Експериментална Физика

Измерване на Величини

За създаване на физични теории, които да описват и предсказват света, е нужда да отделяме отделни парчета от света, които са измерими. Тези части от света наричаме величини и те могат да имат най-различна форма и характер и да се измерват по най-различен начин: Дължина L, Време t, заряд Q, честота на Фотон ν и т.н.

Една физична величина е **напълно определена**, когато познаваме нейните:

- Физичен смисъл
- Числова стойност
- Мерна единица
- Оценка на грешката(неопределеността)

Стандартния запис на една величина е: $X = (x \pm \Delta x)$ [мерна единица]
x – числова стойност, Δx – оценка на грешката

Така например правилно представяне на величина е: M = (60 ± 0,1) kg.
Величината M = 60 kg е непълно определена поради липсата на оценка за грешката.

Числовата стойност на една физична величина се получава от измерване. Измерване наричаме съпоставянето на дадена величина с еднородна на нея величина, приета за единица мярка (Например сравняваме дължината на обект с еталона метър).

Видове Измервания:

Преки Измервания	Косвени Измервания
Преки измервания са тези, при които стойността на измерваната величина се получава директно от измервателния уред.	Косвените измервания са тези, при които стойността на измерваната величина се получава чрез измерване на други величини. Получаваме търсената от нас величина чрез физичните закони, които я свързват с измерените величини.
Пример: Измерване на дължина с линия, на маса с кантар.	Пример: Измерване на съпротивлението на резистор, измервайки пряко тока през него при дадено напрежение(Амперметър, Волтметър). Получаваме съпротивлението от закона на Ом: $R = \frac{U}{I}$

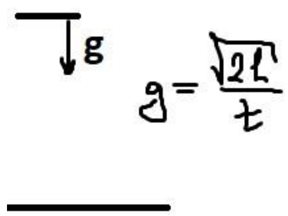
Еднократно измерване	Многократно измерване
Измерване, при което първите 3-5 измервания са еднакви и експериментатора оценява, че няма обективна причина за промяна в показанието.	Измерване, при което получаваме като цяло различни стойности.
Пример: Измерване на дължина с линия. Колкото и пъти да измерваме правата AB с дължина 7,1 см, ние винаги ще получаваме едно и също.	Пример: Измерване на периода на математично махало. Ще получите най-разнообразни стойности, стига да мерите с достатъчно точен уред(хронометър).

Полево измерване	Лабораторно измерване
Полевите измервания като цяло дават по-груби резултати. Това се дължи на много нежелани външни въздействия върху експеримента.	При лабораторните измервания имаме като цяло по-точни резултати. Лабораторните условия позволяват премахването на нежелани външни влияния върху експеримента.
Пример: Измерване на период на математично махало близо до оживено кръстовище. Вибрациите от автомобилите и въздушните течения ще създадат съществена неточност в експеримента.	Пример: Опит на Кавендиш – В прословутия си опит Кавендиш мери константата* в закона на Нютон за гравитацията. За по-голяма точност поставя цялата си опитна установка в дървена постройка с размери 3x3x1 m, която стои в усамотена барака.

При всяко измерване ние получаваме само приблизителна стойност, която е близка до реално търсената стойност. Това се дължи на много фактори като един от основните е неточността на измервателния уред. Казваме, че получената при измерването стойност има Грешка.

Видове Грешки:

Случайни Грешки	**Систематични Грешки**	**Груби Грешки**
Дължат се на различни неконтролируеми, случайно изменящи се външни фактори, влияещи върху измерванията. Грешката се променя по знак и големина при различните измервания.	Дължат се на фактори, които действат по време на цялото многократно измерване и могат да бъдат отчетени(и премахнати) от крайните резултати.	Дължат се на грешка на експериментатора, повреда в уреда или груба намеса на околната среда в експеримента ни.
Борим се със случайните грешки по 2 начина: - Използваме лабораторни условия, които ограничават случайните външни въздействия. - Правим многократни измервания. Доказано е, че при огромен брой измервания грешките се балансират и тежестта им към резултата от опита намалява.	Пример: Използваме евтин кантар за измерване на маса на стоки в склад. След измерване на 100 маси сверяваме уреда си с по-точен такъв и откриваме, че при всички измервания кантарът ни е показвал с 10% повече. Възможно е систематичната грешка да се премахне и да коригираме масите на първите 100 измервания без да ги повтаряме.	Пример: Мерите разстояние с линия, но сте бутнали линията с ръка по време на измерването и вече нулата не съвпада с началото на обекта, а е на 2 см пред него. Ще получите резултат с 2 см по-къс от реалния.

