приема стойност 1, ако сборът от точките е 7 и приема стойност 2, ако сборът от точките е по-голям от 7. Да се намери законът за разпределение и функцията на разпределение X.

10. Хвърлят се два зара. Случайната величина X приема стойност 0, ако точките на двата зара са еднакви, стойност 1, ако точките на заровете са различни нечетни числа, стойност 2, ако точките на двата зара са различни четни числа и стойност 3 в останалите случаи. Да се намери законът за разпределение и функцията на разпределение на X.

2.2. Математическо очакване (средна стойност), определение и свойства.

Нека X е случайна величина с таблица на разпределение

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Определение. Математическо очакване (средна стойност) на случайната величина X се нарича числото $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Пример 1. Нека X има разпределението

X	x_1	x_2	...	x_n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

Тогава $EX = x_1 \frac{1}{n} + x_2 \frac{1}{n} + ... + x_n \frac{1}{n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$, тоест математическото очакване е средноаритметичното от стойностите на случайната величина. ▲

Пример 2. Нека X има k различни стойности $x_1, x_2, ..., x_k$ и приема всяка от тях съответно с честоти $f_1, f_2, ..., f_k$ и $f_1 + f_2 + ... + f_k = n$.

Нека $P(X = x_i)$ са изчислени по формулата за класическа вероятност, т.е. $P_i = \frac{f_i}{n}$, $i = 1, 2, ..., n$.

Тогава

$EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_k p_k = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_k f_k}{n}$, т.е. математическото очакване е средното аритметично с тегла от стойностите на X (средна претеглена стойност).▲

Пример 1 и пример 2 дават интерпретация на математическото очакване – то трябва да се възприема като средна претеглена стойност от стойностите на случайната величина.

1. Да се намери математическото очакване на случайната величина, зададена с таблицата

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Решение. $EX = 0.\frac{1}{32} + 1.\frac{5}{32} + 2.\frac{10}{32} + 3.\frac{10}{32} + 4.\frac{5}{32} + 5.\frac{1}{32} = \frac{80}{32} = 2{,}5$.▲

2. Да се намери математическото очакване на случайната величина, зададена с таблицата:

а)

X	1	3	5	7	9	11	13
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

б)

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

в)

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

г)

X	1	2	3
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

Свойства на математическото очакване.

1) Ако X приема само една стойност c с вероятност 1, то $EX = c$.

2) Ако λ е число, то $E(\lambda X) = \lambda EX$.

3) $E(X+Y) = EX + EY$.

2.3. Дисперсия и стандартно отклонение на случайна величина

Нека случайната величина X е зададена с таблицата

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Да означим математическото очакване (средната стойност) $EX = m$. Тогава таблицата

$X-m$	x_1-m	x_2-m	...	x_n-m
P	p_1	p_2	...	p_n

задава нова случайна величина $X-m$. Нейните стойности са разлика между стойностите на X и средната стойност на X (тук означена с m).

Стойностите на $X-m$ показват отклонението на стойностите на X от нейната средна стойност $EX = m$. Тъй като някои разлики са отрицателни числа, то е по-удобно да разглеждаме случайната величина, чиито стойности са квадратите на стойностите на $X-m$, тоест случайната величина, зададена с таблицата

$(X-m)^2$	$(x_1-m)^2$	$(x_2-m)^2$	...	$(x_n-m)^2$
P	p_1	p_2	...	p_n

Определение. Математическото очакване на случайната величина $(X-m)^2$ се нарича **дисперсия[1] на X**. Означава се с DX.

От определението следва, че дисперсията е число. То може да бъде записано така: $DX = E(X-m)^2$ или $DX = E(X-EX)^2$.

Определение. Числото $\sigma = \sqrt{DX}$ се нарича **стандартно отклонение** на X.

Ще изведем още една формула за дисперсията DX.

Преди това ще въведем означението $EX^2 = E(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + ... + x_n^2 p_n$.

Твърдение. Да се докаже, че $DX = EX^2 - (EX)^2$, т.е. $DX = EX^2 - m^2$.

Доказателство.

По определение $DX = (x_1-m)^2 p_1 + ... + (x_n-m)^2 p_n$. В израза вдясно участват само числа и можем да извършим действията:

$$DX = x_1^2 p_1 - 2x_1 m p_1 + m^2 p_1 + ... + x_n^2 p_n - 2x_n m p_n + m^2 p_n =$$

$$= x_1^2 p_1 + ... + x_n^2 p_n - 2m(\underbrace{x_1 p_1 + ... + x_n p_n}_{EX=m}) + m^2(\underbrace{p_1 + ... + p_n}_{1}) = EX^2 - 2m.m + m^2.1 =$$

$$= EX^2 - m^2 = EX^2 - (EX)^2 . \blacktriangle$$

1. Да се намерят дисперсията и стандартното отклонение на случайната величина с разпределение

X	10	11	12	13	14	15
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

[1] дисперсия – разсейване

Решение. Попълваме работна таблица.

x_i	p_i	$x_i p_i$	x_i^2	$x_i^2 p_i$
10	$\frac{1}{32}$	$\frac{10}{32}$	100	$\frac{100}{32}$
11	$\frac{5}{32}$	$\frac{55}{32}$	121	$\frac{605}{32}$
12	$\frac{10}{32}$	$\frac{120}{32}$	144	$\frac{1440}{32}$
13	$\frac{10}{32}$	$\frac{130}{32}$	169	$\frac{1690}{32}$
14	$\frac{5}{32}$	$\frac{70}{32}$	196	$\frac{980}{32}$
15	$\frac{1}{32}$	$\frac{15}{32}$	225	$\frac{225}{32}$
Общо:		12,5	Общо:	157,5

$DX = EX^2 - (EX)^2 = 157,5 - (12,5)^2 = 1,25$.

$\sigma = \sqrt{DX} = \sqrt{1,25}$.▲

2. Да се намерят дисперсията и стандартното отклонение на случайната величина с разпределение

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Решение. Решението ще извършим без работна таблица.

$EX = 0.\frac{1}{16} + 1.\frac{4}{16} + 2.\frac{6}{16} + 3.\frac{4}{16} + 4.\frac{1}{16} = 2$.

$EX^2 = 0.\frac{1}{16} + 1.\frac{4}{16} + 4.\frac{6}{16} + 9.\frac{4}{16} + 16.\frac{1}{16} = 5$.

$DX = EX^2 - (EX)^2 = 5 - 2^2 = 1$, $\sigma = \sqrt{1} = 1$.▲

3. Да се намерят дисперсията и стандартното отклонение на случайната величина с разпределение:

а)

X	3	6	9	12	15	18
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

б)

X	6	10	12
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

в)

X	5	6	7	8	9
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

г)

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{7}$

д)

X	1	3	5	7	9
P	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{6}{11}$

е)

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{21}$

3. Биномно разпределение

3.1. Биномно разпределение. Примери на реални ситуации

1) Схема на Бернули – преговор

Провеждат се n независими опита. Изходите от всеки опит са точно два – успех и неуспех.

Всеки от изходите настъпва с постоянна вероятност – успех с вероятност p и неуспех с вероятност $q=1-p$.

Тази схема на провеждане на опити се нарича схема на Бернули (n, p).

Вероятност за k успеха в схема на Бернули (n,p) означаваме с $P_n(k)$ и се дава с формулата на Бернули:

$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, $k=0,1,...,n$.

$P_n(k)$ се наричат и **биномни вероятности**.

Примери за схема на Бернули

– Извадка с връщане. Имаме кутия с бели и черни топки. Изваждаме последователно с връщане n топки, като всеки път записваме цвета на извадената топка. Изходите от всеки опит са два – извадената топка е бяла и извадената топка е черна. Нека вероятността да се извади една бяла топка е p. Вероятността p е постоянна, защото извадката е с връщане.

Тогава изваждането на n топки с връщане е схема на Бернули (n,p) със събитие успех = {извадената топка е бяла} и неуспех = {извадената топка е черна} съответно с вероятности p и $q=1-p$.

Вероятността сред извадените n топки точно k да са бели е $P_n(k)$.

– Хвърляне на монета n пъти с два изхода – лице и герб – всеки с вероятност $\frac{1}{2}$, е схема на Бернули $(n,\frac{1}{2})$. Вероятността при n хвърляния точно k пъти да се падне лице е $P_n(k)$.

– Провеждането на n опита за достигане на някаква цел с два изхода – достигната с вероятност p и недостигната с вероятност $q=1-p$, е схема на Бернули (n,p). Вероятността при n опита точно k пъти да се достигне целта е $P_n(k)$.▲

1. Монета се хвърля 5 пъти. Каква е вероятността да се паднат три лица?

Решение. Провеждат се 5 опита. Изходите от всеки опит са два. Изходът лице (да го наречем успех) е с постоянна вероятност $\frac{1}{2}$, следователно опитите се провеждат по схема на Бернули $(5,\frac{1}{2})$. Вероятността за 3 успеха (3 лица) е: $P_5(3)=C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5!}{3!2!2^5}=\frac{5}{16}$.▲

2. В кутия има 5 бели и 1 черна топка. Изважда се една топка, записва се цветът ѝ и се връща обратно. Направени са 4 опита. Каква е вероятността 3 пъти да е извадена:

а) черна топка; б) бяла топка?

Решение. Провеждат се 4 опита. Изходите от всеки опит са два – да се извади бяла топка или да се извади черна топка. Вероятността за изваждане на черна топка е $\frac{1}{6}$, а за изваждане на бяла топка е $\frac{5}{6}$, като и двете вероятности са постоянни при всеки опит, защото извадката е с връщане.

а) Успехът в този случай е да се извади черна топка. Следователно имаме схема на Бернули $(4,\frac{1}{6})$. Вероятността за 3 успеха (3 пъти черна топка) е $P_4(3)=C_4^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{4!5}{3!1!6^4}=\frac{5}{324}$.

б) Успехът в този случай е да се извади бяла топка. Следователно имаме схема на Бернули $(4,\frac{5}{6})$. Вероятността за 3 успеха (3 пъти бяла топка) е $P_4(3)=C_4^3\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^1=\frac{4!5^3}{3!1!6^4}=\frac{125}{324}$ ▲

3. В партида от стъклени чаши вероятността една чаша да е дефектна е $0{,}01$. По случаен начин са извадени 4 чаши. Каква е вероятността да са извадени:

а) 2 дефектни чаши; б) 3 недефектни чаши; в) 4 недефектни чаши?

2) Биномно разпределение

Нека $n\geq 1$ е цяло число, $p\in[0,1]$ и $q=1-p$.

Определение. Случайната величина X има **биномно разпределение с параметри n и p**, ако приема стойностите $0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n$ съответно с вероятности

$$p_k=P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}\ ,\ k=0,1,...,n\,.$$

Означаваме $X\in Bi(n,p)$.

Таблицата на разпределение на случайна величина с биномно разпределение с параметри n и p е

X	0	1	...	n
P	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^n p^n q^0$

Коментар

X приема стойност 0, ако броят на успехите в n опита е 0.

X приема стойност 1, ако броят на успехите в n опита е 1.

X приема стойност 2, ако броят на успехите в n опита е 2.

...

X приема стойност n, ако броят на успехите в n опита е n.

Вероятностите, с които X приема стойностите си, са биномните вероятности.▲

4. В кутия има 5 бели и 3 черни топки. Последователно и с връщане се изваждат три. Ако X е случайната величина, която е равна на броя на извадените бели топки, да се намери разпределението на X.

Решение. Направени са 3 опита. Изходите от всеки опит са два. Вероятността да се извади една бяла топка е $\frac{5}{8}$, която е постоянна, защото извадката е с връщане. Тогава опитите се провеждат по схема на Бернули $(3,\frac{5}{8})$. Следователно вероятностите, с които X приема стойностите си са биномните вероятности, което означава, че $X\in Bi(3,\frac{5}{8})$.

Изчисляваме биномните вероятности.

$P_3(0)=C_3^0\left(\frac{5}{8}\right)^0\left(\frac{3}{8}\right)^3=\frac{27}{512}$, $P_3(1)=C_3^1\left(\frac{5}{8}\right)^1\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{135}{512}$,

$P_3(2)=C_3^2\left(\frac{5}{8}\right)^2\left(\frac{3}{8}\right)^1=\frac{225}{512}$, $P_3(3)=C_3^3\left(\frac{5}{8}\right)^3\left(\frac{3}{8}\right)^0=\frac{125}{512}$.

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{512}$	$\frac{135}{512}$	$\frac{225}{512}$	$\frac{125}{512}$

Попълваме таблица на разпределение.▲

От казаното дотук е ясно, че е вярно твърдението:

Твърдение. Провеждат се опити по схема на Бернули (n, p). Случайната величина X, която е равна на броя на успехите в схема на Бернули (n, p), има биномно разпределение, $X \in Bi(n,p)$.

5. Сред моливите на ученик има счупени и здрави. Той може да избере счупен молив с вероятност $\frac{1}{5}$. Намерете разпределението на случайната величина X, изразяваща броя на счупените моливи сред 4 случайно избрани с връщане.

6. Монета е хвърлена 4 пъти. Да се намери разпределението на случайната величина X, равна на броя на падналите се гербове.

3.2. Свойства на биномното разпределение

1) Математическо очакване и дисперсия

Теорема. Ако случайната величина X има биномно разпределение с параметри n и p, то

$$EX=np,\ DX=npq,\ \sigma=\sqrt{npq}.$$

1. Установено е, че вероятността за авария през един ден в един завод е $0{,}04$. Да се намери математическото очакване за авария и стандартното отклонение за 200 дни.

Решение. Вероятността за авария през един ден е постоянно число $p=0{,}04$. Наблюдението за авария през 200 дни може да се разглежда като схема на Бернули (200; $0{,}04$). Тогава случайната величина, която е равна на броя на авариите има биномно разпределение $Bi(200;0{,}04)$. Математическото очакване за авария е:

$EX=np=200.0{,}04=8$.

Стандартното отклонение е $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{200.0{,}04(1-0{,}04)}=16\sqrt{0{,}03}\approx 2{,}8$.▲

2. Намерете математическото очакване, дисперсията и стандартното отклонение на случайната величина X, ако:

а) $X\in Bi(200;0{,}01)$; б) $X\in Bi(5,\frac{2}{3})$;

в) $X\in Bi(4,\frac{4}{7})$; г) $X\in Bi(500;0{,}02)$.

2) Най-вероятна стойност на биномно разпределение

Да разгледаме биномните вероятности. Те имат различни стойности при различни n и p, но се забелязва една обща тенденция: първоначално нарастват, след което намаляват. Интерес представлява най-голямата стойност на биномните вероятности, тъй като тя показва, че съответната стойност на случайната величина се сбъдва с най-голяма вероятност.

Твърдение. Най-голямата стойност $P_n(m)$ на биномните вероятности се получава при:

– $m=[(n+1)p]$, ако $(n+1)p$ не е цяло;

– $m_1=(n+1)p$ и $m_2=(n+1)p-1$, ако $(n+1)p$ е цяло.

Забележка. С $[(n+1)p]$ се означава цялата част на числото $(n+1)p$.

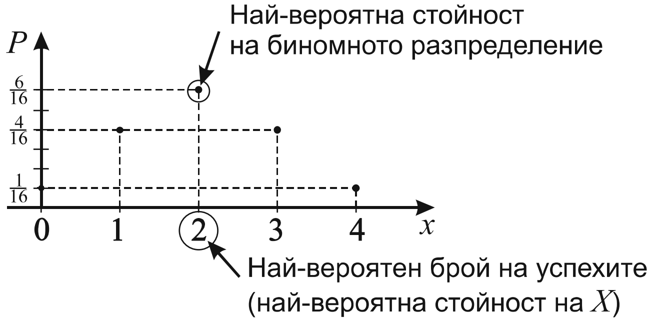
Числото m се нарича **най-вероятен брой на успехите**, а $P_n(m)$ е **най-вероятна стойност на биномното разпределение**.

Коментар

Тъй като $m=[(n+1)p]=[np+p]$ и $0\le p\le 1$, то най-вероятният брой m на успехите се колебае около числото np, което е средната стойност (математическото очакване) на биномно разпределената случайна величина.▲

Пример. Нека $X\in Bi(4,\frac{1}{2})$.

$m=[(n+1)p]=\left[5.\frac{1}{2}\right]=[2,5]=2$.▲



3. При провеждане на опити по схема на Бернули вероятността за успех на събитието A е $\frac{2}{5}$.

Намерете най-вероятния брой на успехите на A и вероятността, с която се получава, ако броят на опитите е:

а) 4; б) 7.

Решение. а) Имаме $Bi(4,\frac{2}{5})$. Числото $(n+1)p=(4+1)\frac{2}{5}=2$ е цяло, следователно има две стойности за най-вероятния брой m на успехите на A:

$m_1=(n+1)p=2$ и $m_2=(n+1)p-1=1$.

Вероятността за $m_1=2$ успеха на A е $P_4(2)=C_4^2\frac{2^2}{5^2}.\frac{3^2}{5^2}=\frac{216}{625}$ и

вероятността за $m_2=1$ успеха на A е $P_4(1)=C_4^1\frac{2^1}{5^1}.\frac{3^3}{5^3}=\frac{216}{625}$.▲

Решение. б) Имаме $Bi(7,\frac{2}{5})$. Числото $(n+1)p$ не е цяло $\Rightarrow$ най-вероятният брой на успехите на A е $m=[(n+1)p]=[3,2]=3$. Вероятността да се случи този брой успехи е $P_7(3)=C_7^3\frac{2^3}{5^3}.\frac{3^4}{5^4}$.▲

4. Оператор прави измерване на уред на площадка към производствен цех. При всяко измерване вероятността за грешка е $\frac{1}{5}$. Да се намери най-вероятният брой грешки при 16 измервания.

5. При транспорт на бяла техника вероятността за транспортен дефект на един уред е $0{,}03$. Колко е най-вероятният брой на уредите с транспортен дефект при превоз на 120 уреда?

6. Вероятността уред да прекъсне работа през един ден е $0{,}02$. Да се намери най-вероятният брой прекъсвания на уреда за 20 дни.

7. Десет работници независимо един от друг извършват еднотипна работа. Всеки от тях включва източник на енергия средно 12 минути в час. Какъв е най-вероятният брой на работниците, които в продължение на 1 час включват източник на енергия?

Решение. Вероятността един работник да включи източник на енергия през 1 час е постоянно число, равно на $\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$. Тъй като работниците работят независимо един от друг, то включването на източник на енергия от 10 работници може да се разглежда като 10 бернулиеви опита. Тогава получаваме биномно разпределение $Bi(10,\frac{1}{5})$, което показва броя на включените източници на енергия за 1 час. Най-вероятният им брой е $m=[(n+1)p]=\left[11.\frac{1}{5}\right]=[2{,}2]=2 \quad \Rightarrow \quad m=2$. Това е най-вероятният брой работници, които в продължение на 1 час включват източник на енергия.▲

8. В опитна станция по растениевъдство се преброяват житните зърна в един клас. Установено е, че вероятността за грешка е $0{,}05$. На колко житни класа трябва да се преброят зърната, така че най-вероятният брой грешно преброени класове да е 10?

3) Закон за големите числа

Провеждат се n опита по схемата на Бернули с вероятност за успех p. Нека k е броят на успехите в опита.

Ако $p=\frac{1}{2}$, естествено е да очакваме, че при големи n броят k ще бъде приблизително $\frac{1}{2}$ от всички опити, т.е. относителната честота $\frac{k}{n}=\frac{1}{2}=p$.

Ако $p=\frac{1}{3}$, можем да очакваме, че при големи n броят k ще бъде $\frac{1}{3}$ от всички опити или че относителната честота $\frac{k}{n}=\frac{1}{3}=p$, т.е. нашите очаквания са, че при големи n относителната честота $\frac{k}{n}$ е близо до вероятността p.

Всъщност, вярна е следната теорема, известна като закон за големите числа

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1 .$$

Това равенство означава, че вероятността относителната честота $\frac{k}{n}$ да бъде произволно близка до p е 1.

<u>Коментар</u>

При големи n относителната честота проявява „устойчивост” и клони към предварително известната вероятност p.▲

4. Нормално разпределение

4.1. Стандартно нормално разпределение като приближение на биномното. Плътност на непрекъснато разпределение

Стойностите на една дискретна случайна величина са краен брой, поради което е възможно да изчислим вероятностите, с които случайната величина приема всяка една стойност.

При непрекъснатите случайни величини това не е възможно, тъй като приемат безброй стойности. Ето защо вероятностите се задават с функция, която се нарича **плътност на разпределението** (или само **плътност**).

Определение. Непрекъснатата случайна величина X има **нормално (гаусово) разпределение** с параметри $a \in (-\infty, \infty)$ и $\sigma^2 > 0$, ако плътността ѝ на разпределение е функцията $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ при $x \in (-\infty, \infty)$.

Означаваме $X \in N(a, \sigma^2)$.

Коментар

Интересно е да отбележим, че във функцията на плътността участват известните числа π и e.▲

Твърдение. Ако $X \in N(a, \sigma^2)$, то $EX = a$ и $DX = \sigma^2$.