Инструментална Грешка	**Методическа Грешка**
Дължи се на несъвършенството на уредите ни. Никой уред не може да измери някоя величина със 100% точност. Различните уреди мерят различно точно, но всеки един от тях е несъвършен. Инструменталната грешка не може да се премахне.	Грешка, обусловена от несъвършенство на метода на измерване. Мерим g като пускаме тяло от височина h и мерим времето t за падането му. Ако тялото пада свободно g се смята по дясната формула. В този модел не отчитаме съпротивлението на  въздуха, което води до неточност в получения резултат. Това е грешка в самия метод, по който мерим g.

Дотук характеризирахме грешките по причината за възникване и вида им. Когато представяме и анализираме крайните резултати от едно измерване използваме:

Абсолютна Грешка	**Относителна Грешка**
Δx задава интервала около измерената числова стойност x, където очакваме да бъде истинската стойност. За изчисляването на абсолютната грешка има разработени алгоритми, с които ще се запознаем по-долу.	Отношението на абсолютната грешка и измерената стойност: $\frac{\Delta x}{x}$ Позволява ни да оценим точността на проведения експеримент. Най-често се прави като представяме абсолютната грешка в %.
Пример: Измерваме маса m = 5,1 kg с кантар. Абсолютната ни грешка е ±0,05 kg. Очакваме истинската стойноста да е между 5,05 и 5,15 kg.	Пример: Измервайки m = 5,3 ± 0,05 kg имаме относителна грешка: m = $\frac{0,05}{5,1}$ ≈ 1 %. Ако измерим m = 102,3 kg ± 0,05 kg имаме относителна грешка m = $\frac{0,05}{102,3}$ ≈ 0.05 %. Виждаме, че макар абсолютната грешка да е еднаква, второто измерване е много по-точно.

Отчитане на Грешки

Грешки при закръгляне

Когато закръглим едно число, ние вече не даваме истинската му стойност, а само приближена. Това е източник на грешки в задачите ни, които се оценяват както следва:

Нека закръглим Пи до 3-та значеща цифра:

$$\pi \approx 3,14 \pm 0,005$$

Прието е грешката при закръгляне да е половината от най-малката значеща цифра на числото.

Грешка при ползване на таблични стойности

1. Приближени стойности. Много често в практиката ползваме константи от чужди измервания и експерименти. Крайният резултат, който ние ползваме, също е бил закръглен, затова ние отново трябва да отчетем съответната свързана с това грешка. Нека вземем таблично масата на Земята:

$$M = (5,972 \pm 0,0005).10^{24}\ \text{kg}$$

2. Точни стойности. Понякога чуждите данни, които искаме да ползваме, са получени с малка точност. Тогава резултатът на експериментът е с малко значещи цифри и не е закръглен. Трябва да ползваме оригиналната грешка на експериментатора.

Примери: Приближена стойност: Универсалната газова константа е открита с огромна точност:

$$R = 8,314\ 462\ 618\ 153\ 24\ \text{J/mol.K}$$

Нереално е да провеждаме експеримент или да решаваме задача, при които пълната точност на константата да ни е нужна. Затова най-често се взима приближената стойност: $R = 8,314 \pm 0,0005$ J/mol.K

Точна стойност: Работим с модел на звездата Бетелгейзе. Имаме нужда от скоростта ѝ на въртене, която е била измерена от някой друг:

$$v = 5,47 \pm 0,25\ \text{km/s}$$

Както добре виждате това не е грешката от закръгляне, а грешката на експеримента, с който е била получена тази скорост. Таблично взимаме не само числената стойност, но и оценката за грешката, вървяща към нея.

Rotational velocity	5.47 ±0.25[18] km/s

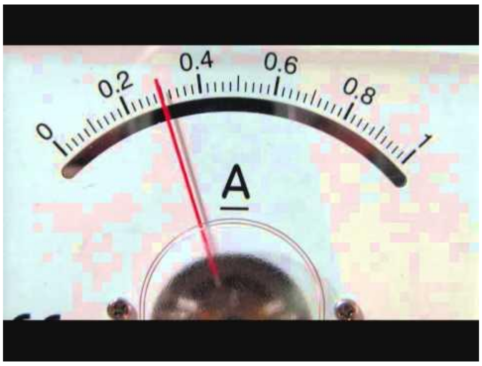
Грешки при еднократно пряко измерване

При еднократно пряко измерване е прието абсолютната грешка Δx да е равна на половината от най-малкото деление на скалата на уреда или на половината от най-малкия цифров разряд на дисплея му.

Правилното снемане на позаканието на този мултицет е:

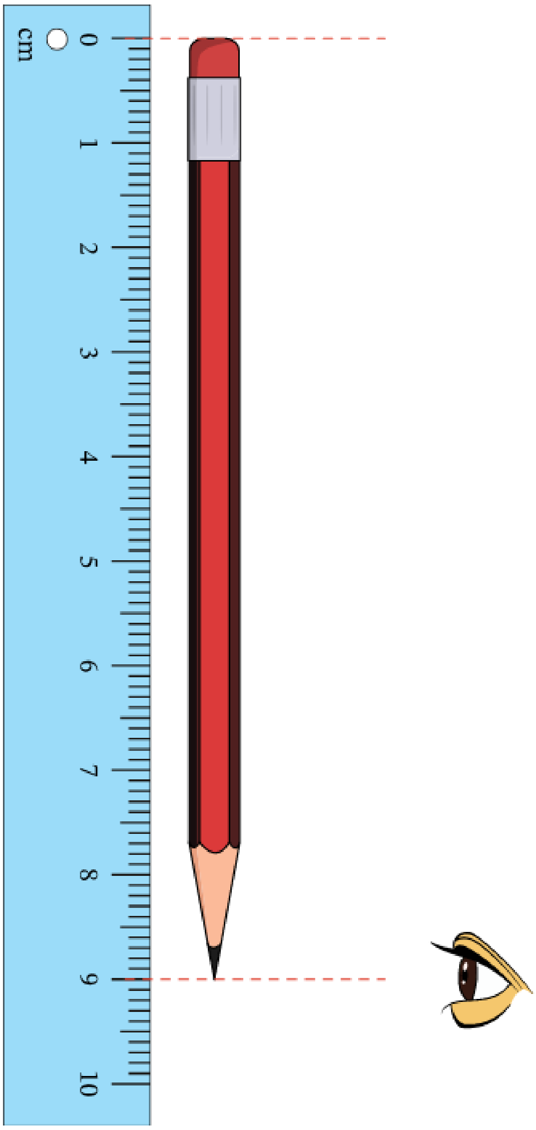
$$x = 2,18 \pm 0,005$$

Вида на величината и мерната единица зависят от това на какъв режим на работа е настроен мултицета.



За стрелкови уред трябва да идентифицираме стойността на 1 деление. В случая едно деление е 0,02 А. Грешката е половината от това Тогава правилното отчитане е:

$$I = 0{,}3 \pm 0{,}01 \text{ A}$$



При някои измервания има допълнителни специфики, които трябва да се отчетат. Например когато мерим с линия имаме два източника на грешки – отчитаме положението на двата края на обекта спрямо линията. Не може просто да приемем, че края на обекта, който сме сложили до 0-лата идеално съвпада с нея.

По тази причина в този пример отчитаме грешката като 2 пъти половината от най-малкото деление на линията:

$$L = 9{,}0 \pm 0{,}1 \text{ cm}$$

(А не ± 0,5 mm както бихме получили, ако следваме общото правило)

Ако с тази линия мерим 63 см обект ще ни се наложи да използваме линията 7 пъти. При това всяко отделно измерване ще ни дава грешка от 1 mm. Тогава крайната грешка ще е:

$$L = 63{,}0 \pm 0{,}7 \text{ cm}$$

Забележка: За по-точно измерване на по-дългия обект е добре да се използва по-дълга линия за намаляване на грешката.