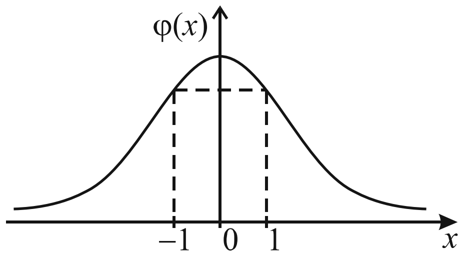
Определение. Случайна величина има **стандартно нормално (гаусово) разпределение**, ако принадлежи на класа $N(0,1)$. Тогава плътността ѝ е $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Ние вече сме се запознали с тази функция в часовете по анализ. Да преговорим нейните свойства:

– $\varphi(x)$ расте в $(-\infty, 0)$ и намалява в $(0, +\infty)$;

– $\max\limits_{(-\infty,\infty)} \varphi(x) = \varphi_{\max}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$;

– $\varphi(x)$ има две инфлексни точки в -1 и 1, в които преминава съответно от изпъкнала във вдлъбната и от вдлъбната в изпъкнала;



– $\varphi(x)$ има хоризонтална асимптота $y = 0$;

– графиката на $\varphi(x)$ е показана на чертежа. Нарича се **нормална крива**.

Графиката има камбановидна форма, изцяло над абсцисната ос и е симетрична относно правата $x = 0$.

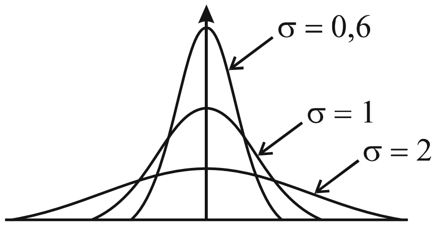
– Може да се докаже, че площта под графиката на нормалната крива и над абсцисната ос е 1.

В общия случай графиката на плътността на случайна величина с разпределение $N(a, \sigma^2)$ също се нарича нормална крива и има същата форма.

Параметрите a и σ^2 определят съответно положението на максимума и неговата големина, както и инфлексните точки $a-\sigma$ и $a+\sigma$. При това колкото σ^2 е по-малко, толкова максимумът е по-голям и кривата е по-събрана около средната a.

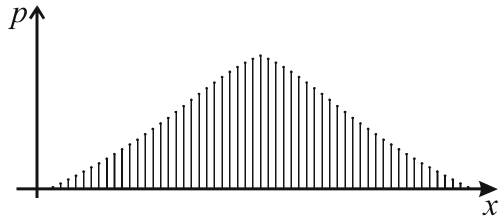
Площта под нормалната крива и над абсцисната ос е 1. Правата $x=a$ разделя тази площ на две части по $0{,}5$.

На чертежа са показани три нормални криви при различни стойности на σ. Площта под всяка от тях е 1.



Ако $Y \in Bi(n,p)$, то при големи n Y се апроксимира (приближава) с нормално разпределена случайна величина, за която $a = np = EY$ и $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{DY}$.

На чертежа е показана диаграма на биномно разпределение при n=55. Вижда се, че формата е близка до нормалната крива.



4.2. Функция на разпределение и вероятност на интервал

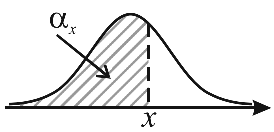
1) Функция на разпределение

Нека X е случайна величина с нормално разпределение $N(a,\sigma^2)$ и

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in (-\infty,\infty)$ е функцията на плътността ѝ.

Забележка. За фигурата, която е под нормалната крива и над абсцисната ос в интервала (a,b), ще казваме, че е фигура под нормалната крива в интервала (a,b) (който може да бъде и безкраен). За площта (лицето) на такава фигура ще казваме, че е площта под нормалната крива в интервала (a,b) или само – площ в интервала (a,b).

Нека $x \in (-\infty,\infty)$ и да означим с α_x лицето (площта) под нормалната крива в интервала $(-\infty,x)$. Функцията $F(x)=\alpha_x$ се нарича **функция на разпределение** на случайната величина X.

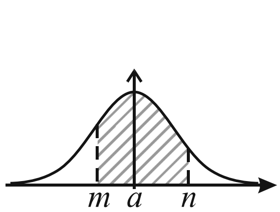


Може да се докаже, че стойността на $F(x)$ е равна на вероятността случайната величина X да приеме стойности по-малки от x, т.е. $F(x)=P(X<x)$, $x \in (-\infty,\infty)$. Така получаваме, че вероятността X да приеме стойности по-малки от x е равна на площта под нормалната крива в интервала $(-\infty,x)$, т.е.

$$F(x) = P(X<x) = \alpha_x .$$

Нека $x \in (m,n)$. Тогава

$F(n)-F(m) = P(m<X<n)$ = площта под кривата в интервала (m,n).



Коментар

За непрекъсната случайна величина X можем да говорим за вероятност X да приеме стойности по-малки от x или стойности в интервал.

Вероятността X да приеме точно определена стойности е 0.▲

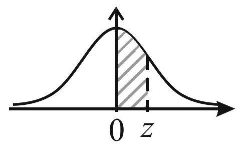
2) Таблица за площите под нормалната крива

Нека случайната величина X има $N(0,1)$ разпределение. Нейната функция на разпределение ще означаваме с $\Phi(z)$. За площите под нормалната крива на разпределение $N(0,1)$ се разработват таблици. Такава таблица има в учебника на стр. 183.

Да напомним, че лицето (площта) под нормалната крива е 1 и всяка от площите в интервалите $(-\infty,0)$ и $(0,\infty)$ е $0{,}5$.

Пример 1. Намиране на площ под стандартното нормално разпределение в даден интервал.

Нека $z>0$.



– **<u>Площ в интервала</u>** $(0,z)$ **.**

В таблицата е посочена площта под кривата в интервала $(0,z)$.

Например да намерим площта за $z=1{,}65$.

В първата колона на таблицата намираме числото $1{,}6$, съответстващо на цялата част и десетиците на z. Така определяме реда, който започва с $1{,}6$.

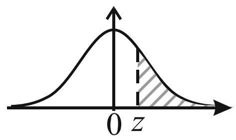
В първия ред на таблицата намираме числото $0{,}05$, съответстващо на стотиците. Така определяме колоната, която започва с $0{,}05$.

Избраните ред и колона се пресичат в числото $0{,}4505$. Това означава, че площта в интервала $(0;1{,}65)$ е $0{,}4505$.

– **<u>Площ в интервала</u>** $(-z,0)$ **.**

Тъй като кривата е симетрична относно $z=0$, то площта в интервала $(-z,0)$ е равна на площта в интервала $(0,z)$. В нашия пример площта в $(-1{,}65;0)$ е $0{,}4505$.

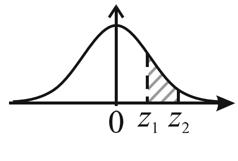
– **<u>Площ в интервала</u>** $(z,+\infty)$ **и в** $(-\infty,-z)$ **.**



Площта в интервала $(z,+\infty)$ се получава, като от $0{,}5$ извадим площта в интервала $(0,z)$. Получаваме, че площта в интервала $(1{,}65;\infty)$ е $0{,}5-0{,}4505=0{,}0495$.

Площта в интервала $(-\infty,-z)$ също е $0{,}0495$ поради симетрията на кривата.

– **<u>Площ в интервала</u>** (z_1,z_2) **и в** $(-z_2,-z_1)$ **,** $z_1>0$ **.**

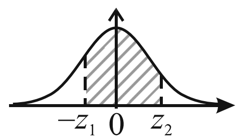


Площта в интервала (z_1,z_2) е разлика от площите в интервалите $(0,z_2)$ и $(0,z_1)$.

Нека $z_1=1{,}17$ и $z_2=1{,}65$.

Площта в интервала $(0;1{,}17)$ е $0{,}3790$ (от таблицата). Следователно площта в интервала $(1{,}17;1{,}65)$ е $0{,}4505-0{,}3790=0{,}715$. Толкова е и площта в интервала $(-1{,}65;-1{,}17)$.

– **<u>Площ в интервала</u>** $(-z_1,z_2)$



Това е сума от площите в интервалите $(-z_1,0)$ и $(0,z_2)$. Например площта в интервала $(-1{,}17;1{,}65)$ е $0{,}3790+0{,}4505=0{,}8295$.▲

С помощта на таблицата за площите под стандартното нормално разпределение можем да решаваме и обратната задача.

Пример 2. По дадена площ в интервала $(0, z)$ да се намери z.

Нека площта под стандартната нормална крива е $0{,}3078$. Това е площта в интервала $(0, z)$.

Намираме числото $0{,}3078$ в таблицата. То се намира в реда, който започва с $0{,}8$ и колоната, която започва с $0{,}07$. Следователно $z = 0{,}87$.▲

3) Вероятност случайна величина с $N(0,1)$ разпределение да приеме стойности в даден интервал

Нека X е случайна величина със стандартно нормално разпределение $N(0,1)$.

Вече изяснихме, че вероятността X да приеме стойности в интервала (m, n) е равна на площта под нормалната крива в интервала (m, n), която площ можем да намерим от таблицата.

Пример 3. Нека $X \in N(0,1)$. Да се намери вероятността X да приеме стойности в интервала:

а) $(0, 2)$; б) $(2, +\infty)$;

в) $(1, 2)$; г) $(-2, 1)$.

Решение. На числото $z = 2$ в таблицата съответства площ $0{,}4772$. Тогава:

а) $P(0 < X < 2) = 0{,}4772$.

б) $P(2 < X < \infty) = 0{,}5 - 0{,}4772 = 0{,}0228$.

в) На числото $z = 1$ съответства площ $0{,}3413 \Rightarrow P(1 < X < 2) = 0{,}4772 - 0{,}3413 = 0{,}1359$.

г) $P(-2 < X < 0) = P(0 < X < 2) = 0{,}4772$

$\Rightarrow P(-2 < X < 1) = P(-2 < X < 0) + P(0 < X < 1) = 0{,}4772 + 0{,}3413 = 0{,}8185$.▲

1. Ако X е случайна величина с $N(0,1)$ разпределение, да се намери вероятността X да приеме стойности в интервала:

а) $(1; 1{,}2)$; б) $(1{,}24; +\infty)$; в) $(1{,}3; 2{,}5)$;

г) $(-\infty; -2{,}45)$; д) $(-2{,}72; 0)$; е) $(-2; -1{,}65)$;

ж) $(-2{,}93; 1{,}54)$.

4.3. Основни свойства на нормалното разпределение

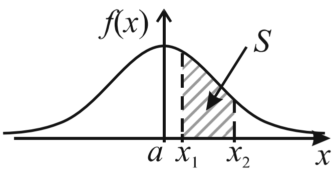
1) Вероятност случайна величина с разпределение $N(a,\sigma^2)$ да приеме стойности в даден интервал

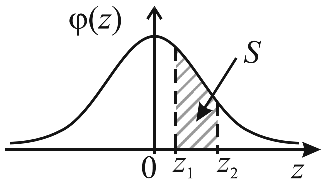
Теорема. Ако разпределението на една случайна величина X е $N(a,\sigma^2)$, то разпределението на случайната величина $\dfrac{X-a}{\sigma}$ е $N(0,1)$.

Трансформацията $z=\dfrac{x-a}{\sigma}$ се нарича **нормална трансформация** и чрез нея $N(a,\sigma^2)$ разпределена случайна величина се трансформира в $N(0,1)$ разпределена случайна величина. Този процес се нарича **стандартизация** на случайна величина.

Също така ще казваме, че с нормалната трансформация по дадено x намираме z стойност.

Твърдение. Нека $X \in N(a,\sigma^2)$ и получената стандартизирана случайна величина е $Z \in N(0,1)$.





Нека (x_1,x_2) е произволен интервал. Извършваме нормална трансформация и намираме $z_1=\dfrac{x_1-a}{\sigma}$ и $z_2=\dfrac{x_2-a}{\sigma}$. Тогава площта в интервала (x_1,x_2) под едната крива е равна на площта в интервала (z_1,z_2) под другата крива.▲

Коментар

Това свойство на нормалното разпределение е изключително важно. То показва, че площите под нормалната крива (а значи и вероятностите) на случайна величина с произволно нормално разпределение са равни, след стандартизация, на площите под стандартната нормална крива.

Ако $X \in N(a,\sigma^2)$, то площите под нормалната ѝ крива зависят от a и σ и изчисляването им всеки път е трудоемка задача.

Площите под стандартната нормална крива не зависят от a и σ, тъй като те са съответно 0 и 1. Ето защо площите са табулирани и не се налага да ги изчисляваме всеки път.

Тогава, за да пресметнем площ под нормалната крива на X, извършваме нормална трансформация на X и намираме съответните площи под стандартната нормална крива.▲

Правило на трите сигми

Вероятността $N(a,\sigma^2)$ разпределена случайна величина X да приеме стойности в интервала $(a-3\sigma, a+3\sigma)$ е $0{,}9974$.

Наистина. Нека $x=a+3\sigma$. Извършваме нормална трансформация $z=\dfrac{x-a}{\sigma}=\dfrac{a+3\sigma-a}{\sigma}=3$.

От таблицата намираме, че площта в интервала $(0,3)$ е $0{,}4987$. Тогава $P(a-3\sigma < X < a+3\sigma) = 2.0{,}4987 = 0{,}9974$.▲

Коментар

Правилото показва, че почти всички данни или по-точно $99{,}74\%$ от тях се намират на разстояние 3σ от средната стойност a.▲

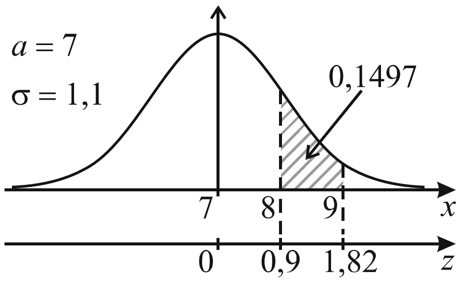
1. Разпределението на грешките, получени при измерване, е нормално. То има средна $a = 7$ и стандартно отклонение $\sigma = 1{,}1$. Да се намери вероятността грешката при измерване да бъде:

а) между 8 и 9; б) по-голяма от $8{,}5$; в) между 7 и 8.

Решение. а) Извършваме нормална трансформация:

$x = 8$: $z = \dfrac{x-a}{\sigma} = \dfrac{8-7}{1{,}1} = 0{,}9$. В таблицата на $z = 0{,}9$ съответства площ $0{,}3159$.

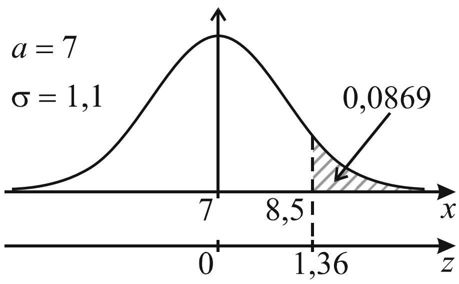
$x = 9$: $z = \dfrac{x-a}{\sigma} = \dfrac{9-7}{1{,}1} = 1{,}82$. В таблицата на $z = 1{,}82$ съответства площ $0{,}4656$.



Търсената площ е $0{,}4656 - 0{,}3159 = 0{,}1497$. Това означава, че вероятността случайната величина да приеме стойност между 8 и 9, т.е. грешката при измерване да бъде между 8 и 9, е равна на $0{,}1497$.▲

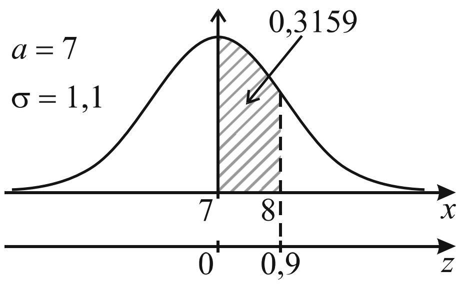
Решение. б) Трансформираме стойността $8{,}5$ в z стойност $z = \dfrac{x-a}{\sigma} = \dfrac{8{,}5-7}{1{,}1} = 1{,}36$.

В таблицата на $z = 1{,}36$ съответства площ $0{,}4131$. Това е площта в интервала $(0; 1{,}36)$. Ние се интересуваме от площта в интервала $(1{,}36; +\infty)$, която е $0{,}5 - 0{,}4131 = 0{,}0869$, което означава, че вероятността да се получи грешка при измерване по-голяма от $8{,}5$ е $0{,}0869$.▲



Решение. в) Стойността 7 е равна на средната ($a = 7$) и нейната z стойност е 0.

Трансформираме стойността 8 в z стойност: $z = \dfrac{x-a}{\sigma} = \dfrac{8-7}{1{,}1} = 0{,}9$. В таблицата на $z = 0{,}9$ съответства площ $0{,}3159$. Тогава вероятността грешката при измерване да бъде между 7 и 8 е $0{,}3159$.▲



2. Разпределението на произведените дефектни детайли в завод е нормално. То има средна $a = 9$ и стандартно отклонение $\sigma = 2{,}3$. Да се намери вероятността в една партида дефектните детайли да бъдат:

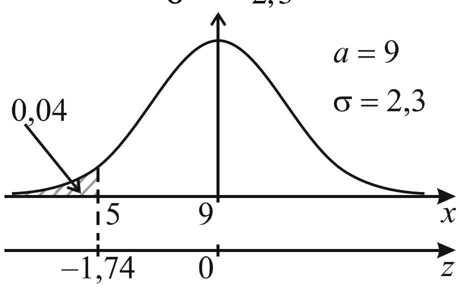
а) по-малко от 5; б) между 7 и 12; в) повече от 8;

г) повече от 9; д) по-малко от 9.

Решение. а) Трансформираме стойността 5 в z стойност $z = \dfrac{x-a}{\sigma} = \dfrac{5-9}{2{,}3} = -1{,}74$. В таблицата на $+1{,}74$ съответства площ $0{,}4591$.

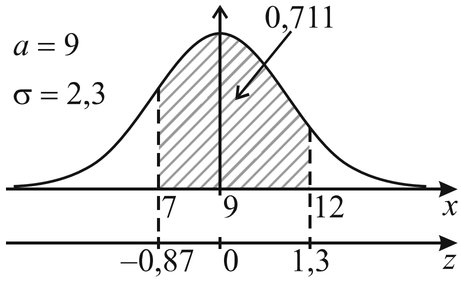
За да намерим търсената площ (вероятност), от $0{,}5$ изваждаме $0{,}4591$: $0{,}5 - 0{,}4591 = 0{,}04$.

Следователно вероятността в партидата да има по-малко от 5 дефектни детайла е $0{,}04$.▲



Решение. б) Трансформираме стойностите 7 и 12 в z стойности:

$z=\dfrac{x-a}{\sigma}=\dfrac{7-9}{2,3}=-0,87$ и $z=\dfrac{x-a}{\sigma}=\dfrac{12-9}{2,3}=1,3$.



В таблицата на $z=+0,87$ съответства площ $0,3078$, а на $z=1,3$ – площ $0,4032$.

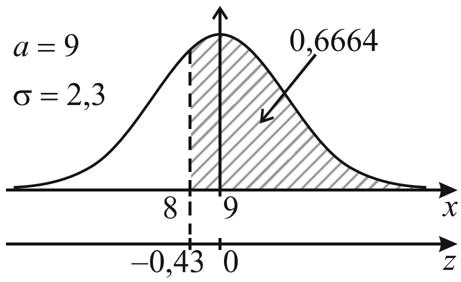
Площта $0,3078$ е ограничена от средната 9 и стойността 7 (наляво от средната).

Площта $0,4032$ е ограничена от средната 9 и стойността 12 (надясно от средната).

Търсената площ (вероятност) е сума от двете площи, тоест $0,3078+0,4032=0,711$.

Следователно вероятността в партидата да има между 5 и 12 дефектни детайла е $0,711$.▲

Решение. в) Трансформираме стойността 8 в z стойности: $z=\dfrac{x-a}{\sigma}=\dfrac{8-9}{2,3}=-0,43$.



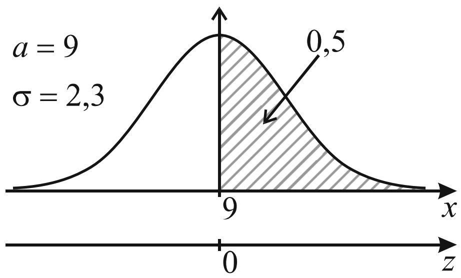
На $z=+0,43$ (от таблицата) съответства площ $0,1664$.

Търсената площ е в интервала $(-0,43;+\infty)$ и е $0,1664+0,5=0,6664$. Следователно вероятността в партидата да има повече от 8 дефектни детайла е $0,6664$.▲

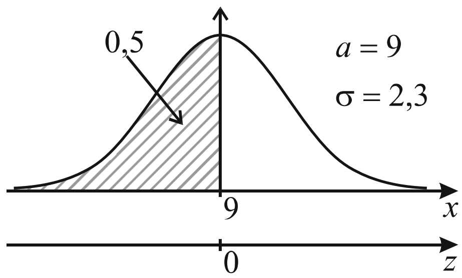
Решение. г) и д)

Стойността 9 е точно средната. Тогава вероятността да има повече от 9 дефектни детайла е $0,5$. Вероятността да има по-малко от 9 дефектни детайла е $0,5$.

г)



д)



▲

3. Проведен е тест с ученици. Резултатите от теста са разпределени приблизително нормално със средна 60 точки и дисперсия 25 точки. Каква е вероятността случайно избран ученик да има:

а) по-малко от 50 точки; б) повече от 70 точки; в) повече от 40 точки;

г) между 50 и 70 точки; д) между 60 и 70 точки?

4. Средната възраст на заетите в едно производство е 50 години със стандартно отклонение 12 години. Каква е вероятността произволно избран от заетите в производството да е между 40 и 55 години?

5. В един регион на страната средният добив от картофи е 1400 kg от декар. Ако добивът от картофи е нормално разпределена случайна величина със стандартно отклонение 150 kg, намерете:

а) вероятността от един декар да се получи добив от 1100 до 1500 kg;

б) вероятността от един декар да се получи добив по-голям от 1600 kg;

6. Данните, получени от анкета за сумарната продължителност на телефонните разговори на ден, са нормално разпределени. Средната продължителност на разговорите за ден е 70 минути със стандартно отклонение 20 минути. Да се намери вероятността разговорите за един ден на един анкетиран да бъдат:

а) между 50 min и 100 min;

б) повече от 120 min.

7. В резултат на статистическо проучване е установено, че средната консумация на градински грах на тримесечие от едно домакинство е $1{,}5$ kg. Ако консумацията на грах е нормално разпределена със стандартно отклонение 400 g, да се намери вероятността произволно избрано домакинство:

а) да консумира грах между 1 kg и $1{,}7$ kg;

б) да консумира повече от 2 kg грах;

в) да по-малко от $1{,}8$ kg грах.

8. Намерете z, ако площта под стандартната нормална крива в интервала $(0, z)$ е:

а) $0{,}4406$;

б) $0{,}2190$;

в) $0{,}475$;

г) $0{,}499$.

9. Намерете z, ако площта под стандартната нормална крива в интервала $(z, +\infty)$ е:

а) $0{,}05$;

б) $0{,}025$;

в) $0{,}02$.

10. Намерете z, ако площта под стандартната нормална крива в интервала $(-z, z)$ е:

а) $0{,}95$;

б) 0.989;

в) $0{,}8664$.

5. Статистически изводи

Окончателните изводи от статистическите проучвания се правят след така наречената проверка на хипотези.

Хипотеза в статистиката е предположение за някои свойства на генералната съвкупност, които могат да се проверят по данни от извадка.

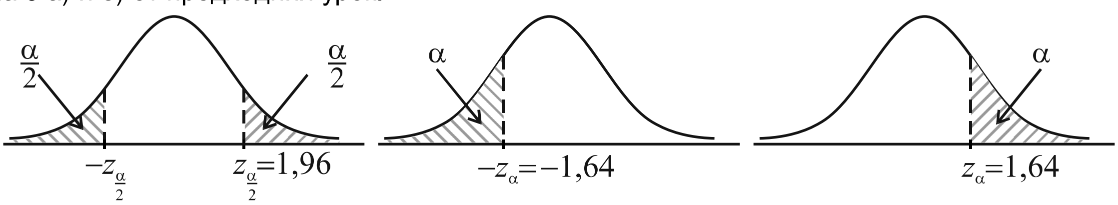
Проверяваната хипотеза се нарича **нулева** хипотеза (нулево различие) и се означава с H_0. В противовес на нулевата хипотеза се формулира друга, която се нарича **алтернативна** хипотеза и се означава с H_a. С нея се определят стойностите на параметъра, които се приемат, когато нулевата хипотеза се отхвърля.

Нулевата хипотеза се формулира като равенство. Например, за сравняване на разликата между средната m на генерална съвкупност и конкретно число m_0 нулевата хипотеза е $H_0:\ m = m_0$ (или $m - m_0 = 0$ – нулево различие). Формулирането на алтернативата може да бъде $H_a:\ m \neq m_0$ или чрез задаване на посока на неравенството $H_a:\ m > m_0$ или $H_a:\ m < m_0$. Проверката се извършва с данни от извадка. Статистическата проверка на хипотези има вероятностен характер. Има вероятност нулевата хипотеза да се отхвърли дори когато тя е вярна. Тази вероятност се нарича **равнище на значимост** и се означава с α. Равнището на значимост се избира от изследователя.

Критична област – това е областта под нормалната крива, в която нулевата хипотеза се отхвърля. Допълнителната ѝ област се нарича **област на приемане** на нулевата хипотеза.

Поради вероятностния характер на статистическата проверка, статистическият критерий не може да докаже верността на H_0. Затова възможните резултати за проверка на H_0 са: „Няма основание да се отхвърли H_0." и „H_0 се отхвърля.".

Когато при дефиниране на H_a посоката на неравенството не е показана, критичната област е **двустранна**, когато е показана посока на неравенството, критичната област е едностранна – **лявостранна** (например $H_a: m < m_0$) или **дясностранна** (например $H_a: m > m_0$). При равнище на значимост $\alpha = 0,05$ областта на приемане е $1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95$. При двустранна област, критичната област се разделя на две симетрични части по $\alpha : 2 = 0,025$, разположени в опашките на кривата (т.е. от двете страни на площта $0,95$). При едностранна област критичната област е с площ $\alpha = 0,05$, разположена в лявата или дясната опашка на кривата. Различните случаи са показани на чертежа при равнище на значимост $\alpha = 0,05$. За изчисляване на критичните стойности вижте задача 9 а) и б) от предходния урок.



Защрихованите области са критичните зони, z_{α} и $z_{\frac{\alpha}{2}}$ се наричат **критични стойности.**

Етапи при статистическа проверка на хипотеза

Първи етап – дефиниране на нулевата и алтернативната хипотеза.

Втори етап – определяне на равнището на значимост.

Трети етап – определяне вида на критичната област и критичните стойности z_α или $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

Четвърти етап – осигуряване на необходимите данни.

Пети етап – от данните в извадката се изчислява емпиричната нормирана z стойност, която се означава със z_e (z експериментално).

Шести етап – вземане на решение. За вземане на решение се сравняват z_e и z_α или $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

Когато z_e попада в критичната зона, H_0 се отхвърля. Казва се, че резултатът се различава „статистически значимо”. Когато z_e е извън критичната зона, няма основание да се отхвърли H_0.

5.1. Статистически изводи с модел биномно разпределение върху данни от учебен тест

При някои статистически изследвания трябва да се оцени относителният дял на единиците от дадена съвкупност. Например делът на дефектните изделия в една партида.

В схема на Бернули (n, p) броят k на дефектните изделия (броят на успехите) е случайна величина с биномно разпределение. Величината $X = \frac{k}{n}$, която дава относителния дял на дефектните изделия, също е случайна величина и може да се докаже, че $EX = p$, $\sqrt{DX} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

Доказано е, че с увеличаване размера n на извадката разпределението на относителния дял се апроксимира (приближава) с нормално разпределение със средна стойност p и стандартно отклонение $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$. В този случай нормалната трансформация има вида $z = \frac{p-\widehat{p}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{p-\widehat{p}}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}$, където $\widehat{p}$ се изчислява от извадката, което ще покажем в задачите.

1. По стандарт, при производството на дадено изделие, броят на некачествените изделия е не повече от $0{,}07$. От една партида е направена случайна извадка от 80 изделия, като дефектните в нея са 9. Може ли да се приеме, че изделията в партидата са по стандарт?

Решение. Решението следва етапите при проверка на хипотеза.

1. $H_0:\ p = 0{,}07$, $H_a:\ p > 0{,}07$.

2. Равнище на значимост $\alpha = 0{,}05$.

3. Критичната област е дясностранна и $z_\alpha = 1{,}64$.

4. Осигуряване на необходимата информация: $n = 80$, $p = 0{,}07$, $\widehat{p} = \frac{9}{80} = 0{,}1125$.

5. Изчисляване на емпиричната характеристика

$$z_e = \frac{p-\widehat{p}}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n} = \frac{0{,}07-0{,}1125}{\sqrt{0{,}07.0{,}93}}\sqrt{80} \approx -1{,}49.$$

6. Вземане на решение:

Тъй като $-1,49<1,64 \quad \Rightarrow$ няма основание да се отхвърли нулевата хипотеза или няма основание да се отхвърли, че изделията в партидата са по стандарт.▲

2. Относителният дял на учениците, които не могат да покрият норматива за скок на дължина е $0{,}2$. Може ли да се приеме, че учениците, които не покриват норматива, са с относителен дял $0{,}2$, ако е направена случайна извадка от 100 ученици, като от тях не са покрили норматива:

а) 14 ученици; б) 13 ученици?

3. Известно е, че две години след производството на даден вид семена, относителният дял на тези, които покълват, е $0{,}9$. Да се провери дали семената отговарят на известния вече норматив, ако е взета случайна проба от 1000 семена, от които не са покълнали:

а) 120 семена; б) 110 семена?

5.2. Статистически изводи с модел нормално разпределение върху данни от измерване при конкретен експеримент

Нека от генерална съвкупност е направена извадка с обем n. Ако генералната съвкупност е с нормално разпределение със средна m и стандартно отклонение σ, нормалната z трансформация има вида $z=\dfrac{\overline{x}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\dfrac{\overline{x}-m}{\sigma}\sqrt{n}$, където $\overline{x}$ е средната на извадката.

При решаване на задачи за проверка на хипотези за разлика между средни се следват вече формулираните етапи.

4. Средният месечен разход за консумативи в един офис на една фирма е 50 лв. със стандартно отклонение 5 лв. Фирмата направила проверка в 40 случайно избрани нейни офиса и установила, че средният месечен разход за консумативи е:

а) 51 лв.;

б) 52 лв.

Да се установи дали разходът за консумативи е завишен.

Решение а). Решението следва етапите при проверка на хипотеза.

1. $H_0:\ m=50$, $H_a:\ m>50$.

2. Равнище на значимост $\alpha=0,05$.

3. Критичната област е дясностранна и $z_\alpha=1,64$.

4. Осигуряване на необходимата информация:

$$m=50,\ \sigma=5,\ n=40,\ \overline{x}=51.$$

5. Изчисляване на емпиричната характеристика

$$z_e=\frac{\overline{x}-m}{\sigma}\sqrt{n}=\frac{51-50}{5}\sqrt{40}=\frac{2\sqrt{10}}{5}\approx 1,26.$$

6. Вземане на решение: $1,26<1,64 \quad \Rightarrow$ няма основание да се отхвърли нулевата хипотеза.▲

Решение б) **1.** $H_0:\ m=50$, $H_a:\ m>50$.

2. Равнище на значимост $\alpha=0,05$.

3. Критичната област е дясностранна и $z_\alpha=1,64$.

4. Осигуряване на необходимата информация:

$$m = 50,\ \sigma = 5,\ n = 40,\ \overline{x} = 52.$$

5. Изчисляване на емпиричната характеристика

$$z_e = \frac{\overline{x} - m}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{52 - 50}{5}\sqrt{40} = \frac{4\sqrt{10}}{5} \approx 2{,}53.$$

6. Вземане на решение: $2{,}53 > 1{,}64 \ \Rightarrow$ нулевата хипотеза се отхвърля.▲

5. Производител твърди, че произведените от него обувки със специално покритие могат да издържат в съд с вода 24 часа без да пропускат със стандартно отклонение $0{,}5$ часа. Да се провери дали предлаганите обувки отговарят на заявеното условие, ако е направена извадка от 50 чифта обувки и е установено, че средното време, за което обувките пропускат, е:

а) $23{,}9$ часа; б) $23{,}8$ часа.

6. Произвежданите тенис-фланелки трябва да имат дължина 60 cm със стандартно отклонение 8 mm. Да се провери дали тенис-фланелките имат стандартна дължина, ако е направена извадка от 60 тенис-фланелки и средна им дължина е:

а) $60{,}2$ cm; б) $59{,}8$ cm.

Обобщение на етапите при статистическа проверка на хипотеза

Етапи при статистическа проверка на хипотеза	**Проверка на хипотези за разлика между относителни дялове**	**Проверка на хипотези за разлика между средни**
Първи етап – дефиниране на нулевата и алтернативната хипотеза.	$H_0:\ p$ =относителен дял $H_a\ \ \neq$ или $>$ или $<$ от дадения относителен дял	$H_0:\ m$ =средната $H_a\ \ \neq$ или $>$ или $<$ от дадената средна
Втори етап – определяне на равнището на значимост.	Обикновено $\alpha = 0{,}05$	Обикновено $\alpha = 0{,}05$
Трети етап – определяне вида на критичната област и изчисляване на критичните стойности.	Двустранна или едностранна При $\alpha = 0{,}05$: • $z_\alpha = 1{,}64$ за едностранна • $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$ за двустранна	Двустранна или едностранна При $\alpha = 0{,}05$: • $z_\alpha = 1{,}64$ за едностранна • $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$ за двустранна
Четвърти етап – осигуряване на необходимите данни.	$n,\ p,\ \hat{p}$	$m,\ \sigma,\ n,\ \overline{x}$.
Пети етап – от данните в извадката се изчислява емпиричната z_e стойност	Изчислява се $z_e = \frac{p - \hat{p}}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}$	Изчислява се $z_e = \frac{\overline{x} - m}{\sigma}\sqrt{n}$
Шести етап – вземане на решение. Възможните резултати са: • H_0 се отхвърля; • няма основание да се отхвърли H_0.	Сравняват се z_e и z_α или z_e и $z_{\frac{\alpha}{2}}$ и се взема решение	Сравняват се z_e и z_α или z_e и $z_{\frac{\alpha}{2}}$ и се взема решение

6. Линеен модел на корелационна зависимост

6.1. Линеен регресионен модел

Една от задачите на статистиката е изследването на връзката между две променливи. Когато зависимостта не е ясно изразена (функционална) казваме, че има корелационна зависимост. Характерът на зависимостта се оценява от регресионния[1] анализ.

Регресионният анализ изучава връзките между количествени променливи. Зависимостта може да бъде между две и повече величини, а от друга страна – линейна, квадратична, експоненциална и т.н.

Ние ще разглеждаме модели на линейна зависимост между две променливи величини. Предполагаме, че е направено наблюдение върху съвкупност от n на брой единици по два признака. **Независимата** променлива (**фактор**, определяща) се означава с x, а **зависимата** (**резултативна**) – с y. Данните са от конкретно наблюдение, поради което те изразяват корелационната зависимост между изследваните признаци. Това означава, че значенията на резултативния признак се формират под въздействието както на факторния признак, така и на други фактори.

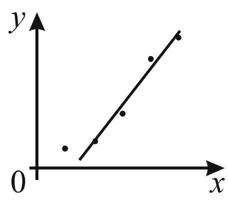
Най-обща представа за зависимостта между двете променливи се получава като се начертае диаграма на разсейването. Ако връзката е приблизително линейна, съставяме уравнението $\hat{y} = b_0 + b_1 x$, което се нарича **регресионно уравнение** (**линеен регресионен модел**), b_0 и b_1 са **параметри** на модела или регресионни коефициенти; b_0 се нарича **отрез**, а b_1 – **наклон**.

Търсим такова уравнение на правата $\hat{y} = b_0 + b_1 x$, че тя да минава най-близо до всички емпирични точки. За решаването на тази задача се използва така нареченият метод на най-малките квадрати (МНМК).

Със следващия пример ще проследим стъпките при решаване на конкретна регресионна задача.

Пример. Направени са наблюдения върху два признака върху един и същи обект, като X е независимата променлива, а Y е зависимата. Данните са показани в таблицата:

X	1	2	3	4	5
Y	3	4	8	16	19



Построяваме диаграма на разсейването. Можем да предположим, че точките се групират около права, т.е. зависимостта е линейна.

– Нека регресионното уравнение е $\hat{y} = b_0 + b_1 x$.

– Параметрите b_0 и b_1 определяме по МНМК. Прилагането на този метод се свежда до решаване на следната система, наречена система **нормални уравнения**:

[1] В статистиката думата *регресия* означава способ за аналитично и графично представяне на модела на зависимост между зависимите статистически величини и не трябва да се възприема в обичайния ѝ смисъл – като движение назад в развитието.

$$\begin{vmatrix} S_y = nb_0 + b_1 S_x \\ S_{xy} = b_0 S_x + b_1 S_{x^2} \end{vmatrix}$$, където

n е обемът на извадката,

$S_x = x_1 + x_2 + ... + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ $\qquad$ $S_y = y_1 + y_2 + ... + y_n = \sum_{i=1}^{n} y_i$

$S_{x^2} = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ $\qquad$ $S_{xy} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

За извършване на изчисленията използваме работна таблица.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	*1*	3	1	3
2	*2*	4	4	8
3	*3*	8	9	24
4	*4*	16	16	64
5	*5*	19	25	95
$n=5$	$S_x = 15$	$S_y = 50$	$S_{x^2} = 55$	$S_{xy} = 194$

Системата $\begin{vmatrix} S_y = nb_0 + b_1 S_x \\ S_{xy} = b_0 S_x + b_1 S_{x^2} \end{vmatrix}$ приема вида $\begin{vmatrix} 50 = 5b_0 + 15b_1 \\ 194 = 15b_0 + 55b_1 \end{vmatrix}$,

чиито решения са $b_0 = -3,2$ и $b_1 = 4,4$.

Регресионната права е $\hat{y} = -3,2 + 4,4x$.

Стойностите $\hat{y}$ се наричат предсказана (прогнозна) стойност.

Например, ако x приеме стойност 6, то за y се очаква да приеме стойност $\hat{y} = 23,2$.▲

1. За изследване на връзката между броя на книгите в домашната библиотека и броя на прочетените книги за една година е направено наблюдение в 5 семейства. Получените данни са представени в таблицата. Да се построи линеен регресионен модел. Да се направи прогноза за броя на прочетените книги за една година в семейство със 120 книги в домашната библиотека.

Семейство	Брой книги в библиотеката – x_i	Брой прочетени книги – y_i
I	20	9
II	40	12
III	60	22
IV	80	29
V	100	35

Решение. По условие зависимостта е линейна и търсим регресионно уравнение от вида $\hat{y} = b_0 + b_1 x$.

Съставяме работна таблица.

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
I	20	9	400	180
II	40	12	1 600	480
III	60	22	3 600	1 320
IV	80	29	6 400	2 320
V	100	35	10 000	3 500
	$S_x = 300$	$S_y = 107$	$S_{x^2} = 22000$	$S_{xy} = 7800$

$$\left|\begin{aligned} S_y &= nb_0 + b_1 S_x \\ S_{xy} &= b_0 S_x + b_1 S_{x^2} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{aligned} 107 &= 5.b_0 + 300.b_1 \quad /.(-60) \\ 7800 &= 300.b_0 + 22000.b_1 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow + \left|\begin{aligned} -6420 &= -300.b_0 - 18000.b_1 \\ 7800 &= 300.b_0 + 22000.b_1 \end{aligned}\right.$$

$$b_1 = \frac{1380}{4000} = 0,345 \,,\; b_0 = 0,7 \,.$$

$$\Rightarrow \quad \hat{y} = 0,7 + 0,345x \,.$$

Ако в домашната библиотека има 120 книги, то се очаква книгите, прочетени за 1 година в това семейство, да са $0,7 + 0,345.120 = 42,1$, т.е. около 42.▲

2. Резултатите на пет ученици от контролна работа по математика са дадени в таблицата. След направен коментар на контролната работа учениците направили нова контролна работа и резултатите са показани в таблицата. Да се построи линеен регресионен модел. Каква оценка е имал на първата контролна работа ученик, който на втората е получил 6?

Ученик	Оценка от контролна работа 1	Оценка от контролна работа 2
A	2	3
B	3	4
C	4	4,5
D	5	5
E	4	5

6.2. Модел на научен експеримент

Провеждането на един експеримент започва със събирането на статистически сведения. Това включва подготвяне на организационен план, с който се решават въпросите за:

точна характеризация на генералната съвкупност;

време и място на наблюдение;

начин на регистрация на сведенията;

съставянето на статистически въпросници и инструкции за попълването им.

Прави се извадка, която трябва да бъде представителна – обикновено чрез случаен избор. Има разработени и други критерии за избор на единиците в извадката. Важно условие е извадката да е с достатъчен обем. За определяне обема на извадката са разработени формули. Извадката трябва да отразява точно характерните особености на генералната съвкупност и да е неин микро модел. Нарушаването на принципите за избор на извадката може да доведе до погрешни изводи за генералната съвкупност.

Събраните данни от проведения експеримент (проучване) са в „суров” вид и следва тяхната обработка. Данните се групират и се подреждат във вариационни редове. Представят се в табличен, графичен и аналитичен вид – използват се полигон, диаграма и хистограма.

Изчисляват се различни обобщителни характеристики като мода, медиана, квартили, средноаритметично, дисперсия и стандартно отклонение, които дават най-непосредствена представа за разпределение на единиците.

Основната цел на статистическото изследване е, след като са изследвани закономерностите в извадката, да се получат изводи за генералната съвкупност. Това се постига с анализ на данните, който е предмет на математическата статистика.

По данни от извадката се прави оценка за неизвестен параметър за цялата генерална съвкупност, като обикновено се посочва интервал, за който с определена вероятност се твърди, че съдържа истинската стойност на параметъра.

По-нататък следва проверка на хипотезата относно стойността на параметъра.

Зависимостите между две и повече величини се проверяват със средствата на корелационния и регресионния анализ.

Общи задачи
Вероятности и анализ на данни

1. След проучване на пазара, гражданин се спира на два магазина, в които се продават два вида клавиатури за компютър – стандартна и малка. В първия магазин има 8 клавиатури, от които 5 стандартни, а във втория – 5 клавиатури, от които 2 малки. Гражданинът избира случайно един от двата магазина и купува две стандартни клавиатури. Каква е вероятността клавиатурите да са купени от втория магазин?

2. Туристическа група "Ехо" е посетила 70 от 100 национални туристически обекта. Те решили да открият новия туристически сезон като посетят три случайно избрани от 100-те обекта. Каква е вероятността при следващ случаен избор на обекти да изберат два непосещавани обекта?

3. В библиотеката на едно училище има 20 книги за първокласници, като учениците от 1^a клас са прочели 6 от тях. За часа по интереси те избрали случайно 3 книги за първокласници от библиотеката, които прочели през януари. Каква е вероятността за часа по интереси през февруари да изберат 2 нечетени книги?