Грешка при многократно пряко измерване:

При многократни преки измервания имаме различни стойности на величина, което се обуславя от наличието на случайна грешка. Тук пред нас стоят 2 въпроса:

- Как да определим измерената от нас стойност x. (Която не е нито една от получените отделни стойности)
- Как да определим абсолютната грешка на измерването – Δx. (Която включва както инструменталната грешка и случайна такава)

Отговорът на този въпрос в общия случай е доста сложен и е обект на изучаване на статистиката. Ние ще използваме най-простия модел – този на нормалното/Гаусово разпределение***. От статистиката зад него следват няколко важни извода:

- За краен резултат от измерването ползваме средноаритметичното на резултатите ни.
- Случайната грешка може да се оцени със стандартното отклонение/дисперсията на гаусовото разпределение – σ. Пресмятането на σ става по прост алгоритъм.
- Абсолютната грешка зависи както от σ, така и от другите типове грешка в нашето измерване – Например експериментална грешка, време за реакция и др.

Алгоритъм за Намиране на грешки при многократни преки измервания:

1. Резултатите от измерванията се записват в таблица. (Виждате примерна такава долу. Резултатите са в колона x).

2. Изчислява се средноаритметичното на измерената величина: $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$, n – брой измервания.

3. Намират се отклонението на всеки получен резултат спрямо средноаритметичното: $\Delta x = \bar{x} - x_i$. (Колона Отклонение в таблицата).

4. Изчислява се $(\Delta x)^2$ за всяко измерване. (Колона Отклонение на квадрат)

5. В замисимост от броя на измерванията използваме формулата за изчисляване на σ, която е подходяща:

$$\text{За } 10 < n < 30\text{: } \sigma = \sqrt{\frac{\sum_i^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}$$

$$\text{За } 30 < n\text{: } \sigma = \sqrt{\frac{\sum_i^n (\bar{x} - x_i)^2}{n(n-1)}}$$

6. Пресмята се сумарната грешка, която зависи и от други неточности като грешка на уреда или време за реакция на експериментатора. Квадратите на всички членове се сумират под корен:

$$\Delta x_{\text{сум}} = \sqrt{\sigma^2 + (\Delta x_{\text{инс}})^2 + (\Delta x)^2_{\text{реакция}} + \cdots}$$

7. Оценява се относителната грешка: $\frac{\Delta x}{\bar{x}_{\text{сум}}}$

8. Крайният резултат се записва във вида: $X = (\bar{x} \pm \Delta x_{\text{сум}})$ [мерна единица]

		x	Отклонение: Xср - Xi	Отклонение на Квадрат		Sigma
	1	100	0,636	0,405		
	2	102	-1,364	1,860		
	3	102	-1,364	1,860		
	4	101	-0,364	0,132		
	5	97	3,636	13,223		
	6	103	-2,364	5,587		
	7	101	-0,364	0,132		
	8	98	2,636	6,950		
	9	103	-2,364	5,587		
	10	101	-0,364	0,132		
N	11	99	1,636	2,678		Sigma
	Средно:	100,6		38,545	Сума на кв на отклонението	2,0

Таблицата горе е стандартна таблица, която се прави за изчисляване на σ. Поради множеството аритметични операции е стандартно да се прави на компютър като ексел е един от най-бързите и лесни варианти за обработка на данните. Таблицата покрива всичко, изброено в стъпки 1-5 от дадения ви алгоритъм.

Оценка на грешката при косвено измерване

При косвеното измерване получаваме търсената величина x чрез други величини – A, B... Грешката на получения резултат x зависи както от грешките на измерените величини ΔA и ΔB, така и от аритметичните операции, които после сме извършили с величините A и B. Това означава, че за различните закони на физиката ще имаме различна формула за това как грешката на измерването ни Δx зависи от ΔA и ΔB.