4. Ученик има следните монети в джоба си:

2 монети по 10 ст., 3 монети по 20 ст., 4 монети по 50 ст.,
2 монети по 1 лв., 1 монета по 2 лв.

Случайната величина X е равна на стойността на случайно извадена монета. Да се намери:

а) законът за разпределение на X; б) функцията на разпределение на X;
в) математическото очакване на X; г) дисперсията на X.

5. Шахматист участва в клуб с още 15 шахматисти. С 10 от тях той е играл поне една партия шах. Един ден той е играл с трима случайно избрани. При следващото посещение в клуба шахматистът отново играе с трима случайно избрани. Каква е вероятността вече да е играл и с тримата?

6. В едно семейство има трима братя и две сестри. За една игра те избират двама от тях (всяко дете може да бъде избрано не повече от един път). Ако второто избрано дете е брат, каква е вероятността първото да е сестра?

7. Хвърлят се два зара. Случайната величина X приема стойност 1, ако поне на единия зар се пада 1, стойност 2, ако поне на единия зар се пада 2, а на другия число не по-малко от 2 и стойност 3 – в останалите случаи. Да се намери:

а) законът за разпределение на X; б) функцията на разпределение на X;
в) математическото очакване на X; г) дисперсията на X.

8. Да се намерят дисперсията и стандартното отклонение на случайната величина, зададена с таблицата:

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

9. Вероятността да бъде произведена дефектна крушка е постоянно число, равно на $0{,}02$. Случайната величина X е равна на броя на дефектните крушки измежду 12. Да се намери:

а) математическото очакване на X; б) дисперсията на X.
в) най-вероятната стойност на X.

10. Фирма е разпределила производството на изделия в два цеха в отношение $3:2$, като в първия 70% от изделията са първо качество, а във втория – 80%. Случайно избрано изделие е от първо качество. Каква е вероятността то да е произведено в първия цех?

11. Сорт домати имат елипсовидна форма, като диаметърът на напречното им сечение е нормално разпределена случайна величина със средна 6 cm и стандартно отклонение 2 cm. Да се намери вероятността произволно избран домат да има диаметър:

а) между 4 cm и 6 cm; б) между 5 cm и 7 cm; в) по-голям от 8 cm; г) по-малък от 4 cm.

12. В завод за производство на безалкохолни напитки автомат пълни бутилките, като средно в бутилка трябва да има 1 L напитка със стандартно отклонение $0{,}05$. От 100 проверени бутилни се оказва, че средното количество напитка е $0{,}992$ L. Да се провери хипотезата, че автоматът налива по-малко напитка от стандарта.

13. При производство на машинна част броят на неотговарящите на стандарта части трябва да бъде не повече от $0{,}05$. Неотговарящите на стандарта части се бракуват. При случайна извадка от 100 части от една партида са бракувани 6. Може ли да се твърди, че частите в партидата отговарят на стандарта?

14. Направено е проучване за връзката между теоретичните знания по физика и практическите умения. За целта е направен тест по физика и практикум, оценявани по скала от 0 до 50 точки. Резултатите на пет ученици са показани в таблицата. Да се построи линеен регресионен модел. Да се направи прогноза за резултата от практикума на ученик, който има 50 точки от теста по физика.

Ученик	A	B	C	D	E
Оценка от тест	37	37	26	16	13
Оценка от практикум	34	36	18	16	13

15. В шивашка фабрика е инсталиран нов стан за тъкане на плат. Средната дължина на един топ плат трябва да бъде 21 m със стандартно отклонение 120 cm. Направена е извадка от 40 топа и е установена средна дължина на един топ $20{,}7$ m. Да се провери дали станът произвежда топовете платове с дължина по стандарт.

16. Автомат пакетира ядки в пликове със средна маса 80 g със стандартно отклонение $2{,}5$ g. Измерени са 36 опаковки и е установена средна маса $79{,}3$ g. Да се провери дали автоматът пакетира по-малко от необходимото количество.

17. Двама братя имат 12 настолни игри, на 5 от които са играли. Те получили като подарък две нови игри, но решили да изберат 2 случайно от всички, на които да играят. Каква е вероятността при следващ случаен избор на 3 игри да не са играли и на трите?

18. Клиент иска да купи паркет от склад при условие, че средната влажност на паркетините не надвишава 6% със стандартно отклонение $0{,}7\%$. Направена е случайна извадка от 120 паркетини и средната им влажност е $6{,}1\%$. Има ли основание клиентът да купи паркета?

19. Верига за химическо чистене твърди, че 90% от клиентите са доволни от услугите. При направено проучване сред 54 случайно избрани клиенти се оказва, че 46 от тях са доволни от услугите на веригата. Има ли основание да се твърди, че веригата е завишила процента на доволните клиенти?

20. Вероятността ученик да закъснее за училище в един ден е $0{,}03$. Колко е най-вероятният брой закъснения на ученика за 90 дни?

Тест 1
Вероятности и анализ на данни

1. В кутия има 2 бели и 3 черни топки, а в друга кутия има 3 бели и 6 черни топки. От случайно избрана кутия са извадени две топки. Каква е вероятността извадените топки да са едноцветни?

2. В един клас има 25 ученици, 15 от които са изпитани по даден предмет. В понеделник учителят изпитва двама произволно избрани ученици. Каква е вероятността в следващия час да изпита двама изпитани вече ученици?

3. Учителят по математика подготвил два варианта за контролна работа – група 1 и група 2. Вероятността да бъдат решени задачите от група 1 е 70%, а тези от група 2 – 80%. Вероятността ученик да получи варианта на група 1 е $0{,}4$, а на група 2 е $0{,}6$. Произволно избран ученик е решил задачите от контролната работа. Каква е вероятността този ученик да е работил върху задачите от група 1?

4. Хвърлят се две монети. Случайната величина X приема стойност 11, ако се падне лице на двете монети, 12, ако на първата се падне лице, а на другата герб, 21 ако на първата се падне герб, а на другата лице и 22, ако на двете се падне герб. Да се намери:

а) законът за разпределение на X; б) функцията на разпределение на X.

5. В кутия има 6 бели и 4 черни топки. Изваждат се 3 топки. Случайната величина X е равна на броя на извадените бели топки. Да се намери:

а) математическото очакване на X; б) дисперсията на X;

в) стандартното отклонение на X.

6. Вероятността ученик да реши успешно тест по математика е $0{,}6$. Ученикът е решил четири теста. Случайната величина X е равна на броя успешно решените тестове. Да се намери:

а) математическото очакване на X; б) дисперсията на X;

в) най-вероятният брой успешно решени тестове от ученика.

7. При статистическо наблюдение в земеделски стопанства е установено, че средният добив ябълки от един декар е нормално разпределен със средна стойност 1100 kg и стандартно отклонение 120 kg. Да се намери вероятността добивът от ябълки от декар в случайно избрано стопанство да бъде:

а) между 900 и 1500 kg;

б) над 1500 kg на декар.

8. Фирма, производител на семена за домати, е създала нов сорт, за който твърди, че получените зрели плодове имат средна маса 420 g със стандартно отклонение 80 g. От домати, произведени от тези семена, са премерени 100 и средната им маса е 410 g. Да се установи дали получената разлика е статистически значима.

9. Резултатите от тест по математика и тест по физика на пет ученици са дадени в таблицата. Да се построи линеен регресионен модел. Да се направи прогноза за резултата от тест по физика, ако ученик има 70 от тест по математика.

Ученик	A	B	C	D	E
Тест по математика	28	15	42	50	37
Тест по физика	20	20	40	48	38

Тест 2
Вероятности и анализ на данни

1. В кутия има 3 бели и 2 черни топки, а в друга кутия има 4 бели и 5 черни топки. От случайно избрана кутия са извадени две топки. Каква е вероятността извадените топки да са разноцветни?

2. Живущите в един блок определят по случаен начин тези от тях, които да почистят снега. От 30 живущи 16 вече са почиствали снега. В понеделник двама произволно избрани са почистили снега. Каква е вероятността за почистването на следващия сняг да бъдат избрани двама непочиствали снега?

3. Учителят по математика подготвил два варианта за контролна работа – група 1 и група 2. Вероятността да бъдат решени задачите от група 1 е 90%, а тези от група 2 – 80%. Вероятността ученик да получи варианта на група 1 е $0{,}4$, а на група 2 е $0{,}6$. Произволно избран ученик е решил задачите от контролната работа. Каква е вероятността този ученик да е работил върху задачите от група 1?

4. Хвърлят се два зара. Случайната величина X приема стойности, равни на абсолютната стойност на разликата от точките на двата зара. Да се намери:

а) законът за разпределение на X; б) функцията на разпределение на X.

5. В кутия има 5 бели и 7 черни топки. Изваждат се 3 топки. Случайната величина X е равна на броя на извадените бели топки. Да се намери:

а) математическото очакване на X; б) дисперсията на X;

в) стандартното отклонение на X.

6. Според прогнозата за времето през следващите пет дни, вероятността за дъжд е $0{,}7$ (за всеки ден). Случайната величина X е равна на броя на дъждовните дни през следващите пет дни. Да се намери:

а) математическото очакване на X; б) дисперсията на X;

в) най-вероятният брой дъждовни дни.

7. При статистическо наблюдение в земеделски стопанства е установено, че средният добив ябълки от един декар е нормално разпределен със средна стойност 1000 kg и стандартно отклонение 150 kg. Да се намери вероятността добивът от ябълки от декар в случайно избрано стопанство да бъде:

а) между 700 и 1200 kg;

б) над 1500 kg на декар.

8. Фирма, производител на семена за домати, е създала нов сорт, за който твърди, че получените зрели плодове имат средна маса 300 g със стандартно отклонение 70 g. От домати, произведени от тези семена, са премерени 100 и средната им маса е 290 g. Да се установи дали получената разлика е статистически значима.

9. Резултатите от тест по математика и тест по физика на пет ученици са дадени в таблицата. Да се построи линеен регресионен модел. Да се направи прогноза за резултата от тест по физика, ако ученик има 50 от тест по математика.

Ученик	A	B	C	D	E
Тест по математика	32	17	41	12	17
Тест по физика	27	17	37	11	17

Практикум
Анализ на данни

Ще се запознаем с някои функции за обработка на статистическа информация. Те са вградени в повечето електронни таблици. Всяка функция има определени параметри, които трябва да бъдат въведени. В различните таблици те се означават по различен начин. Ние ще следваме означенията, въведени в учебника, като за разделящ символ ще използваме „,”. В записа на десетичните дроби вместо десетична запетая се използва точка.

В примерите се използва относително адресиране. Може да се използват възможностите на електронната таблица, с която се работи, за абсолютно адресиране.

I. Биномно разпределение

Функция BINOMDIST

Пресмята вероятности на биномно разпределение.

Параметри $\mathrm{BINOMDIST}(k, n, p, ft)$.

k – стойност на случайната величина (брой успешни опити)

n – броя на опитите

p – вероятност за успех при един опит

ft – записва се FALSE или TRUE

При FALSE – функцията пресмята биномната вероятност за k.

При TRUE – функцията пресмята биномните вероятности с натрупване.

Пример. Случайната величина $X \in Bi(3, 0.2)$. Да се намери биномното разпределение на X.

Решение. Отваряме електронна таблица. В клетки A1 до A4 нанасяме стойностите от 0 до 3.

В клетка B1 записваме: =BINOMDIST(A1,3,0.2,FALSE)

Вместо да въвеждаме стойността на клетка B1 от клавиатурата, функцията може да бъде избрана от списък с функции по начин, който зависи от електронната таблица, която се използва.

Копираме стойността на клетка B1 в клетки B2 до B4.

В клетки B1 до B4 последователно получаваме биномните вероятности.

	A	B	C
1	0	=BINOMDIST(A1,3,0.2,FALSE)	
2	1	=BINOMDIST(A2,3,0.2,FALSE)	
3	2	=BINOMDIST(A3,3,0.2,FALSE)	
4	3	=BINOMDIST(A4,3,0.2,FALSE)	
5			

Резултат

	A	B	C
1	0	0.512	
2	1	0.384	
3	2	0.096	
4	3	0.008	

Когато четвъртият параметър на функцията е TRUE, се получава:

	A	B	C
1	0	=BINOMDIST(A1,3,0.2,TRUE)	
2	1	=BINOMDIST(A2,3,0.2,TRUE)	
3	2	=BINOMDIST(A3,3,0.2,TRUE)	
4	3	=BINOMDIST(A4,3,0.2,TRUE)	
5			

Резултат

	A	B	C
1	0	0.512	
2	1	0.896	
3	2	0.992	
4	3	1	

1. Пресметнете биномните вероятности в схема на Бернули (n, p), като използвате функцията BINOMDIST, ако:

а) $(n, p) = (7, 0.6)$;

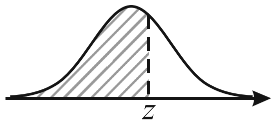
б) $(n, p) = (5, 0.7)$.

2. Използвайте функцията BINOMDIST, за да решите още веднъж задачи 4., 5., и 6. от урок 3.1.

3. Потърсете допълнителна информация или създайте примери, които да решите с функцията BINOMDIST.

II. Нормално разпределение

1) Функция NORMSDIST(z)



Пресмята площта под нормалната крива наляво от z за разпределение $N(0,1)$, т.е. площта в интервала $(-\infty, z)$.

Пример 1.

	A	B	C
1		=NORMSDIST(1)	
2		=NORMSDIST(-1)	
3		=NORMSDIST(1.64)	
4		=NORMSDIST(-1.64)	
5		=NORMSDIST(0)	

Резултат

	A	B	C
1		0.8413	
2		0.1587	
3		0.9495	
4		0.0505	
5		0.5000	

Вариант:

	A	B	C
1	1	=NORMSDIST(A1)	
2	–1	=NORMSDIST(A2)	
3	1.64	=NORMSDIST(A3)	
4	–1.64	=NORMSDIST(A4)	
5	0	=NORMSDIST(A5)	

Резултат

	A	B	C
1	1	0.8413	
2	–1	0.1587	
3	1.64	0.9495	
4	–1.64	0.0505	
5	0	0.5000	

▲

Функцията NORMSDIST(z) може да се използва вместо таблиците за площите под стандартната нормална крива. Трябва да се има предвид, че резултатът е площта в интервала $(-\infty, z)$, докато използваната в учебника таблица дава площта в интервала $(0, z)$ за $z \geq 0$.

2) Функция NORMDIST

Нека X е случайна величина с нормално разпределение $N(a,\sigma^2)$.

Параметри NORMDIST(x,a,σ,t)

x – стойност на случайната величина

a – средна аритметична на случайната величина

σ – стандартно отклонение на случайната величина

t – TRUE – пресмята площта под стандартната нормална крива наляво от z, където z е съответната стандартизирана стойност на x.

FALSE е за плътността на разпределение, което няма да използваме

Функцията пресмята вероятността случайната величина с разпределение $N(a,\sigma^2)$ да приеме стойности по-малки от дадената стойност x.

Както се подразбира от параметрите на функцията, не е необходимо да се изчислява съответната z стойност – функцията сама я пресмята.

Пример 2.

	A	B	C
1		=NORMDIST(0,0,1,TRUE)	
2		=NORMDIST(22,20,5,TRUE)	
3		=NORMDIST(9,12,2.3,TRUE	
4			

Резултат

	A	B	C
1		0.5	
2		0.6554	
3		0.0961	

▲

1. Използвайте функцията NORMDIST, за да проверите свойството на нормалното разпределение, че площите (вероятностите) на разстояние $k\sigma$ от средната са едни и същи за всяка случайна величина с нормално разпределение $N(a,\sigma^2)$.

Примерно решение. За три случайни величини $N(8,1.7^2)$, $N(50,7.2^2)$, $N(20,3.1^2)$ са изчислени площите (вероятностите) на разстояние 1σ от съответната средна стойност. От резултата се вижда, че тези вероятности са равни.

	A	B	C
1		=NORMDIST(9.7,8,1.7,TRUE)	
2		=NORMDIST(57.2,50,7.2,TRUE)	
3		=NORMDIST(23.1,20,3.1,TRUE)	
4			

Резултат

	A	B	C
1		0.8413	
2		0.8413	
3		0.8413	

Направете чертеж и защриховайте площта, намерена с този пример.

Създайте и други примери. ▲

2. Да се реши задача **1.** от урок 4.3. като се използва функцията NORMDIST.

Решение.

По условие $a = 7$, $\sigma = 1{,}1$.

а) Вероятността грешката да бъде между 8 и 9 е

=NORMDIST(9,7,1.1,TRUE)–NORMDIST(8,7,1.1,TRUE).

б) Вероятността грешката да бъде по-голяма от 8,5 е =1–NORMDIST(8.5,7,1.1,TRUE).

в) Вероятността грешката да бъде между 7 и 8 е

=NORMDIST(8,7,1.1,TRUE)–NORMDIST(7,7,1.1,TRUE)

или втори начин =NORMDIST(8,7,1.1,TRUE)–0.5. ▲

3. Да се реши задача **2.** от урок 4.3., като се използва функцията NORMDIST.

4. Потърсете допълнителна информация или създайте примери, които да решите с използване на функцията NORMDIST.

III. Статистически изводи

1) Функцията NORMSINV

NORMSINV(P)

При зададена вероятност P функцията изчислява съответната стойност на z.

Може да се използва за пресмятане на критичните стойности $z_{\frac{\alpha}{2}}$ при зададено ниво на значимост α. Функцията разпределя площта α на две равни части, разположени в „опашките на кривата" и дава левия край на интервала.

Пример 1. В таблицата е показано пресмятането на $-z_{\frac{\alpha}{2}}$ за двустранна критична област при различни стойности на α.

	A	B	C
1	α	Критична стойност $z_{\frac{\alpha}{2}}$	
2	0.1	=NORMSINV(A2)	
3	0.05	=NORMSINV(A3)	
4	0.01	=NORMSINV(A4)	

Резултат

	A	B	C
2	0.1	-1.64	
3	0.05	-1.96	
4	0.01	-2.58	

▲

1. Пресметнете критичната стойност z_α за едностранна критична област при ниво на значимост α, равно на 0.05, 0.2, 0.02, 0.1, 0.01, като използвате функцията NORMSINV(P).

Направете чертежи, които да показват двустранна, лявостранна и дясностранна критична област при изброените нива на значимост.

2. Направете извод в задачите от урок 5.1. и 5.2. при ниво на значимост α, равно на 0.2, 0.02, 0.1, 0.01.

3. Потърсете допълнителна информация или създайте примери, които да решите и направите извод при различни нива на значимост.

IV. Линеен модел на корелационна зависимост

Функция SLOPE

Параметри SLOPE(Ry,Rx)

Ry – област от клетки от работния лист на електронната таблица, които съдържат ординатите y_i на дадените точки.

Rx – област от клетки от работния лист на електронната таблица, които съдържат абсцисите x_i на дадените точки.

Функцията изчислява коефициентът b_1 на регресионната права.

Функция INTERCEPT

Параметри INTERCEPT(Ry,Rx)

Ry – област от клетки от работния лист на електронната таблица, които съдържат ординатите y_i на дадените точки.

Rx – област от клетки от работния лист на електронната таблица, които съдържат абсцисите x_i на дадените точки.

Функцията изчислява коефициентът b_0 на регресионната права.

Пример. За задача 1 от урок 6.1 изчисленията може да се направят така.

	A	B	C	D
1	Семейство	Брой книги в библиотеката – x_i	Брой прочетени книги – y_i	
2	*I*	20	9	
3	*II*	40	12	
4	*III*	60	22	
5	*IV*	80	29	
6	*V*	100	35	
7	Коефициент b_1	=SLOPE(C2:C6,B2:B6)		
8	Коефициент b_0	=INTERCEPT(C2:C6,B2:B6)		

Резултат

7	Коефициент b_1	0.345		
8	Коефициент b_0	0.7		
9	Прогноза	120	=B8+B7*B9	

Резултат

9	Прогноза	120	42.1	

▲

1. Потърсете допълнителна информация или създайте примери, които да решите с използване на функциите SLOPE и INTERCEPT.

Отговори – Модул III

1. Приложения на математическия анализ

1.0. Математически анализ - преговор..5

1. а) $-\frac{1}{6}$; б) 2; в) 6; г) 2; д) 0; е) 3; **3.** -4; **4.** Прекъсната при $x=0$;

5. а) $6x^2-6x+m^2$; б) $\frac{x}{\sqrt{x^2+5m}}$; в) $-\frac{\cos x}{a\sin^2 x}$; г) $-\frac{1}{4\sqrt[4]{ax^5}}$; д) $\frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+1\right)}$; е) $\frac{-4}{(x-2)^2}$;

6. а) $5e^x$; б) $2e^{2x}+2x$; в) $e^x(x^2+2x+3)$; г) $-\frac{a}{x^2}e^{\frac{a}{x}}$; д) $\frac{-2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$; е) $-e^{-x}$;

7. а) $2^x\ln 2$; б) $2x+2^x\ln 2$; в) $\frac{2x^3+3^x(x\ln 3-1)}{x^2}$; г) $2e^{2x}+4^x\ln 4$; д) $2\ln 5.5^{2x-1}$;

е) $\frac{3^x(\ln 3.x-3)}{x^4}$; **8.** а) $\frac{x+1}{x}$; б) $\ln x+1$; в) $\frac{1}{x+1}$; г) $\frac{2}{x}$; д) $\frac{2x}{x^2+1}$; е) $\frac{1}{x\ln x}$; ж) $\frac{2\ln x}{x}$; з) $-\frac{1}{x\ln^2 x}$;

и) $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$; к) $e^x\frac{x\ln x+1}{x}$; л) $\frac{2x+2}{x^2+2x-3}$; м) $\frac{1}{2x\sqrt{1+\ln x}}$; **9.** а) $e^x(x^2+4x+7)$; б) $\frac{2x+2}{x^2+2x+5}$;

10. а) $\frac{1}{x\ln 10}$; б) $\frac{2x}{(x^2+3)\ln 3}$; в) $\log_2 x+\frac{1}{\ln 2}$; г) $\frac{1}{\ln^2 2.x.\log_2 x}$;

11. а) $\frac{1}{x}$; б) $-\frac{1}{x}$; в) $\frac{1-x^2}{x(x^2+1)}$; г) $\frac{2}{2x-3}-\frac{3}{3x+2}$; д) $\frac{1}{x+1}+\frac{\cos x}{\sin x}$; **12.** а) 54; б) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$;

Входно ниво – Тест 1 и Тест 2 10

Тест 1. **1.** $-\frac{1}{2}$; **2.** $\frac{5}{6}$; **3.** $\frac{2}{3}$; **4.** $-\frac{10}{7}$; **5.** $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$; **6.** $\frac{3}{2\sqrt{x}}+\frac{2}{x^2}$; **7.** $e^x(4x^2+1)$; **8.** $\frac{3}{x(x+3)}$; **9.** 2;

Оценяване. За всеки верен отговор по 2 точки. Оценка = (получени точки.100/18).

Тест 2. **1.** 8; **2.** 1; **3.** $-\infty$; **4.** 2 и 3; **5.** 651; **6.** $-\frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x}$; **7.** $\frac{2x}{5-x^2}$; **8.** 1; **9.** 0;

Оценяване. За всеки верен отговор по 2 точки. Оценка = (получени точки.100/18).

1.1. Геометричен смисъл на понятието производна...11

2. а) $5x-y-3=0$; б) $x+2y-7=0$; в) $6\ln 3x-y+3=0$; г) $x-4y+8\ln 2-3=0$;

д) $6(\sqrt{3}-1)x-12y+6(\sqrt{3}+1)-\pi(\sqrt{3}-1)$; **3.** а) 1; 4; б) $-\frac{1}{3}$; 1; **4.** а) $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\sqrt{3}x+3y-2\sqrt{3}=0$; б) (0, 1), $y=1$; в) $(1,0)$, $x=1$; $(-1,0)$, $x=-1$; **5.** а) $4x+4y-7=0, \alpha=\frac{3\pi}{4}$;

б) $(2\sqrt{2}+3)x-y+3=0$, $\mathrm{tg}\alpha=2\sqrt{2}+3$; в) $4x-2y+2-\pi=0, \mathrm{tg}\alpha=2$; г) $x+y+4=0, \mathrm{tg}\alpha=-1$;

д) $y=1, \alpha=0$; е) $x-y+1=0, \alpha=\frac{\pi}{4}$; ж) $x-y-1=0, \alpha=\frac{\pi}{4}$;

6. а) $(1;-3)$, $(2;-4)$; б) $(-1;-1), (0;0)$; в) $\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$; г) $(0, 1)$, $(\pi,-1)$, $(2\pi,1)$;

д) $(-1;20), (\sqrt{3};-24(\sqrt{3}+1)), (-\sqrt{3};24(\sqrt{3}-1))$; **7.** а) $a=2$; б) $a=-\frac{1}{2}$;

1.2. Производни на функции от по-висок ред. Втора производна на функция 14

2. а) $\frac{-12}{(x-1)^4}$; б) $\frac{114}{(x+5)^4}$; в) $\frac{6c^2(ad-bc)}{(cx+d)^4}$; **3.** а) $\frac{-2}{x^2}$; б) $e^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^3})$;

3. а) Расте в $(-\infty;-4)$, намалява в $(-4;2)$, расте в $(2;+\infty)$; б) Расте в $(-\infty;+\infty)$; в) Расте в $(-\infty;+\infty)$; г) Намалява в $(-\infty;-2)$, расте в $(-2;3)$, намалява в $(3;+\infty)$; д) Намалява в $(-\infty;-3)$, расте в $(-3;-1)$, намалява в $(-1;2)$, расте в $(2;+\infty)$; е) Расте в $(-\infty;-1)$, намалява в $(-1,1)$, расте в $(1;+\infty)$; ж) Расте в $(-\infty;+\infty)$; з) Расте в $(-\infty;-1)$, намалява в $(-1;-\frac{2\sqrt{5}}{5})$, расте в $(-\frac{2\sqrt{5}}{5};\frac{2\sqrt{5}}{5})$, намалява в $(\frac{2\sqrt{5}}{5};1)$, расте в $(1;+\infty)$;

4. а) Расте в $(-\infty;-1)$, намалява в $(-1;0)$, намалява в $(0;1)$, расте в $(1;+\infty)$; б) Намалява в $(-\infty;-1)$, расте в $(-1;1)$, намалява в $(1;+\infty)$; в) Намалява в $(-\infty;0)$, расте в $(0;+\infty)$; г) Расте в $(-\infty;-1)$, расте в $(-1;0)$, намалява в $(0;1)$, намалява в $(1;+\infty)$;

5. а) Расте в $(-1;0)$, намалява в $(0;1)$; б) Намалява в $(-\infty;-3)$, расте в $(1;+\infty)$; в) Расте в $(2,\frac{5}{2})$; намалява в $(\frac{5}{2},3)$; г) Намалява в $(-\infty;1)$, расте в $(3;+\infty)$; д) Расте в $(-\sqrt{3},0)$; намалява в $(0,\sqrt{3})$;е) Намалява в $(-\infty;0)$, расте в $(0;+\infty)$;

6. а) Намалява в $(-\infty;-1)$, расте в $(0;+\infty)$; б) Намалява в $(-\infty;-\frac{1}{2})$, расте в $(-\frac{1}{2};+\infty)$;
в) Намалява в $(-\infty;-1)$, расте в $(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2})$; намалява в $(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty)$;

2. а) $f_{\max}=f(2)=29$, $f_{\min}=f(3)=28$; б) $f_{\min}=f(2)=-191$, $f_{\max}=f(3)=-188$, $f_{\min}=f(4)=-191$; в) $f_{\max}=f(-2)=145$, $f_{\min}=f(2)=-143$; **4.** а) $f_{\max}=f(-3)=-9$, $f_{\min}=f(1)=-1$; б) Функцията няма локални екстремуми; в) $f_{\max}=f(\frac{\pi}{18})=\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$; **5.** а) расте в $(-\infty,-2)$; намалява в $(-2,\,0)$; расте в $(0,+\infty)$; $f_{\max}=f(-2)=3$; $f_{\min}=f(0)=-1$; б) расте в $(-\infty,1)$; расте в $(1,\frac{3}{2})$; намалява в $(\frac{3}{2},2)$; намалява в $(2,+\infty)$; $f_{\max}=f\left(\frac{3}{2}\right)=-3$.; в) намалява в $(-\infty,-1)$; намалява в $(-1,\,3)$; намалява в $(3,+\infty)$; няма локални екстремуми;

9. а) $\max\limits_{[-3,3]} f(x)=f_{\max}=f(-2)=17$, $\min\limits_{[-3,3]} f(x)=f_{\min}=f(2)=-15$;
б) $\max\limits_{[-3,4]} f(x)=f_{\max}=f(-2)=f(4)=17$, $\min\limits_{[-3,4]} f(x)=f_{\min}=f(2)=-15$; в) $\max\limits_{[-3,5]} f(x)=f(5)=66$, $\min\limits_{[-3,5]} f(x)=f_{\min}=f(2)=-15$; **10.** $\max\limits_{[-2,3]} f(x)=f_{\max}=f(2)=392$, $\min\limits_{[-2,3]} f(x)=f_{\min}=f(-1)=-391$;

14. $\frac{\sqrt{5}}{5}$; **15.** а) $\ln 3$; б) $2\ln\frac{3}{2}$; **16.** а) 1; б) 0; в) $\frac{1}{2}+\ln 2$; **17.** а) $\min\limits_{[-1,1]} f(x)=f_{\min}=f(0)=1$, $\max\limits_{[-1,1]}=f(-1)=\frac{281}{30}$; б) $\min\limits_{[0,2]} f(x)=f_{\min}=f(0)=1$, $\max\limits_{[0,2]}=f(1)=\frac{49}{30}$; в) $\min\limits_{[1,4]} f(x)=f(4)=-\frac{97}{15}$, $\max\limits_{[1,4]} f(x)=f_{\max}=f(3)=\frac{19}{10}$; **18.** а) $\min\limits_{[-2,-1]} f(x)=f_{\min}=f(\frac{-1-\sqrt{3}}{2})=\frac{-9-6\sqrt{3}}{4}$, $\max\limits_{[-2,-1]} f(x)=f(-2)=0$; б) $\min\limits_{[-1,1]} f(x)=f(-1)=-4$, $\max\limits_{[-1,1]}=f_{\max}=f(\frac{-1+\sqrt{3}}{2})=\frac{-9+6\sqrt{3}}{4}$;
в) $\min\limits_{[-1,2]} f(x)=f(-1)=-4$, $\max\limits_{[-1,2]}=f(2)=8$; **19.** а) намалява в $(-\infty,-\frac{3}{2})$, расте в $(-\frac{3}{2},+\infty)$; $f_{\min}=f(-\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{7}}{2}$; б) намалява в $(-\infty,-2)$, расте в $(-2,+\infty)$; $f_{\min}=f(-2)=0$;

в) намалява в $(-\infty,-4)$, расте в $(-1,+\infty)$; няма локални екстремуми;

20. а) $\max f(x)=f(\frac{1}{2})=\frac{2\sqrt{11}}{11}$; б) $\min f(x)=f(1)=1$; в) $\min f(x)=f(-3)=\frac{1}{2}$;

г) $\max f(x)=f(1)=1$; **21.** $\max\limits_{[0,\frac{\pi}{2}]} f(x)=f(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\min\limits_{[0,\frac{\pi}{2}]} f(x)=f(0)=f(\frac{\pi}{2})=1$;

22. а) расте в $[-1,0]$, намалява в $[0,1]$; $\max\limits_{[-1,1]} f(x)=f(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\min\limits_{[-1,1]} f(x)=f(-1)=f(1)=\frac{\sqrt{3}}{3}$;

б) намалява в $[-1,0]$, расте в $[0,1]$; $\min\limits_{[-1,1]} f(x)=f(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\max\limits_{[-1,1]} f(x)=f(-1)=f(1)=1$;

2. а) $f(x)$ е вдлъбната в $(-\infty,-1)$, изпъкнала в $(-1,2)$, вдлъбната в $(2,3)$ и изпъкнала в $(3,+\infty)$; б) $f(x)$ е изпъкнала в $(-\infty,+\infty)$; в) $f(x)$ е вдлъбната в $(-\infty,-3)$, изпъкнала в $(-3,-2)$ и вдлъбната в $(-2,+\infty)$;

3. а) $x=-\frac{1}{2}$; б) Няма инфлексни точки; в) $x=1$, $x=2$; **5.** а) $f_{\min}\left(\frac{1}{4}\right)=-8\frac{139}{256}$; изпъкнала в $(-\infty,-2)$, вдлъбната в $(-2,-\frac{1}{2})$; изпъкнала в $(-\frac{1}{2},+\infty)$ инфлексни точи $(-2,0)$ и $(-\frac{1}{2},-5\frac{1}{16})$;

б) $f_{\max}=f(-1)=1$; $f_{\min}=f\left(\frac{7}{3}\right)=-\frac{473}{27}$; вдлъбната в $(-\infty,\frac{2}{3})$; изпъкнала в $(\frac{2}{3},+\infty)$; инфлексна точка $(\frac{2}{3},\frac{-223}{27})$;

в) $f_{\min}=f(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{\sqrt{2}}{4}$, $f_{\max}=f(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{4}$, вдълбната в $(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{2})$, изпъкнала в $(-\frac{\sqrt{6}}{2},0)$, вдлъбната в $(0,\frac{\sqrt{6}}{2})$, изпъкнала в $(\frac{\sqrt{6}}{2},+\infty)$; инфлексни точки $(-\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{8})$, $(0,0)$, $(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{8})$;

2. а) $x=1$ – вертикална асимптота при $x\to 1$ отляво и отдясно, $y=1$ е хоризонтална асимптота при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$;
б) $x=-2$ – вертикална асимптота $x\to-2$ отляво и отдясно, $y=3$ е хоризонтална асимптота при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$;
в) $x=-\frac{1}{2}$ – вертикална асимптота $x\to-\frac{1}{2}$ отляво и отдясно, $y=1$ е хоризонтална асимптота при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$;
г) $x=2$ – вертикална асимптота $x\to 2$ отляво и отдясно, $y=-3$ е хоризонтална асимптота при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$;
3. а) $\max\limits_{(-\infty,+\infty)}=f_{\max}=f(6)=1$; инфлексия при $x=6-\sqrt{2}$ и $x=6+\sqrt{2}$; $y=0$ е хоризонтална асимптота при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$;
б) $\max\limits_{(-\infty,+\infty)}=f_{\max}=f(4)=1$; инфлексия при $x=4-\sqrt{3}$ и $x=4+\sqrt{3}$; $y=0$ е хоризонтална асимптота при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$;
в) $\max\limits_{(-\infty,+\infty)}=f_{\max}=f(0)=1$; инфлексия при $x=-1$ и $x=1$; $y=0$ е хоризонтална асимптота при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$; **4.** а) $d=0$; б) $d>0$, $d\neq\frac{5}{3}$; в) $d<0$; **5.** а) $a\in(1,+\infty)$; б) $a\in(-\infty,o)$; в) $a\in(0,1)$; г) няма такива a;.

1.8. Допирателни. Допирателни към криви от втора степен..30

2. а) $x+y=4$; б) $x+y=6$; в) $3x+y=11$; г) $x+2y+22=0$, нормалното уравнение на окръжността е $(x-4)^2+(y+8)^2=20$;

4. а) $3x+4y+21=0$ в т. $(1,-6)$, $4x-3y+3=0$ в т. $(-6,-7)$; б) $3x+y+25=0$ в т. $(-5,-10)$, $x-3y-45=0$ в т. $(3,-14)$, нормалното уравнение на окръжността е $(x-1)^2+(y+8)^2=40$; в) $x-6y-25=0$ в т. $(7,-3)$, $6x+y-76=0$ в т. $(12,4)$;

5. а) $(3,3)$; допирателна в $(5,-1)$ е $2x+y-9=0$, допирателна в $(-1,1)$ е $x-2y+3=0$;

б) $(0,1)$; нормалното уравнение на окръжността е $(x-1)^2+(y-8)^2=25$; допирателна $4x+3y-3=0$ в $(-3,5)$, допирателна $3x-4y+4=0$ в $(4,4)$;

в) $(-7,6)$; нормалното уравнение на окръжността е $x^2+(y-5)^2=25$ допирателна $3x-4y+45=0$ в $(-3,9)$, допирателна $4x+3y+10=0$ в $(-4,2)$;

г) $(-8,15)$; допирателна $x+2y-22=0$ в $(4,9)$, допирателна $2x+y-1=0$ в $(-2,3)$;

7. а) $x+y\pm10=0$; б) $y=\pm3$; в) $x+y-8=0$, $x+y+16=0$; **8.** В; **9.** А; **10.** Г;

12. а) $3x+y-12=0$; б) $4x+y-19=0$, каноничното уравнение на елипсата е $\frac{x^2}{19}+\frac{y^2}{57}=1$; в) $2\sqrt{2}x-y-10=0$; г) $x=2$, каноничното уравнение на елипсата е $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$;

14. а) $3x+2y-20=0$, $(2,4;6,4)$ и $x=4$, $(4,0)$; б) $2x+y-16=0$, $(6,4)$ и $y=8$, $(0,8)$; в) $3x-2y+25=0$, $(-3,8)$ и $8x+3y-50=0$, $(4,6)$; г) $x-2y+4=0$, $(-1;1,5)$ и $x+2y-4=0$, $(1;1,5)$; **15.** а) $(0,3)$; б) $(3,6)$; в) $(7,1)$; г) $(-14,0)$; **17.** а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$; б) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$; в) $\frac{x^2}{3}+y^2=1$; г) $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{9}=1$; **19.** а) $\frac{x^2}{42}+\frac{y^2}{7}=1$; б) $\frac{x^2}{90}+\frac{y^2}{15}=1$;

20. а) $x+6y-24=0$ и $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{12}=1$, допирна точка $(6,3)$; $x-2y-4=0$ и $\frac{x^2}{12}+y^2=1$, допирна точка $(3,-\frac{1}{2})$; б) $x+6y-12=0$ и $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{3}=1$, допирна точка $(3,\frac{3}{2})$; $x+2y-12=0$ и $\frac{x^2}{108}+\frac{y^2}{9}=1$, допирна точка $(9,\frac{3}{2})$;

21. а) $2x-9y-6=0$; б) $x-y-6=0$; в) $3x-4y-10=0$; г) $2x-3y-7=0$;

22. а) $11x+14y+48=0$, $(\frac{22}{3},\frac{7}{3})$ и $3x-2y-16=0$, $(6,1)$; б) $x=6$, $(6,0)$ и $5x-8y+18=0$, $(-10,-4)$; в) $7x+2y+48=0$. $(-7,\frac{1}{2})$ и $x-y-6=0$, $(8,2)$; **23.** а) $(-1,1)$; б) $(-9,-5)$; в) $(2,2)$; г) $(12,6)$; **25.** а) $\frac{x^2}{68}-\frac{y^2}{17}=1$; б) $\frac{x^2}{76}-\frac{y^2}{19}=1$; в) $\frac{x^2}{45}-\frac{y^2}{9}=1$; **26.** а) $\frac{x^2}{28}-\frac{y^2}{7}=1$; б) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$;

27. а) $2x-3y-11=0$ и $\frac{x^2}{55}-\frac{y^2}{11}=1$ допирна точка $(10,3)$; $2x+3y+10=0$ и $\frac{x^2}{70}-\frac{y^2}{20}=1$ допирна точка $(-14,6)$; б) $x+2y+6=0$ и $\frac{x^2}{84}-\frac{y^2}{12}=1$ допирна точка $(-14,4)$; $x+y+6=0$ и $\frac{x^2}{60}-\frac{y^2}{24}=1$ допирна точка $(-10,4)$; **29.** а) $2x-y+2=0$; б) $6x+y+4=0$; в) $10x-y-52=0$; г) $4x+y+10=0$; **31.** а) $2x-y+3=0$, $4x-y-3=0$; б) $x+y+7=0$, $x-y-1=0$; в) $x+y=0$, $3x-y=0$; г) $12x+y-6=0$, $8x-y+6=0$; **32.** а) $(3,3)$; б) $(2,6)$; в) $(-6,6)$; г) $(-4,-12)$;

34. а) $y=x^2+4x-5$; б) $y=x^2+8x+8$; в) $y=x^2+3$;

35. а) $(2,4)$; б) $(3,10)$; в) $(-2,-12)$; г) $(2,3)$;

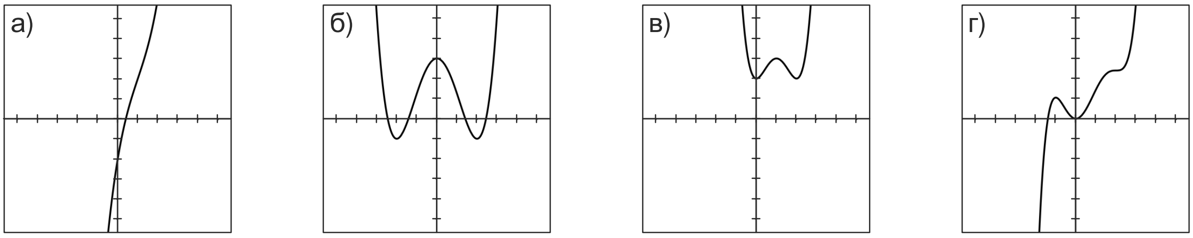
1.9. Изследване на полиномни функции. Графика 39

2. а) растяща в $(-\infty,+\infty)$, инфлексия в $(1,\ 2)$;

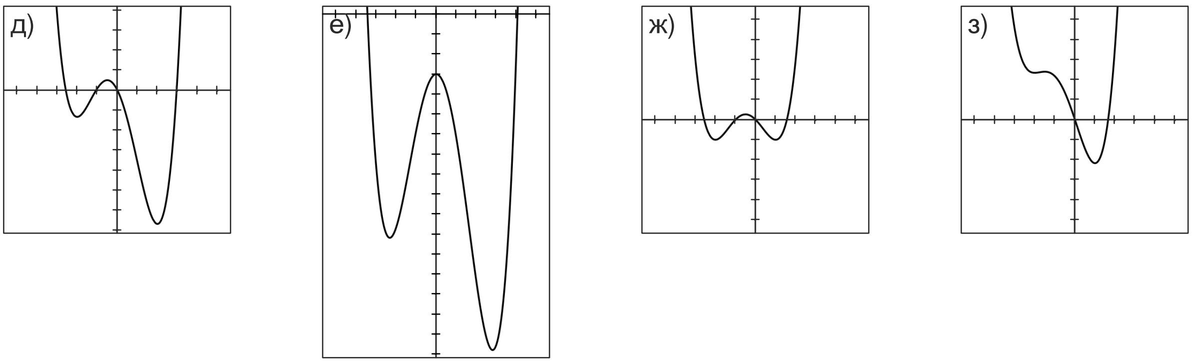
б) четна, $f_{\min}=f(-2)=f(2)=-1$, $f_{\max}=f(0)=3$; инфлексия при $x_{1,2}=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$;