Както помните при намирането на производни свеждахме сложните функции до комбинация от по-прости и така ни се налагаше да ползваме производната само на няколко основни таблични функции. Подобен е и подхода към косвените измервания. В таблицата долу ви е дадено как се намират грешките при базови операции. Всяка по-сложна операции може да се сведе до комбинация от дадените:

Грешки при Косвени Измервания

В таблицата долу:
A, B – измерваните величини
ΔA, ΔB – грешките при тяхното измерване(пряко или косвено)

x – Величината, която получаваме косвено чрез физичен закон(функционална връзка)
Δx – Грешката на така получената величина

Функционална Зависимост	Максимална Абсолютна Грешка	Относителна Грешка
$x = c.A$ $c = const$	$\Delta x = c.\ \Delta A$	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta A}{A}$
$x = A + B$	$\Delta x = \Delta A + \Delta B$	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta A + \Delta B}{A + B}$
$x = A - B$	$\Delta x = \Delta A + \Delta B$	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta A + \Delta B}{A - B}$
$x = A.B$	$\Delta x = B.\Delta A + A.\Delta B$	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$
$x = \frac{A}{B}$	$\Delta x = \frac{B.\Delta A + A.\Delta B}{B^2}$	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$
$x = A^n$	$\Delta x = \|n\|.A^{n-1}.\Delta A$	$\frac{\Delta x}{x} = \|n\|\frac{\Delta A}{A}$
$x = \sin A$	$\Delta x = \cos A.\Delta A$	$\frac{\Delta x}{x} = \mathrm{cotg}(A).\Delta A$
$x = \cos A$	$\Delta x = \sin A.\Delta A$	$\frac{\Delta x}{x} = \mathrm{tg}(A).\ \Delta A$
$x = \mathrm{tg}A$	$\Delta x = \frac{\Delta A}{\cos^2 A}$	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{2\Delta A}{\sin(2A)}$
$x = \mathrm{cotg}A$	$\Delta x = \frac{\Delta A}{\sin^2 A}$	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{2\Delta A}{\sin(2A)}$

Примери:

1. x = c.A. Били сте в магазина. Купили сте си нещо без да видите колко струва точно, но знаете, че е между 1,30 и 1,70. Платили сте с 10 лева и сте прибрали рестото в джоба си без да го броите. Всичко на всичко знаете, че имате A = 8,5 ± 0,2 лв. На пътя намирате магическа лампа. Потърквате я и отвърте изплува златната рибка на Шрьодингер. Докато се чудите дали е била жива или мъртва в лампата, получавате от нея следното условие: „Ще умножа парите в джоба ти по 1000, ако ми кажеш какви са възможните стойности за парите, които ще имаш след това.“. Какъв е правилния отговор?

$$x = c.A = 8500 \text{ лв}$$

$$\Delta x = c.\ \Delta A = 200 \text{ лв}$$

$$x = 8500 \pm 200 \text{ лв.}$$

2. Разполагате с две прави пръчки с дължини $L_1 = 142 \pm 3$ cm и $L_2 = 75 \pm 2$ cm. Намерете дължината на пръчката, която ще получите, ако ги закрепите здраво една за друга. Каква е вероятността получената пръчка да е по-висока от Шакил О'Нийл? ($h_1 = 2{,}16$ m) (Приемете, че няма грешка в така получената стойност на Шакил и че всички стойности за дължината на пръчките, които се намират в доверителния интервал, са равновероятни)

$$x = L1 + L_2 = 217 \text{ cm}$$

$$\Delta x = \Delta L_1 + \Delta L_2 = 5 \text{ cm}$$

$$x = 217 \pm 5 \text{ cm}$$

При дължини в интервала $x \in (216;222)$ пръчката ще е по-висока. При дължини в интервала $x \in (212;216)$ пръчката ще е по-ниска. Това ни дава 60% вероятност да е по-висока и 40% да е по-ниска.

3. Леброн Джеймс е висок $h_2 = 2{,}06 \pm 0{,}005$ m. С колко е по-висок Шакил от него? (Приемете, че грешката при измерване на височината на Шакил е $\Delta h_1 = 0{,}005$ cm)

$$x = h_1 - h_2 = 10 \text{ cm}$$

$$\Delta x = \Delta h_1 + \Delta h_2 = 1 \text{ cm}$$

$$x = 10 \text{ cm} \pm 1 \text{ cm}$$

Забележка: Виждате, че при много малки начални относителни грешки: 0,24% и 0,23% получихме крайния резултат с цели 10% относителна грешка. Това може да се види във формулата за относителната грешка – колкото по-близки са A и B и $A - B \approx 0$, толкова по-голяма ще бъде резултантната относителна грешка.