в) $f_{\min}=f(0)=f(2)=2$, $f_{\max}=f(1)=3$; инфлексия при $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$;

г) $f_{\max}=f(-1)=\dfrac{21}{20}$; $f_{\min}=f(0)=0$, инфлексия в $x_1=\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}$, $x_2=\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$, $x_3=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$;



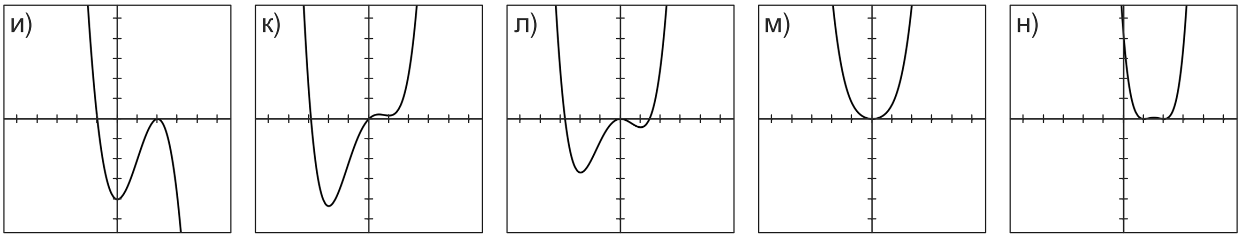
д) $f_{\min}=f(-2)=-\dfrac{4}{3}$, $f_{\max}=f(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{95}{192}$, $f_{\min}=f(2)=-\dfrac{20}{3}$; инфлексни точки при $x_1=-\dfrac{4}{3}$ и $x_2=1$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$; е) $f_{\min}=f(-2)=-\dfrac{5}{3}$, $f_{\max}=f(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{139}{192}$, $f_{\min}=f(3)=-\dfrac{45}{2}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$; ж) $f_{\min}=f(-2)=f(1)=-1$, $f_{\max}=f(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{17}{64}$, инфлексия в $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$; з) $f_{\min}=f(-2)=\dfrac{7}{3}$, $f_{\max}=f(-\dfrac{3}{2})=\dfrac{153}{64}$, $f_{\min}=f(1)=-\dfrac{13}{6}$, инфлексия в $x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{31}}{6}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$;



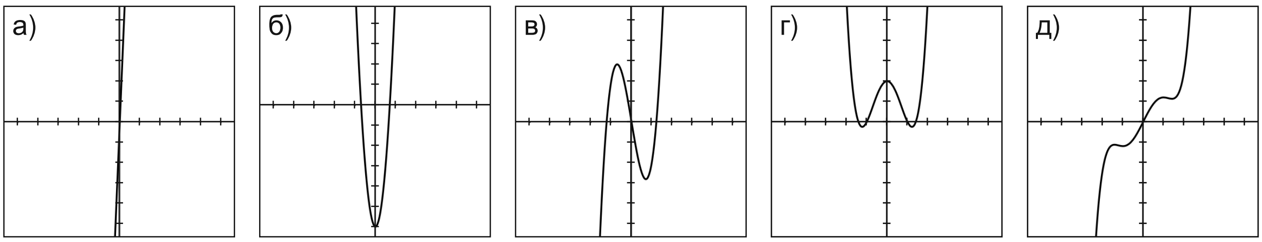
и) $f_{\min}=f(0)=-4$, $f_{\max}=f(2)=0$, инфлексия в $(1,-2)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$;

к) $f_{\min}=f(-2)=-\dfrac{13}{3}$, $f_{\max}=f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{43}{192}$, $f_{\min}=f(1)=\dfrac{1}{6}$; инфлексия в $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{31}}{6}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$; л) $f_{\min}=f(-2)=-\dfrac{8}{3}$, $f_{\max}=f(0)=0$, $f_{\min}=f(1)=-\dfrac{5}{12}$; инфлексия в $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$; м) четна, $f_{\min}=f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$, няма инфлексни точки;

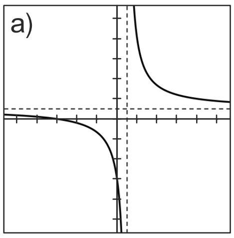
н) $f_{\min}=f(1)=f(2)=0$, $f_{\max}=f(\dfrac{3}{2})=\dfrac{1}{16}$; инфлексия при $x_{1,2}=\dfrac{9\pm\sqrt{3}}{6}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$;

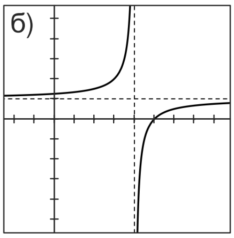


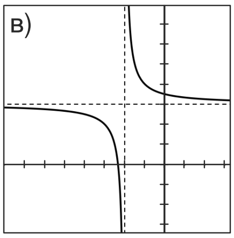
3. а) $f'^{v}(x) = 24x$, растяща в $(-\infty,+\infty)$, права;
б) $f'''(x) = 12x^2 - 6$; четна; намаляваща в $(-\infty,0)$, растяща в $(0,+\infty)$; изпъкнала в $(-\infty,+\infty)$; $f'''_{\min} = f'''(0) = -6$; в) $f''(x) = 4x^3 - 6x$; нечетна; растяща в $(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$, намаляваща в $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, растяща в $(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$; вдлъбната в $(-\infty,0)$, изпъкнала в $(0,+\infty)$; инфлексна точка $(0,0)$; $f''_{\max} = f''(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2}$, $f''_{\min} = f''(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -2\sqrt{2}$; г) $f'(x) = x^4 - 3x^2 + 2$; четна; намаляваща в $(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{2})$, растяща в $(-\frac{\sqrt{6}}{2},0)$, намаляваща в $(0,\frac{\sqrt{6}}{2})$, растяща в $(\frac{\sqrt{6}}{2},+\infty)$; изпъкнала в $(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$, вдлъбната в $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, изпъкнала в $(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$, инфлексни точки $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{4})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{4})$; $f'_{\min} = f'(-\frac{\sqrt{6}}{2}) = f(\frac{\sqrt{6}}{2}) = -\frac{1}{4}$, $f'_{\max} = f'(0) = 2$;
д) нечетна, растяща в $(-\infty,-\sqrt{2})$, намаляваща в $(-\sqrt{2},-1)$, растяща в $(-1,1)$, намаляваща в $(1,\sqrt{2})$, растяща в $(\sqrt{2},+\infty)$; вдлъбната в $(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{2})$, изпъкнала в $(-\frac{\sqrt{6}}{2},0)$, вдлъбната в $(0,\frac{\sqrt{6}}{2})$, изпъкнала в $(\frac{\sqrt{6}}{2},+\infty)$; инфлексни точки $(-\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{19\sqrt{6}}{40})$, $(0,0)$, $(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{19\sqrt{6}}{40})$; $f_{\max} = f(-\sqrt{2}) = -\frac{4\sqrt{2}}{5}$, $f_{\min} = f(-1) = -\frac{6}{5}$, $f_{\max} = f(1) = \frac{6}{5}$, $f_{\min} = f(\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{5}$;

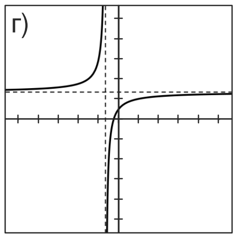


2 а) вертикална асимптота $x = 1$, хоризонтална асимптота $y = 2$; вдлъбната в $(-\infty,1)$, изпъкнала в $(1,+\infty)$; б) вертикална асимптота $x = 4$, хоризонтална асимптота $y = 1$; изпъкнала в $(-\infty,4)$, вдлъбната в $(4,+\infty)$; в) вертикална асимптота $x = -2$, хоризонтална асимптота $y = 3$; вдлъбната в $(-\infty,-2)$, изпъкнала в $(-2,+\infty)$; г) вертикална асимптота $x = -\frac{2}{3}$, хоризонтална асимптота $y = \frac{4}{3}$; изпъкнала в $(-\infty,-\frac{2}{3})$, вдлъбната в $(-\frac{2}{3},+\infty)$;

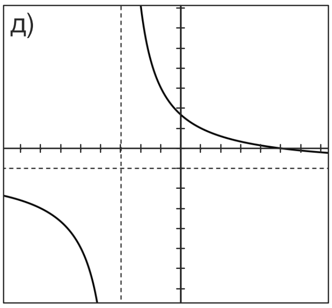


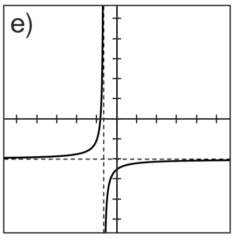


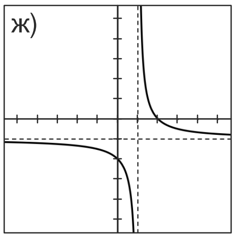


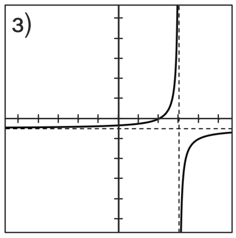


д) вертикална асимптота $x=-3$, хоризонтална асимптота $y=-1$; вдлъбната в $(-\infty,-3)$, изпъкнала в $(-3,+\infty)$; е) вертикална асимптота $x=-\dfrac{2}{3}$, хоризонтална асимптота $y=-2$; изпъкнала в $(-\infty,-\dfrac{2}{3})$, вдлъбната в $(-\dfrac{2}{3},+\infty)$; ж) вертикална асимптота $x=1$, хоризонтална асимптота $y=-1$; вдлъбната в $(-\infty,1)$, изпъкнала в $(1,+\infty)$; з) вертикална асимптота $x=3$, хоризонтална асимптота $y=-\dfrac{1}{2}$; изпъкнала в $(-\infty,3)$, вдлъбната в $(3,+\infty)$;

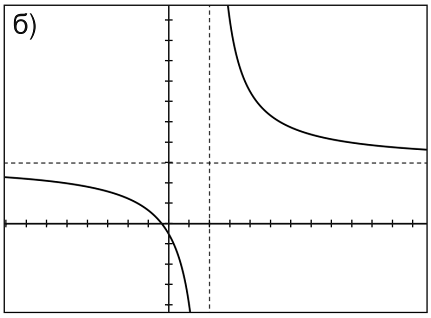




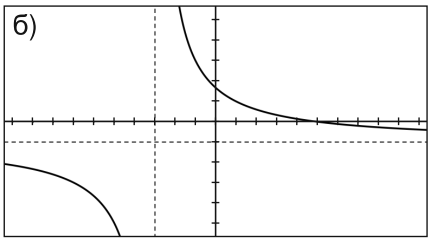




3. а) Няма локални екстремуми, вертикална асимптота $x=2$; б) $f'(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$; намалява в $(-\infty,2)$ и в $(2,+\infty)$, вдлъбната в ; $(-\infty,2)$, изпъкнала в $(2,+\infty)$; вертикална асимптота $x=2$, хоризонтална асимптота $y=3$;



4. а) $f_{\max}=f(5)=24\ln 2$, вертикална асимптота $x=-3$; б) $f'(x)=\dfrac{5-x}{x+3}$; намалява в $(-\infty,-3)$ и в $(-3,+\infty)$, вдлъбната в ; $(-\infty,-3)$, изпъкнала в $(-3,+\infty)$; вертикална асимптота $x=-3$, хоризонтална асимптота $y=-1$;



5. а) $k=2$; б) за всяко $k\neq-16$; в) няма такива k; г) $k=-7$;
6. а) $k<1$; б) $k>1$;

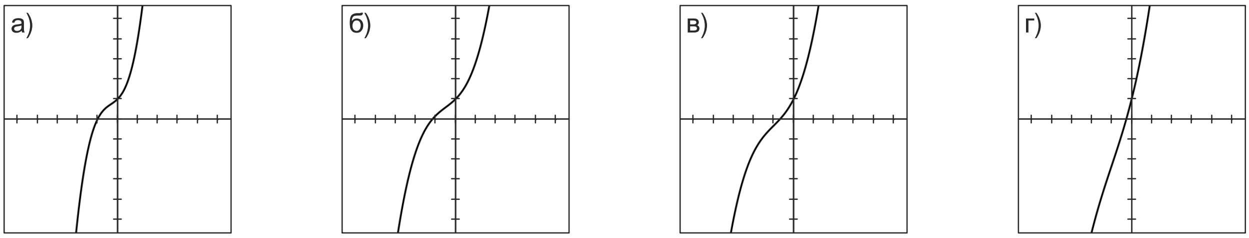
1. -16; **2.** 12; **3.** $3x+4y-3=0$; **4.** $2x+1$; **5.** $1,\ \dfrac{5}{3}$; **6.** $(\dfrac{5}{2},1)$; **7.** а) Намалява в $\left(-\infty,\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)$, расте в $\left(\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$, намалява в $\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2},2\right)$, расте в $(2,+\infty)$; б) Намалява в $(-\infty,-3)$, расте в $(0,+\infty)$; в) Намалява в $(-\infty,0)$, расте в $(2,+\infty)$; г) Расте в $(-\infty,-5-\sqrt{13})$, намалява в $(-5-\sqrt{13},5+\sqrt{13})$, расте в $(5+\sqrt{13},+\infty)$;

8. а) Расте в $(-\infty,1)$, расте в $(1,2)$, намалява в $(2,3)$, намалява в $(3,+\infty)$, $f_{\max}=f(2)=0$;
б) Расте в $(-\infty,-1)$, расте в $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$, намалява в $\left(\frac{1}{2},2\right)$, намалява в $(2,+\infty)$, $f_{\max}=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{11}{9}$;
в) Намалява в $(-\infty,2)$, намалява в $(2,5)$, намалява в $(5,+\infty)$, няма локални екстремуми;
г) Намалява в $(-\infty,-2)$, намалява в $(-2,3)$, намалява в $(3,+\infty)$, няма локални екстремуми;
д) Намалява в $(-\infty,0)$, расте в $(0,+\infty)$, няма локални екстремуми; е) намалява в $(0,1)$, намалява в $(1,e)$, расте в $(e,+\infty)$, $f_{\min}=f(e)=e$;

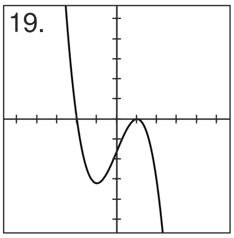
9. Расте в $(-\infty,0)$, намалява в $(0,+\infty)$, $\max\limits_{(-\infty,\infty)} f(x)=f_{\max}=f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, изпъкнала в $(-\infty,-1)$, вдлъбната в $(-1,1)$, изпъкнала в $(1,+\infty)$, инфлексни точки при $x=\pm 1$, хоризонтална асомптота $y=0$; **10.** Расте в $\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, намалява в $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$, расте в $(1,+\infty)$, $f_{\max}=f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\ln\frac{2\sqrt{3}}{9}$;

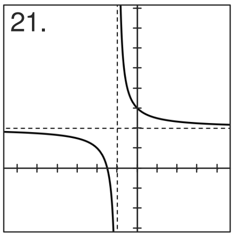
11. а) Намалява в $(-\infty,\infty)$, няма локални екстремуми, вдлъбната в $(-\infty,-1)$, изпъкнала в $(-1,1)$, вдлъбната в $(1,+\infty)$, инфлексни точки в $x=\pm 1$; б) Намалява в $(-\infty,0)$, расте в $(0,+\infty)$, $f_{\min}=f(0)=0$, вдлъбната в $(-\infty,-1)$, изпъкнала в $(-1,1)$, вдлъбната в $(1,+\infty)$, инфлексни точки $(-1,f(-1))=(-1,\ln 2)$, $(1,f(1))=(1,\ln 2)$; **13.** $f_{\min}=f(4-\sqrt{26})=\frac{-3-\sqrt{26}}{2}$, $f_{\max}=f(4+\sqrt{26})=\frac{-3+\sqrt{26}}{2}$; **14.** а) $f_{\min}=f\left(\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi\right)=-\sqrt{2}$, $f_{\max}=f\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=\sqrt{2}$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$; б) $f_{\min}=0$, $f_{\max}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$; **15.** б) $x=4k\pi$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$; **16.** Намалява в $(-\infty,-1)$, расте в $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$, намалява в $\left(-\frac{1}{2},0\right)$, расте в $(0,+\infty)$; $f_{\min}=f(-1)=1$, $f_{\max}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=e^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}$, $f_{\min}=f(0)=1$; **17.** а) растяща в $(-\infty,2)$, намаляваща в $(2,3)$, намаляваща в $(3,4)$, растяща в $(4,+\infty)$; $f_{\max}=f(2)=1$, $f_{\min}=f(4)=5$; вдлъбната в $(-\infty,3)$, изпъкнала в $(3,+\infty)$; вертикална асимптота $x=3$; б) намаляваща в $(-\infty,-1)$, растяща в $(-1,3)$, растяща в $(3,7)$, намаляваща в $(7,+\infty)$; $f_{\min}=f(-1)=-1$, $f_{\max}=f(7)=-17$; изпъкнала в $(-\infty,3)$, вдлъбната в $(3,+\infty)$; вертикална асимптота $x=3$; в) растяща в $(-\infty,-3)$, намаляваща в $(-3,-2)$, намаляваща в $(-2,-1)$, растяща в $(-1,+\infty)$; $f_{\max}=f(-3)=-4$, $f_{\min}=f(-1)=0$; вдлъбната в $(-\infty,-2)$, изпъкнала в $(-2,+\infty)$; вертикална асимптота $x=-2$;

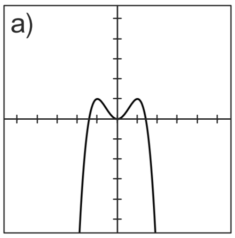
18. а) инфлексна точка $\left(-\frac{1}{3},\frac{20}{27}\right)$; б) инфлексна точка $(-\frac{1}{2},\frac{7}{12})$;
в) инфлексна точка $(-1,-\frac{1}{3})$; г) инфлексна точка $(-1,-\frac{7}{3})$;

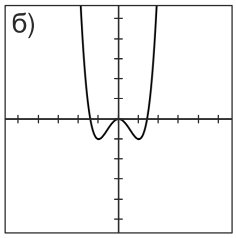


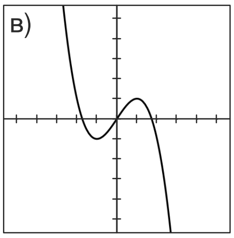
19. $y=-\frac{4}{5}x^3+\frac{12}{5}x-\frac{8}{5}$; **20.** $a=-1$ и $a=2$; **21.** чертеж; **22.** чертеж от а) до ж);

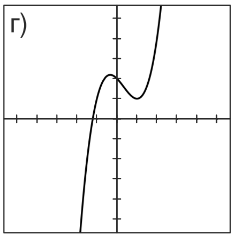
19.


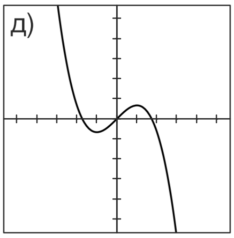
21.


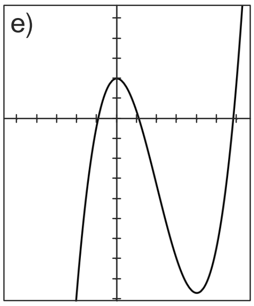
а)


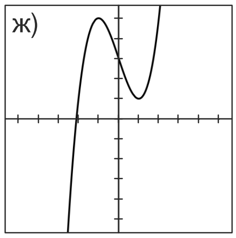
б)


в)


г)


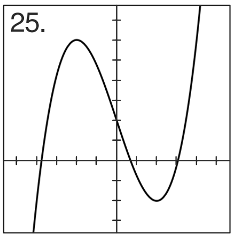
д)


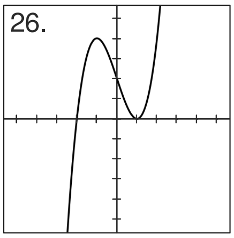
е)


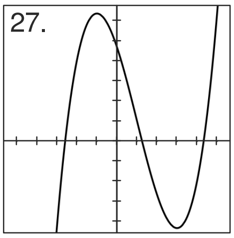
ж)


24. $p=0$, $q=3$;

25. $m=0$, $n=-3$, $y=\dfrac{x^3}{4}-3x+2$; $f_{\max}=f(-2)=6$, $f_{\min}=f(2)=-2$; инфлексна точка $(0,\ 2)$;

25.


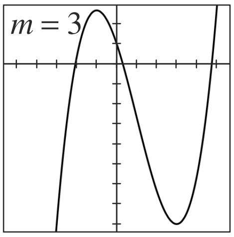
26.


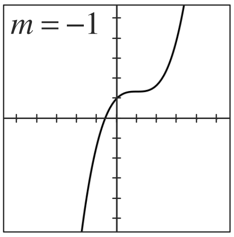
27.


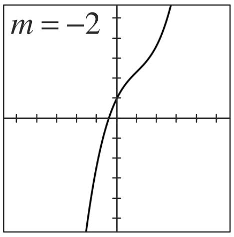
26. $m=0$, $n=-3$, $y=x^3-3x+2$; $f_{\min}=f(-1)=4$, $f_{\max}=f(1)=0$, инфлексна точка $(0,\ 2)$;

27. $m=-1$, $n=-3$, $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x+\dfrac{14}{3}$; **28.** $a\neq 2$; **29.** $a=\pm 2\sqrt[4]{3}$; **30.** $-\dfrac{1}{3}$;

31. При $m>-1$ $f(x)$ има локален максимум при $x=1-\sqrt{1+m}$ и локален минимум при $x=1+\sqrt{1+m}$; При $m\leq -1$ $f(x)$ няма локални екстремуми; При $m>-1$ $f(x)$ има локален максимум за $x=1-\sqrt{1+m}$ и локален минимум за $x=1+\sqrt{1+m}$. При всяко m $f(x)$ има инфлексна точка при $x=2$.

$m=3$


$m=-1$


$m=-2$


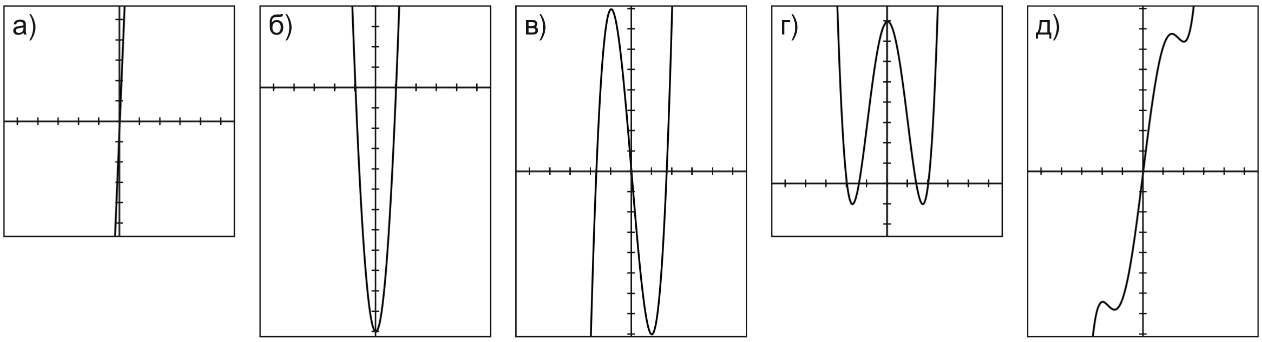
32. а) $a=3$; б) $a=7$; **33.** а) един двукратен $x_{1,2}=-\dfrac{1}{3}$ и един прост $x_3=-\dfrac{4}{3}$ корен; б) един корен в $(-2,-1)$; в) три различни корена във всеки от интервалите $(-4,-3)$, $(-3,-1)$ и $(-1,\ 0)$; г) четири корена във всеки от интервалите $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$; д) пет корена във всеки от интервалите $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$; **34.** б) 4;

35. а) $f'^{v}(x)=24x$, растяща в $(-\infty,+\infty)$, права;

б) $f''''(x)=12x^2-12$; четна; намаляваща в $(-\infty,0)$, растяща в $(0,+\infty)$; изпъкнала в $(-\infty,+\infty)$; $f''''_{\min}=f''''(0)=-12$;

в) $f''(x)=4x^3-12x$; нечетна; растяща в $(-\infty,-1)$, намаляваща в $(-1,1)$, растяща в $(1,+\infty)$; вдлъбната в $(-\infty,0)$, изпъкнала в $(0,+\infty)$; инфлексна точка $(0,0)$; $f''_{\max}=f''(-1)=8$, $f''_{\min}=f''(1)=-8$; г) $f'(x)=x^4-6x^2+8$; четна; намаляваща в $(-\infty,-\sqrt{3})$, растяща в $(-\sqrt{3},0)$, намаляваща в $(0,\sqrt{3})$, растяща в $(\sqrt{3},+\infty)$; изпъкнала в $(-\infty,-1)$, вдлъбната в $(-1,1)$, изпъкнала в $(1,+\infty)$, инфлексни точки $(-1,3)$, $(1,3)$; $f'_{\min}=f'(-\sqrt{3})=f(\sqrt{3})=-1$, $f'_{\max}=f'(0)=8$;

д) нечетна, растяща в $(-\infty,-2)$, намаляваща в $(-2,-\sqrt{2})$, растяща в $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, намаляваща в $(\sqrt{2},2)$, растяща в $(2,+\infty)$; вдлъбната в $(-\infty,-\sqrt{3})$, изпъкнала в $(-\sqrt{3},0)$, вдлъбната в $(0,\sqrt{3})$, изпъкнала в $(\sqrt{3},+\infty)$; инфлексни точки $(-\sqrt{3},-\frac{19\sqrt{3}}{5})$, $(0,0)$, $(\sqrt{3},\frac{19\sqrt{3}}{5})$; $f_{\max}=f(-2)=-\frac{32}{5}$, $f_{\min}=f(-\sqrt{2})=-\frac{24\sqrt{2}}{5}$, $f_{\max}=f(\sqrt{2})=\frac{24\sqrt{2}}{5}$, $f_{\min}=f(2)=\frac{32}{5}$;



39. При $a>\frac{9}{4}$, $\max\limits_{[0,a]} f(x)=\frac{4}{4a-9}$, при $\frac{9}{4}<a\le 3$, $\min\limits_{[0,a]} f(x)=\frac{1}{a}$, при $a>3$, $\min\limits_{[0,a]} f(x)=\frac{1}{a^2-2a}$; **40.** $\min\limits_{[-3,3]} f(x)=\frac{1098}{4096}$, $\max\limits_{[-3,3]} f(x)=9216$; **41.** $\max f(x)=1+\sqrt{2}$, $\min f(x)=-\frac{5}{4}$; **42.** $x-y-13=0$, $x-y+7=0$; **43.** $6\sqrt{5}$; **44.** а) $10x+3y-32=0$; б) $x=\sqrt{5}$; в) $7x-\sqrt{7}y-35=0$; г) $3\sqrt{5}x-10y-60=0$; д) $3x+y+18=0$; е) $x-y+6=0$;
45. а) $(-5,-1)$; б) $(2,8)$; в) $(-2,-7)$; г) $(4,2)$; **46.**Г; **47.** 90°; **48.**(−2, 0);

Приложения на математическия анализ – Тест 1 и Тест 2..54

Тест 1. **1.** $-\frac{1}{125}$; **2.** Расте в $(-\infty,-1)$, расте в $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$, намалява в $\left(-\frac{1}{2},0\right)$, намалява в $(0,+\infty)$; **3.** $x+2y-9=0$; **4.** А; **5.**Г; **6.**Г; **7.**А; **8.**Б; **9.**А; **10.** Расте в $(-\infty,-3)$, намалява в $(-3,3)$, расте в $(3,+\infty)$, $f_{\max}=f(-3)$, $f_{\min}=f(3)$, инфлексни точки в $\pm\sqrt{3}$ и $\frac{3}{2}$; **11.** $f_{\max}=f(\frac{2}{3})=\frac{1}{27}$, $f_{\min}=f(1)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, инфлексия в $(\frac{5}{6},\frac{1}{54})$.
Оценяване. За всеки верен отговор по 2 точки. Оценка =(броя на точките.100/22).

Тест 2. **1.** $\frac{-27\sqrt{6}}{8}$; **2.** Расте в $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, намалява в $(\frac{1}{2},+\infty)$; **3.** $x-8y+29=0$; **4.** Г; **5.**В; **6.**Б; **7.**А; **8.**Б; **9.**Г; **10.** Намалява в $(-\infty,-1)$, намалява в $(-1,0)$, расте в $(0,+\infty)$, $f_{\min}=f(0)=1$, вдлъбната в $(-\infty,-1)$, изпъкнала в $(-1,+\infty)$; няма инфлексни точки.
11. $f_{\max}=f(-6)=106$, $f_{\min}=f(0)=-2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, инфлексия в (−3, 52);
Оценяване. За всеки верен отговор по 2 точки. Оценка =(броя на точките.100/22).

2. Геометрични модели

2.1. Екстремални задачи в равнината..58

4. равностранният триъгълник, $3\sqrt{3}\,r^2$; **5.** равностранният триъгълник, $3\sqrt{3}\,r^2$; **6.** равностранният триъгълник, $\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$; **7.** при $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\frac{r}{R}=\sqrt{2}-1$; **9.** $2R\sin\frac{2\pi}{9}=2R\sin 40°$; **10.** $AB=2BC$, R^2; **11.** квадрат със страна $\sqrt{S}$, $4\sqrt{S}$; **12.** квадрат, $2R^2$; **13.** $\frac{\pi}{3}$, $12\sqrt{3}$; **14.** $S(x)=\frac{c^2\sin x\sin(x+\gamma)}{2\sin\gamma}$, $0<x<\pi-\gamma$, $S_{\max}=\frac{c^2\cos^2\frac{\gamma}{2}}{2\sin\gamma}$; **15.** $\frac{\pi}{3}$, $\frac{3\sqrt{3}b^2}{4}$; **16.** отсечка, успоредна на AB с дължина $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **17.** б) $\frac{\pi}{3}$;

2.2. Екстремални задачи в пространството 62

3. $\max V=\frac{2\sqrt{3}\pi R^3}{27}$ при $d=\frac{R\sqrt{3}}{3}$; **4.** $\frac{3p}{5}$ – бедра, $\frac{4p}{5}$ – основа; **5.** $\frac{12}{35}$; **6.** $\frac{2}{3}R$, $\frac{4}{27}\pi R^2H$; **7.** $V=\frac{5\pi}{3}x^2(3-x)$, $x\in(0,3)$, $V_{\max}=\frac{20\pi}{3}$; **8.** $MA=MC=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $V=\frac{4\sqrt{3}}{27}$;

2.3. Комбинации от ротационни тела 64

2. а) 684π, 2448π ; б) 5400π, 3417π; в) 5616π, 3417π; г) 2520π, 4900π; д) $\frac{13464\pi}{5}$, $\frac{31212\pi}{5}$;

4. а) 104π cm^2, $48\sqrt{3}\pi$ cm^3; б) 44π cm^2, $\frac{28\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3; **5.** а) $16{,}8\pi$, $9{,}6\pi$; б) $62{,}4\pi$, $32{,}8\pi$;

6. а) $\frac{\pi S^2}{a}$; б) $\frac{b}{a}$; **7.** $\frac{4\pi}{3}S\sqrt{2S\operatorname{tg}\alpha}$; **8.** $S_{AB}=\pi h(c+d+2b)$, $S_{CD}=\pi h(c+d+2a)$, $S_{AD}=\frac{\pi h}{c}(a^2+b^2+ad+bd)$, $V_{AB}=\frac{\pi h^2(a+2b)}{3}$, $V_{CD}=\frac{\pi h^2(2a+b)}{3}$, $V_{AD}=\frac{\pi h^2(a^2+b^2+ab)}{3c}$;

9. а) Тялото е цилиндър с $r=4$, $l=h=6$, $S_1=48\pi$, $V=96\pi$; б) Тялото се състои от пресечен конус с $r=4$, $R=8$, $h_{\text{пр.к}}=3$, $l_{\text{пр.к.}}=5$ и „върху него” цилиндър с $r=4$, $l_{\text{ц}}=h_{\text{ц}}=1$; повърхнина $S=148\pi$ и обем $V=128\pi$;

10. Тялото се състои от пресечен конус с $r=2$, $R=\frac{5}{2}$, $l_{\text{пр.к.}}=2$, $h_{\text{пр.к.}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$ и конус с $R=\frac{5}{2}$, $h_{\text{к}}=\frac{3\sqrt{15}}{2}$, $l_{\text{к}}=2\sqrt{10}$; $S=(13+5\sqrt{10})\pi$, $V=\frac{17\sqrt{15}\pi}{3}$;

11. 24 cm, 4896π cm^2. **12.** 199296π cm^2; **13.** а) $S_a>S_b>S_c$; б) $V_a>V_b>V_c$; **17.** а) $\cos\alpha=\sqrt[3]{3}-1$; б) $\frac{2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}+\sqrt{2}\sqrt{2\sqrt[3]{9}-3}}{4}$; **18.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$; **20.** $4:25$; **21.** $V_{\text{сф}}:V_{\text{к}}=1:2$;

22. $V=\frac{4}{3}\pi h^3$ или $V=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{5}-2)h^3$; **23.** $\frac{2\pi R^2(4-\sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha}$; **24.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi R^2$; **25.** $\frac{\sqrt{2}}{16}\pi d^3$; **26.** $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$;

2.4. Комбинации от многостени и сфери...69

2. 3; **3.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$; **4.** 54 cm^3; **5.** $1{,}5h$; **7.** 3; **8.** $\frac{32R^3\sin^5\alpha\operatorname{cotg}\beta\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}}{3\sin\beta}$; **11.** 7; **12.** 8; **13.** 11;

14. 18; **15.** 13; **16.** R^3; **17.** $\frac{a}{2}$; **18.** $12\sqrt{3}R^2$; **19.** $18\sqrt{3}R^2$, $6\sqrt{3}R^3$; **20.** а) $R=\frac{h}{3}$; б) $R=h(\sqrt{2}-1)$;

21. $\frac{a\sqrt{6}}{12}$; **22.** $R=\frac{ah}{a+\sqrt{12h^2+a^2}}$; **23.** $R=\frac{ah}{a+\sqrt{4h^2+a^2}}$; **26.** $\frac{h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}$;

27. $\frac{a\sqrt{2}\sin\alpha}{2}(1+\sqrt{1+\sin^2\alpha})$; **29.** $\frac{32\pi}{3}$; **30.** $15\sqrt{15}$; **31.** б) $\frac{28\sqrt{7}\pi}{3}$; **32.** $\frac{\sqrt{2}}{4\pi}$; **33.** $9+4\sqrt{2}+2\sqrt{5}$;

34. $V=\frac{8\sqrt{3}R^3}{27}$, $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$; **36.** $\frac{h}{1+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\beta}}$; **36.** $1:63$; **37.** 500; **38.** 400 cm^2;

39. $\frac{1}{\sin 2\alpha}\sqrt{\frac{B}{2\sin\varphi}}$; **40.** $\frac{8R^2\operatorname{cotg}^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha\cos\beta}$;

1. а) 420π cm^2; б) $\frac{1020}{13}\pi$ cm^2; **2.** а) $\sqrt{3}$; б) $2\sin\alpha$; **3.** а) $\frac{2}{3}\pi S\sqrt{\frac{S\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{3}\pi S\sqrt[4]{\frac{3S^2}{4}}$; б) $\frac{2\pi S\sqrt{S}}{3}$;

в) $\frac{2\pi S\sqrt{S\sin 2\alpha}}{3}$; **4.** 624π cm^2, 2112π cm^3;

5. а) 576π cm^2, 2112π cm^3; б) 912π cm^2, 2112π cm^3; в) 1426π cm^2, 4544π cm^3; г) 896π cm^2, 2604π cm^3; д) 650π cm^2, 1900π cm^3;

6. $\frac{42986\pi}{9}$ cm^2, 16020π cm^3; **7.** 6; **8.** $\frac{35}{8}$; **9.** 2; **10.** $\frac{1}{\sin 2\alpha}\sqrt{(R-r)^2+4rR\cos^2\alpha}$;

11. $V=\frac{1}{48}\pi l^3\sin^4\alpha\sin 2\alpha$, $S_1=\frac{1}{2}\pi l^2\sin^3\alpha\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{4}\right)$; **13.** $\frac{288}{625}$;

14. а) $\frac{\pi h^2}{3\sin^2\alpha}(2\sqrt{3\cos^2\alpha+1}+3\cos^2\alpha+1)$, б) $\frac{32\pi h^3}{81\sin^6\alpha}$;

15. а) $S=6B$, $V=2B\sqrt{\frac{B}{\sin 2\alpha}}.(\cos\alpha+\sin\alpha-1)$; б) $\frac{4\pi B}{\sin 2\alpha}(3+\sin 2\alpha-2(\sin\alpha+\cos\alpha))$;

16. $2\pi R^2\sin 2\alpha.\cos\alpha.(\sin\alpha+1)$, $\frac{2}{3}\pi R^3\sin^2 2\alpha.\cos^2\alpha$; **17.** а) $\frac{4000}{81}\pi$ cm^3; б) 3 cm; $\frac{7\sqrt{5}}{9}R^2$;

19. $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ или $\cos\alpha=\frac{1}{5}$; **20.** а) $\frac{8k^2.\cos\beta.\cos^2\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha}$; б) $k.\cos\beta.\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$; **21.** а) $\frac{2}{3}b^3.\cos^3\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\beta$;

б) $\frac{b}{2\sin\frac{\alpha}{2}.\sin 2\beta}$; **22.** $\frac{37}{81}R^3$, **23.** $\frac{28\sqrt{7}}{81}\pi b^3$; **24.** $\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$; **25.** $12\sqrt{3}r^3$; **26.** $\frac{4p^2(\sin\alpha+\cos\alpha-1)}{\sin\alpha+\cos\alpha+1}$;

27. $\frac{1}{3}B\sqrt{B\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right).\operatorname{cotg}\beta$; **28.** $\frac{3\sqrt{3}(\sqrt{5}-2)}{5}$; **29.** $\sqrt{2}-1$; **30.** $\frac{4}{81}\pi R^3$; **31.** $\frac{a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2}$;

32. $6B$; **33.** 1 cm; **34.** $\frac{b\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{2}$; **35.** $\frac{h(\sqrt{-\cos 2\delta}+\cos 2\delta)}{2\cos^2\delta}$; **36.** $2\sqrt{2}$; **37.** $b\sqrt{\frac{11}{15}}$; **38.** $\frac{9+\sqrt{3}}{26}$;

39. $15\sqrt{7}$ cm^3; **40.** $\frac{\sqrt{2}}{2}b^3$; **41.** $\frac{b^3}{\sqrt{3b-a}\sqrt{a^3+b^3-3a^2b+ab^2}}$; **42.** 2,5 cm; **43.** $\frac{\sqrt{3}\,l^4}{32R^3}(4R^2-l^2)$;

44. $\frac{100\sqrt{19}}{19}$; **45.** 3 cm; **46.** 2,5 cm; **47.** $\frac{13\sqrt{41}}{8}$; **48.** а) $\frac{2+\sqrt{3}}{12}(2Rh^2-h^3)$; б) $\frac{8(2+\sqrt{3})R^3}{81}$;

49. $\dfrac{R\sqrt{4\sin^2 3\alpha-1}}{2\sin 3\alpha}$;

50. а) $\dfrac{\sqrt{3}}{96}a^3\dfrac{\sin^3\dfrac{\alpha}{2}}{\sin^3\dfrac{\alpha-60°}{2}\sin^3\dfrac{\alpha+60°}{2}}$; б) $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{54}\dfrac{1}{\cos^3\dfrac{\alpha}{2}\sin^3\left(\dfrac{\alpha-60}{2}\right)\sin^3\left(\dfrac{\alpha+60}{2}\right)}$; в) $108°$;

51. $\dfrac{R^3}{3}\sin^2 2\alpha$; **52.** б) $\mathrm{tg}\angle(ABC,MBC)=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$; в) $4(7+\sqrt{34})$ cm^2, 16 cm^3;**53.** $288(2\pm\sqrt{3})$ cm^3;

54. $\dfrac{32}{81}\pi b^3$; **55.** $\dfrac{2R\sin 3\alpha}{3\sin\alpha}$; **56.** $\dfrac{b\sqrt{21}}{6}$; **57.** $\dfrac{b\sin\alpha}{4\cos^2\dfrac{\alpha}{4}}$; **58.** $\dfrac{a\sin\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$;

Геометрични модели – Тест 1 и Тест 2 87

Тест 1. **1.**А; **2.**Г; **3.** $(56+24\sqrt{3})\pi$; $\dfrac{224\sqrt{3}\pi}{3}$; **4.**Б; **5.**Г; **6.**$468\ \mathrm{cm}^2$; **7.**В; **8.** Б; **9.** 12; **10.** $\dfrac{\pi}{3}$;

Оценяване. За задачи от 1 до 9 по 2 точки, за задача 10 6 точки. Оценка =(броя на точките.100/24).

Тест 2. **1.**Г; **2.**Б; **3.** $(10+6\sqrt{3})\pi$; $\dfrac{28\sqrt{3}\pi}{3}$; **4.**В; **5.**Б; **6.**$568\ \mathrm{cm}^2$; **7.**Б; **8.** В; **9.** $\dfrac{128}{3}$; **10.** $\dfrac{\pi}{4}$;

Оценяване. За задачи от 1 до 9 по 2 точки, за задача 10 6 точки. Оценка =(броя на точките.100/24).

3. Емпирични разпределения

3.3. Емпирично разпределение и описателни статистики, изключения (аутлаери)...........92

1.

x_i	2	4	6	8
f_i	30	40	50	20
p_i	0,21	0,29	0,36	0,14

2. а)

x_i	1	2	3	4	5	7
f_i	4	4	4	5	5	2
p_i	0,17	0,17	0,17	0,21	0,21	0,07

б)

x_i	25	27	30
f_i	6	8	10
p_i	0,25	0,33	0,42

в)

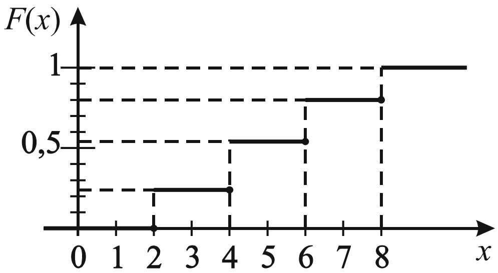
x_i	361	518	620	740
f_i	9	12	14	10
p_i	0,2	0,27	0,31	0,22

г)

x_i	23	24	25
f_i	8	21	7
p_i	0,22	0,59	0,19

3. 4; 3; 5; 4; 2;

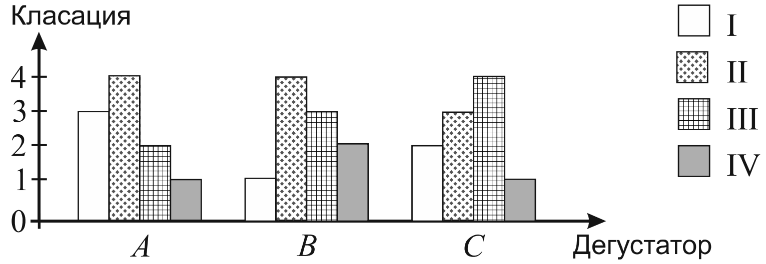
4. $F_{30}(x)=\{0,\ x\le 2;\ \ 0,23,\ 2<x\le 4;\ \ 0,53,4<x\le 6;\ \ 0,8,6<x\le 8;\ \ 1,\ 8<x\}$; **5.** $F_{21}(x)=\{0,\ x\le 1;\ \ 0,24,\ 1<x\le 2;\ \ 0,57,\ 2<x\le 3;\ \ 0,86,\ 3<x\le 4;\ \ 1,\ 4<x\}$; **6.** $F_{21}(x)=\{0,x\le 2;\ \ 0,16,2<x\le 4;\ \ 0,33,4<x\le 5;\ \ 0,53,5<x\le 8;\ \ 0,73,8<x\le 10;\ \ 0,87,10<x\le 11;\ 1,\ 11<x\}$



7. а) разходите на третата фирма са необичайно високи; б) дефектните изделия в цех E са необичайно ниски; в) продадените мобилни устройства в магазин B са необичайно ниски;

3.5. Анализ на диаграми – зависимост на две категорни променливи 99

1.