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta A + \Delta B}{A - B}$$

В експериментите по физика се избягват опити, където се налага да вадим много близки по стойност величини. Въобще при планирането на експериментите анализа на грешките и разпространението им е ключово за получаване на достоверни резултати.

4. Измерили сме страните на правоъгълник $a = 5 \pm 0{,}5$ cm и $b = 40 \pm 0{,}5$ cm. Намерете площта на правоъгълника:

$$S = a.b = 200 \text{ cm}^2$$

$$\Delta S = b.\Delta a + a.\Delta b = 22{,}5 \text{ cm}^2$$

$$S = 200 \pm 23 \text{ cm}^2$$

Алтернативно: (Относителни грешки)

$$S = a.b = 200 \text{ cm}^2 \quad \frac{\Delta a}{a} = 10\% \quad \frac{\Delta b}{b} = 1{,}25\% \text{ откъдето } \quad \frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} = 11{,}25\%$$

$$\Delta S = S.\left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right) = 11{,}25\%.200 = 22{,}5 \text{ cm}^2$$

$$S = 200 \pm 23 \text{ cm}^2$$

5. Лицето на правоъгълник със страни $a = 10 \pm 1$ cm и b е $S = 200 \pm 25$ cm^2. Намерете страната b.

$$b = \frac{S}{a} = 20 \text{ cm}$$

$$\Delta b = \frac{a.\Delta S + S.\Delta a}{a^2} = 4{,}5 \text{ cm}$$

$$b = 20 \pm 4{,}5 \text{ cm}$$

6. Лицето на квадрат е $S = 64 \pm 3$ cm^2. Намерете страната на квадрата a.

$$a = \sqrt{S} = 8\text{cm} \qquad \Delta a = \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{S}}.\Delta S = 0{,}1875 \text{ cm}$$

$$a = 8{,}0 \pm 0{,}2 \text{ cm}$$

7. В експеримент по оптика сме измерили ъгъл $\alpha = (43 \pm 1)^0$. Намерете стойността на синуса от този ъгъл. Забележка: Грешката на ъгъл α трябва да е в радиани.

$$\sin\alpha = 0,681998 \qquad \Delta\sin\alpha = \cos(\alpha).\Delta\alpha = 0,0128$$

$$\sin\alpha = 0,682 \pm 0,013$$

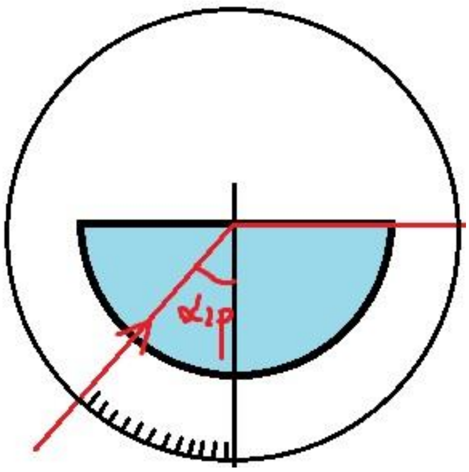
8. Ако това е граничният ъгъл за дадено стъкло, намерете показателят на пречупване на това стъкло. Връзката се дава с формулата: $n = \frac{1}{sin\alpha_{\text{гр}}}$.

$$n = \frac{1}{sin\alpha_{\text{гр}}} \approx 1,466$$

$$\Delta n = |-1|.\frac{1}{sin^2\alpha_{\text{гр}}}.\Delta\sin\alpha_{\text{гр}} = \frac{0,0128}{0,4651} \approx 0,0275$$

$$n = 1,47 \pm 0,03$$

Въпросният експеримент изглежда както виждате по-долу. Полусфера от това стъкло се поставя в центъра на оптичен кръг. Това позволява да отчитаме ъгълът на падане на лъчи, насочени към центъра на кръга. След като намерим лъча, който се пречупва под 90^0, измерваме граничния ъгъл за веществото.



Допълнително

*** Гаусовото разпределение може да се види като разпределим измерванията си в интервали и броим колко от нашите измервания попадат в даден интервал. При това се вижда, че броят резултати в интервалите около средноаритметичната стойност е симетричен и е толкова по-голям, колкото по-близо сме до средното.