3.6. Диаграма на разсейване. Корелационна зависимост 100

4. линейна; **5.** линейна; **6.** няма зависимост; **7.** няма зависимост;

Емпирични разпределения – Тест 1 и Тест 2........................ 102

Тест 1. **1.** а) $x_i\,\{32, 34, 35, 39\}$; $f_i\,\{11, 15, 12, 18\}$; $p_i\,\{0{,}24, 0{,}33, 0{,}26, 0{,}17\}$;

$F_{46}(x)=\{\,0,\ x\le 32;\ 0{,}24,\ 32<x\le 34;\ 0{,}57,\ 34<x\le 35;\ 0{,}83,\ 35<x\le 39;\ 1,\ 39<x\,\}$;

б) ; г) $N_{Me}=23$, $Me=34$, $N_{Q_1}=12$, $Q_1=34$, $N_{Q_3}=34$, $Q_3=35$;

Оценяване. За верен отговор на а), б) и в) – по 2 точки, за г) по 2 точки за медианата, първи и трети квартил. Оценка в точки = (получените точки.100/12);

Тест 2. **1.** а) $x_i\,\{37, 38, 39, 40\}$; $f_i\,\{12, 16, 11, 9\}$; $p_i\,\{0{,}25, 0{,}33, 0{,}23, 0{,}19\}$;

б) $F_{48}(x)=\{\,0,\ x\le 37;\ 0{,}25,\ 37<x\le 38;\ 0{,}58,\ 38<x\le 39;\ 0{,}81,\ 39<x\le 40;\ 1,\ 40<x\,\}$;

г) $N_{Me}=24$, $Me=38$, $N_{Q_1}=12$, $Q_1=37$, $N_{Q_3}=36$, $Q_3=39$;

Оценяване. За верен отговор на а), б) и в) – по 2 точки, за г) по 2 точки за медианата, първи и трети квартил. Оценка в точки = (получените точки.100/12);

4. Елементи от комбинаториката

4.1. Съединения с повторения 104

5. 5^6; **6.** $9.10^8.9=81.10^8$; **7.** n^k; **8.** $9n^{k-1}$; **10.** б) $\widetilde{P}_7(4,2,1)=\dfrac{567}{2}$; в) $\widetilde{P}_7(3,4)=35$;

11. $\widetilde{P}_8(3,5)=\dfrac{8!}{3!5!}=56$; **12.** $\widetilde{P}_6(1,3,2)=\dfrac{6!}{1!2!3!}=60$; **17.** а) $\widetilde{C}_3^{6}=28$; б) $\widetilde{V}_3^{6}=729$; **18.** $\widetilde{C}_5^{10}=1001$;

Елементи от комбинаториката . Общи задачи 113

1. а) 8; б) 81; в) 64; **2.** а) 10; б) 5; в) 2520; **3.** а) 4; б) 10; в) 6; г) 1; д) 5; е) 1; ж) n; **4.** а) 560; б) 32; 6; в) 84; **5.** $\widetilde{P}_{12}(3,3,3,3)=\dfrac{12!}{6^4}$; **6.** $\widetilde{V}_2^{n}=2^n$; **7.** $\widetilde{V}_{10}^{4}=1000$; **8.** $\widetilde{V}_6^{4}=6^4=1296$; **9.** $\widetilde{V}_2^{7}=2^7=128$;

10. а) $\widetilde{C}_6^{5}-\widetilde{C}_5^{5}=\dfrac{9!}{5!4!}$; б) $\widetilde{C}_5^{4}=70$; **11.** а) $\widetilde{V}_2^{4}=2^4=16$; б) $\widetilde{V}_5^{4}=5^4$; в) $\widetilde{V}_5^{4}-\widetilde{V}_5^{3}=5^4-5^3=5.5^3$;

12. а) $\widetilde{P}_5(3,2)=\dfrac{5!}{3!2!}$; б) $\widetilde{P}_4(1,2,1)=\dfrac{4!}{2!}$; в) $P_3=3!$;

13. а) $\widetilde{P}_8(3,1,4)=\dfrac{8!}{3!4!}$; б) $\widetilde{P}_n(1,n-1)=\dfrac{n!}{(n-1)!}$; в) $\widetilde{P}_{2n+1}(2,n,n-1)=\dfrac{(2n+1)!}{2!n!(n-1)!}$; **14.** $\widetilde{C}_5^{7}$;

15. $\widetilde{P}_{10}(3,5,2)$; **16.** $\widetilde{P}_6(2,1,1,1,1)=360$; **17.** $\widetilde{C}_4^{30}$; **19.** $\widetilde{C}_3^{15}$; **20.** а) $\widetilde{C}_3^{10}\widetilde{C}_3^{8}=2970$; **21.** $\widetilde{P}_{10}(2,5,3)$;

22. $\widetilde{P}_9(5,4)$; **23.** а) $\widetilde{C}_2^{6}$; б) $\widetilde{V}_2^{6}$; **24.** $\widetilde{V}_5^{3}.2=5^3.2$; **25.** $\widetilde{V}_6^{3}-\widetilde{V}_6^{2}=6^2.5$; **26.** $\widetilde{P}(1,1,1,2)=60$;

27. $\widetilde{P}(1,3,2)=60$; **28.** $\widetilde{C}_3^{10}$; **29.** а) $\widetilde{C}_3^{20}$; **30** $\dfrac{3.\widetilde{C}_2^{40}}{\widetilde{C}_3^{40}}$ **31** $\widetilde{C}_2^{7}$; **32** а) $\dfrac{\widetilde{C}_1^{100}}{\widetilde{C}_2^{100}}$, б) $\dfrac{2\widetilde{C}_1^{100}}{\widetilde{C}_2^{100}}$;

Елементи от комбинаториката – Тест 1 и Тест 2........................ 115

Тест 1. **1.** 3; **2.** 9; **3.** 21; **4.** 81; **5.** 60; **6.** 500; **7.** 243; **8.** 455; **9.** 6; **10.** Г;

Оценяване. За всеки верен отговор по 2 точки. Оценка в точки = (получените точки.100/20);

Тест 2. **1.** 4; **2.** 16; **3.** 5; **4.** 243; **5.** 120; **6.** 180; **7.** 1024; **8.** 66; **9.** 10; **10.** Б;

Оценяване. За всеки верен отговор по 2 точки. Оценка в точки = (получените точки.100/20);

Отговори – Модул IV

1. Вероятности

1. а) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{8}$; б) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$; в) A и B не са независими; B и C не са независими; **2.** $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$;

3. а) $\frac{1}{4}$; б) 1; в) $\frac{1}{3}$; **5.** а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{7}{32}$; г) $\frac{5}{11}$; д) $\frac{2}{21}$; е) $\frac{7}{11}$; **6.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{2}{5}$;

7. $\frac{2}{3}$; **10.** $\frac{1}{3}\left(\frac{3}{7}+\frac{4}{6}+\frac{5}{8}\right)$; **11.** $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{5}{7}\right)$;

12. а) $\frac{1}{3}\left(\frac{C_3^2}{C_7^2}+\frac{C_4^2}{C_9^2}+\frac{C_5^2}{C_8^2}\right)$; б) $\frac{1}{3}\left(\frac{C_3^2+C_4^2}{C_7^2}+\frac{C_4^2+C_5^2}{C_9^2}+\frac{C_5^2+C_3^2}{C_8^2}\right)$; в) $\frac{1}{3}\left(\frac{C_3^1C_4^1}{C_7^2}+\frac{C_4^1C_5^1}{C_9^2}+\frac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}\right)$;

13. а) $\frac{1}{3}\left(\frac{C_5^2}{C_{12}^2}+\frac{C_4^2}{C_{10}^2}+\frac{C_8^2}{C_{11}^2}\right)$; б) $\frac{1}{3}\left(\frac{C_5^2+C_7^2}{C_{12}^2}+\frac{C_4^2+C_6^2}{C_{10}^2}+\frac{C_8^2+C_3^2}{C_{11}^2}\right)$; в) $\frac{1}{3}\left(\frac{C_5^1C_7^1}{C_{12}^2}+\frac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2}+\frac{C_8^1C_3^1}{C_{11}^2}\right)$;

14. а) $\frac{1}{3}\left(\frac{C_4^2}{C_8^2}+\frac{C_3^2}{C_9^2}+\frac{C_5^2}{C_8^2}\right)$; б) $\frac{1}{3}\left(\frac{C_4^2+C_4^2}{C_8^2}+\frac{C_3^2+C_6^2}{C_9^2}+\frac{C_5^2+C_3^2}{C_8^2}\right)$; в) $\frac{1}{3}\left(\frac{C_4^1C_4^1}{C_8^2}+\frac{C_3^1C_6^1}{C_9^2}+\frac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}\right)$;

15. а) образуват; б) образуват; **16.** а) A и B образуват пълна група; б) $\frac{C_5^2}{C_5^2+C_5^1C_4^1}$;

17. а) не образуват; б) не образуват; **18.** например: $A_i=\{$броя на извадените i бели топки$\}$, $i=0,1,2,3$; $\frac{C_6^3}{C_{11}^3}$; $\frac{C_5^1C_6^2}{C_{11}^3}$; $\frac{C_5^2C_6^1}{C_{11}^3}$; $\frac{C_5^3}{C_{11}^3}$; **19.** например: $A_i=\{$броя на извадените i бели топки$\}$, $i=0,1,2$; $\frac{1}{15}$; $\frac{8}{15}$; $\frac{2}{5}$; **20.** а) $\frac{11}{36}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{1}{6}$: б) $\frac{1}{5}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{11}$; **21.** $\frac{2}{5}$; **22.** $\frac{31}{55}$; **23.** $\frac{8}{51}$; **24.** $\frac{2}{5}$; **25.** $\frac{271}{420}$;

26. $0{,}043$; **27.** $\frac{2}{7}$;

28. Двете деца имат равни вероятности да вземат шоколадов бонбон;

1. $\frac{11}{34}$; **2.** $\frac{3}{10}$; **3.** $\approx 0{,}33$; **4.** $\approx 0{,}04$; **5.** $\frac{18}{43}$; **6.** $\frac{1}{3}$; **7.** $\frac{5}{16}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}$; **8.** $\frac{4}{7}$; **9. а)** $0{,}33$; б) $0{,}67$; **10.** $0{,}0705$;

11. $\frac{16}{25}$; **12.** Y_9;

2. Случайна величина

1.

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

2.

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{4}{56}$

3. а)

X	3	6	9	12	15	18
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

б) ; $F(x)=\{\,0,$ при $x\le 3$; $\frac{1}{6},$ при $3<x\le 6$; $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6},$ при $6<x\le 9$;
$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6},$ при $9<x\le 12$; $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6},$ при $12<x\le 15$;
$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6},$ при $15<x\le 18$; $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1,$ при $18<x$ $\}$

4.

X	6	10	12
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

6. Стойностите на X са $0,\ 1,$ и 2. Съответните вероятности са $\frac{45}{144}$, $\frac{78}{144}$ и $\frac{21}{144}$;

7. Стойностите на X са $2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,$ и 12. Съответните вероятности са $\frac{1}{36}$, $\frac{2}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{6}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{2}{36}$ и $\frac{1}{36}$;

8. Стойностите на X са $0,\ 1,$ и 2. Съответните вероятности са $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3}$;

9. Стойностите на X са $0,\ 1,$ и 2. Съответните вероятности са $\frac{15}{36}$, $\frac{6}{36}$ и $\frac{15}{36}$;

10. Стойностите на X са $0,\ 1,\ 2$ и 3. Съответните вероятности са $\frac{6}{36}$, $\frac{6}{36}$, $\frac{6}{36}$ и $\frac{18}{36}$;

2.2. Математическо очакване (средна стойност), определение и свойства 132
2. а) 7; б) 1; в) 2; г) 2;

2.3. Дисперсия и стандартно отклонение на случайна величина 134
3. а) $DX=26{,}25$; $\sigma=\sqrt{26{,}25}$; б) $DX=\frac{56}{9}$, $\sigma=\frac{\sqrt{56}}{3}$; в) $DX=1$, $\sigma=1$; г) $DX=\frac{5393}{1764}\approx 3{,}06$, $\sigma\approx 1{,}75$; д) $DX=\frac{80}{11}$, $\sigma=\frac{4\sqrt{55}}{11}$, е) $DX=\frac{160}{49}$, $\sigma=\frac{4\sqrt{10}}{7}$;

3. Биномно разпределение
3.1. Биномно разпределение. Примери на реални ситуации 136
3. а) $6.0{,}0099^2$; б) $0{,}04.0{,}99^3$; в) $0{,}99^4$;

5. Стойностите на X са $0,\ 1,\ 2,\ 3$ и 4. Съответните вероятности са $\frac{256}{625}$, $\frac{128}{625}$, $\frac{96}{625}$, $\frac{16}{625}$, $\frac{1}{625}$;

6. Стойностите на X са $0,\ 1,\ 2,\ 3$ и 4. Съответните вероятности са $\frac{1}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{6}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{1}{16}$;

3.2. Свойства на биномното разпределение 138
2. а) 2; $1{,}98$; $\approx 1{,}4$; б) $\approx 3{,}33$; $\approx 1{,}11$; $\approx 1{,}05$; в) $\approx 2{,}29$; $\approx 0{,}98$; $\approx 0{,}99$; г) 10; $9{,}8$; $\approx 3{,}13$; **4.** 3; **5.** 3; **6.** 0;
8. $199\le n\le 219$;

4.3. Основни свойства на нормалното разпределение...145
3. а) $0{,}0228$; б) $0{,}0228$; в) $0{,}9999$; г) $0{,}9344$; д) $0{,}4772$; **4.** $0{,}8661$; **5.** а) $0{,}7258$; б) $0{,}0718$; **6.** а) $0{,}7745$; б) $0{,}0062$; **7.** а) $0{,}5859$; б) $0{,}1056$; в) $0{,}7734$;**8.** а) $1{,}56$; б) $0{,}58$; в) $1{,}96$; Г) $3{,}08$; **9.** а) $1{,}64$; б) $1{,}96$; в) $2{,}05$; **10.** а) $1{,}96$; б) $2{,}55$; в) $1{,}5$;

5. Статистически изводи
5.1. Статистически изводи с модел биномното разпределение върху данни от учебен тест 149

2. $H_a : p < 0,2$, $\alpha = 0,05$ а) няма основание да се отхвърли H_0; б) нулевата хипотеза се отхвърля;
3. $H_a : p < 0,9$, $\alpha = 0,05$ а) нулевата хипотеза се отхвърля; б) няма основание да се отхвърли H_0;

5.2. Статистически изводи с модел нормално разпределение върху данни от измерване при конкретен експеримент 151

5. а) няма основание да се отхвърли H_0; б) H_0 се отхвърля; **6.** а) няма основание да се отхвърли H_0; б) няма основание да се отхвърли H_0.

6. Линеен модел на корелационна зависимост
6.1. Прост линеен модел – определяне на правата. Прогнозиране 153

2. $26\hat{y} = 47 + 18x$; 6;

Вероятности и анализ на данни – Общи задачи 157

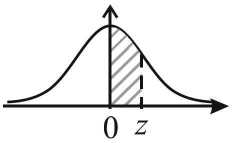
1. $\frac{21}{46}$; **2.** $\frac{C_{30}^3C_{27}^2 + C_{30}^2C_{70}^1C_{28}^2 + C_{30}^1C_{70}^2C_{29}^2 + C_{70}^3C_{30}^2}{C_{100}^3C_{100}^2}$; **3.** $\approx 0,34$; **4.** а) x_i: 10, 20, 50, 100, 200, p_i: $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{1}{12}$; б) $F(x) = \{\, 0,\ x \le 10;\ \frac{2}{12},\ 10 < x \le 20;\ \frac{5}{12},\ 20 < x \le 50;\ \frac{9}{12},\ 50 < x \le 100;\ \frac{11}{12},\ 100 < x \le 200;\ 1,\ 200 < x \,\}$; в) $EX \approx 56,67$, ; г) $DX \approx 2738,(8)$;
5. $\frac{1}{C_{15}^3C_{15}^3}(C_{10}^3C_{10}^3 + C_{10}^2C_5^1C_{11}^3 + C_{10}^1C_5^2C_{12}^3 + C_5^3C_{13}^3)$; **6.** 0,5; **7.** а) x_i : 1, 2, 3; p_i: $\frac{11}{36}$, $\frac{9}{36}$, $\frac{16}{36}$; б) $F(x) = \{\, 0,\ x \le 1;\ \frac{10}{36},\ 1 < x \le 2;\ \frac{20}{36},\ 2 < x \le 3;\ 1,\ 3 < x \,\}$; в) $EX \approx 2,14$; г) $DX \approx 0,73$;
8. 3, 2, $\sqrt{2}$; **9.** а) 0,24; б) $\approx 0,24$; в) 2; **10.** $\approx 0,57$; **11.** а) 0,1587; б) 0,5; в) 0,1587; г) 0,1587;
12. няма основание да се отхвърли нулевата хипотеза; **13.** нулевата хипотеза се отхвърля;
14. $1277\hat{y} = -72 + 1161x$; ≈ 45; **15.** няма основание да се отхвърли нулевата хипотеза;
16. нулевата хипотеза се отхвърля; **17.** $\frac{180}{1183}$; **18.** няма основание да се отхвърли нулевата хипотеза; **19.** няма основание да се отхвърли нулевата хипотеза; **20.** 2.

Вероятности и анализ на данни – Тест 1 и Тест 2 159

Тест 1. **1.** 0,45; **2.** $\approx 0,39$; **3.** 0,37; **4.** а) Стойностите на X са 11, 12, 21 и 22. Съответните им вероятности са $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{4}$; б) $F(x) = \{\, 0,\ x \le 11,\ \frac{1}{4},\ 11 < x \le 12,\ \frac{1}{2},\ 12 < x \le 21,\ \frac{3}{4},\ 21 < x \le 22,\ 1,\ 22 < x \}$; **5.** а) 1,8; б) 0,56; в) 0,75; **6.** а) 2,4; б) 0,96; в) 3 или 2; **7.** а) 0,9521; б)0,0004; **8.** ; **9.** $259\hat{y} = 790 + 227x$; 64;
Оценяване. За всеки верен отговор по 2 точки. Оценка в точки = (получените точки.100/18);

Тест 2. **1.** $\frac{26}{45}$; **2.** ; $\approx 0,18$; **3.** 0,43; **4.** а) Стойностите на X са 0, 1, 2, 3, 4 и 5. Съответните им вероятности са $\frac{6}{36}$, $\frac{10}{36}$, $\frac{8}{36}$, $\frac{6}{36}$, $\frac{4}{36}$, и $\frac{2}{36}$; б) $F(x) = \{\, 0,\ x \le 0;\ \frac{6}{36},\ 0 < x \le 1,\ \frac{16}{36},\ 1 < x \le 2,\ \frac{24}{36},\ 2 < x \le 3,\ \frac{30}{36},\ 3 < x \le 4,\ \frac{34}{36},\ 4 < x \le 5,\ 1,\ 5 < x \,\}$; **5.** а) 1,25; б) 0,6; в) 0,77; **6.** а) 3,5; б) 1,05; в) 4; **7.** а) 0,8854; б) 0,0004; **8.** няма основание да се отхвърли нулевата хипотеза;
9. $1487\hat{y} = 2857 + 1242x$; 44;
Оценяване. За всеки верен отговор по 2 точки. Оценка в точки = (получените точки.100/18);

Таблица за площите под стандартната нормална крива



	0.00	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	**0.4495**	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	**0.4750**	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998

Математика за 12. клас, профилирана подготовка

Донка Георгиева Гълъбова, Мая Пламенова Сидерова

Графичен дизайн Донка Гълъбова и Мая Сидерова
Корица Кирил Чохаджиев и Диляна Чохаджиева

Българска
Първо издание, 2021 г.
Формат 60x84/8, Печатни коли 23

Издателство „Веди.БГ ЕООД"
София, ул. „Ал. Жендов" №6, ет.4/421
Тел. 02-971-47-82; 0888-95-98-13
e-mail: info@vedi.bg
www.vedi.bg

ISBN 978-954-8857-55-0

Печат „СИМОЛИНИ 94"

София 2021 година